

Maschinelles Lernen II

1. Übung

Prof. Tobias Scheffer
Dr. Niels Landwehr
Christoph Sawade

Sommer 2010

Ausgabe am: 28.04.10
Besprechung am: 05.05.10

Aufgabe 1

Bayes'sche Netze

Wir versuchen, den Motor unseres Autos zu starten. Dieser startet ($Motor = 1$) oder nicht ($Motor = 0$). Es kann verschiedene Ursachen dafür geben, dass der Motor nicht startet: der Tank kann leer sein ($Tank = 0$), oder der Starter des Motors rotiert nicht ($Starter = 0$). Der Starter benötigt eine intakte Batterie ($Batterie = 1$) und er darf nicht defekt sein ($StarterDefekt = 0$). Den Zustand des Tanks können wir indirekt über die elektrische Tankanzeige beobachten, diese zeigt einen vollen Tank ($Anzeige = 1$), falls der Tank voll ist; allerdings ist $Anzeige = 0$ falls $Batterie = 0$ unabhängig von $Tank$.

1. Geben Sie ein Bayessches Netz über die binären Zufallsvariablen $Batterie$, $StarterDefekt$, $Starter$, $Tank$, $Anzeige$, und $Motor$ an. Geben Sie dazu die Graphstruktur G und die entsprechenden (bedingten) Verteilungen in Tabellenform an. Setzen Sie realistische numerische Wahrscheinlichkeiten ein (diese sind praktisch nie genau 0 oder 1).
2. Prüfen Sie anhand des D-Separation Kriteriums, ob die folgenden Unabhängigkeiten in der durch das Netz repräsentierten Verteilung gelten:
 - $StarterDefekt \perp Motor \mid Batterie$
 - $Batterie \perp Tank \mid \emptyset$
 - $Batterie \perp Motor \mid Starter$
 - $Tank \perp StarterDefekt \mid Motor$

Argumentieren Sie zusätzlich für jede der Unabhängigkeiten, warum sie gilt/nicht gilt.

3. Wir haben beobachtet, dass der Motor nicht startet ($Motor = 0$). Ist es wahrscheinlicher, dass die Ursache in einem leeren Tank liegt ($Tank = 0$), oder in einer leeren Batterie ($Batterie = 0$)?

Aufgabe 2

Naïve Bayes als Graphisches Modell

In der Vorlesung *Maschinelles Lernen I* wurde der Naïve Bayes Klassifikator vorgestellt. Zur Erinnerung: naïve Bayes ist ein generatives Modell, und modelliert $p(\mathbf{x}, y)$ durch

$$p(\mathbf{x}, y) = p(y) \prod_{i=1}^n p(x_i | y)$$

wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

der Merkmalsvektor ist.

1. Geben Sie naïve Bayes als graphisches Modell über den Zufallsvariablen y, x_1, \dots, x_n an (nur die Graphstruktur, keine numerischen Wahrscheinlichkeiten).
2. Betrachten Sie das alternative graphische Modell, das entsteht, in dem wir im naïve Bayes Modell alle Kanten umdrehen. Handelt es sich immer noch um ein valides graphisches Modell? Welche Vorteile/Nachteile hat es im Vergleich zum ursprünglichen naïve Bayes Modell?

Aufgabe 3

Azyklische Graphen

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Graphentheorie:

Ein Graph G ist azyklisch genau dann wenn es eine Ordnung \leq_G auf den Knoten von G gibt, so dass für alle $X, X' \in G$ gilt: $X \rightarrow X' \implies X \leq_G X'$.

Hierbei bezeichnet $X \rightarrow X'$, dass es eine gerichtete Kante von Knoten X zu Knoten X' gibt.