Universität Potsdam
Institut für Informatik
Lehrstuhl Maschinelles Lernen

Reinforcement Learning 2

Uwe Dick

Inhalt

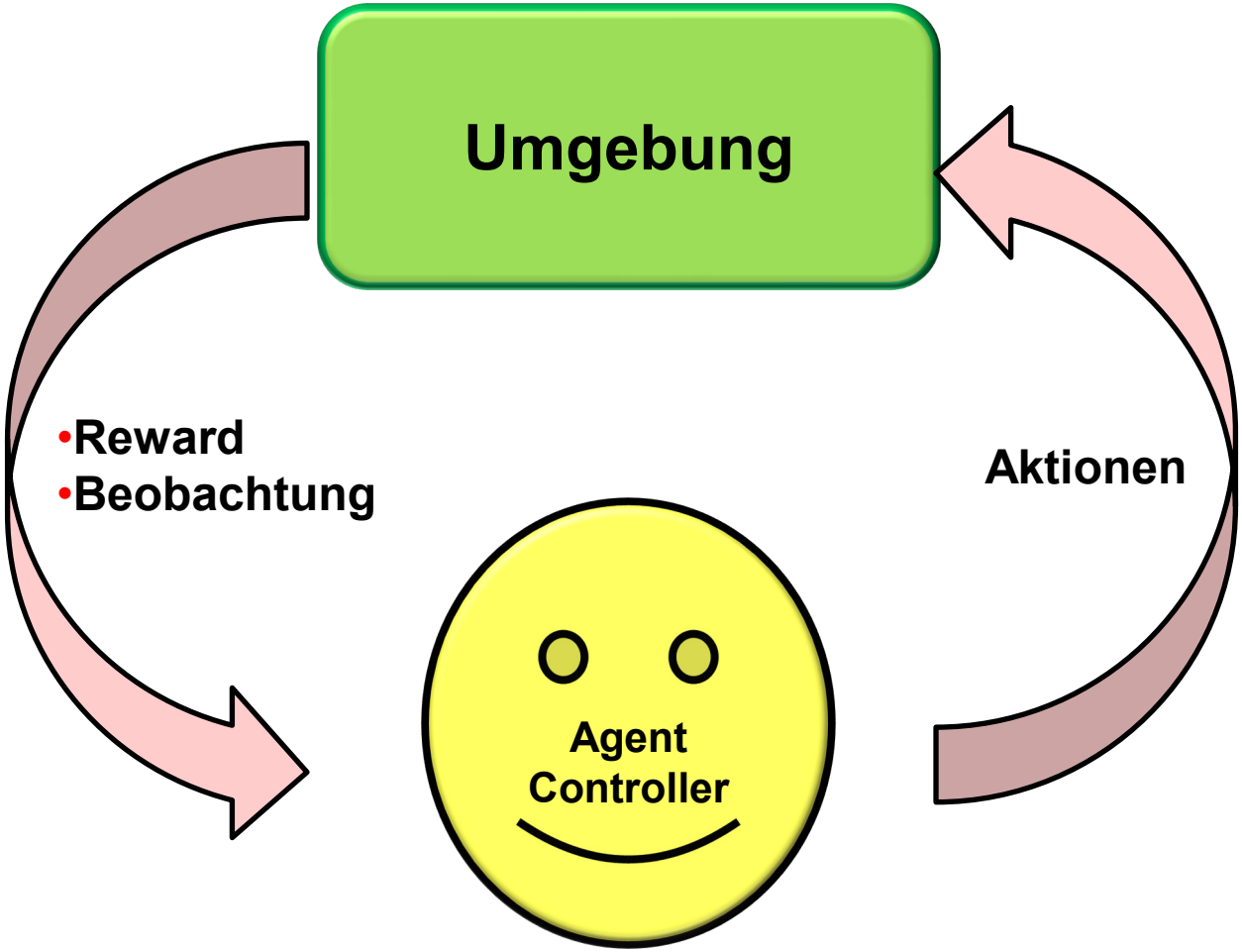
- Erinnerung:
  - Bellman-Gleichungen, Bellman-Operatoren
  - Policy Iteration
- Sehr große oder kontinuierliche Zustandsräume
- Monte-Carlo Sampling, UCT
- Diskretisierung
- Approximate Policy Iteration
  - Bellman Residual Minimization
  - Least Squares Temporal Difference

Literatur

- Reinforcement Learning. An Introduction.
  von Richard S. Sutton und Andrew G. Barto
  http://www.cse.iitm.ac.in/~cs670/book/the-book.html

- Tutorials auf *videolectures.net*
  - z.B. von Csaba Szepesvari oder Satinder Singh

Lernen aus Interaktionen



Markov Decision Processes

- Markov-Entscheidungsprozess (S,A,R,P)
- S : endliche Zustandsmenge
- A : endliche Aktionsmenge
- P : Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(s'|s,a)\ \ s,s' \in S, a \in A$$

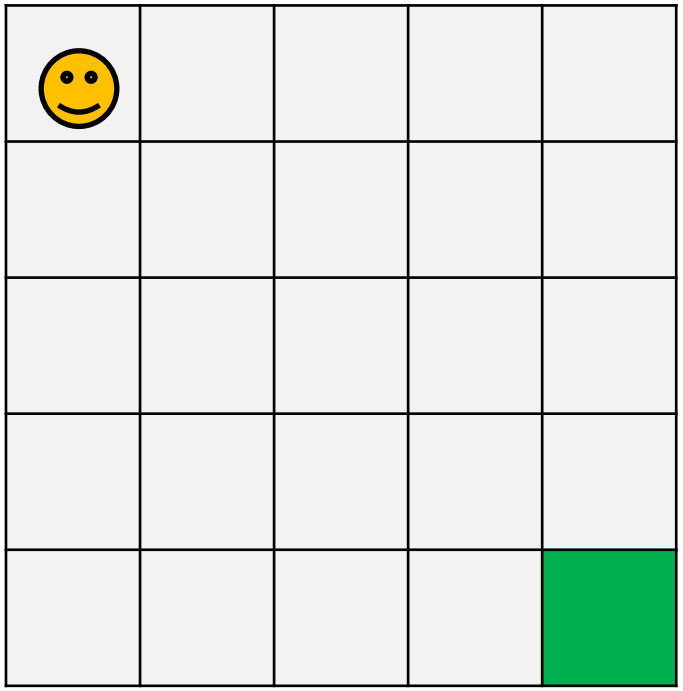
- R : Erwarteter Reward. Beschreibt den sofort erzielten Gewinn.

$$R : (S \times A) \to \mathbb{R}$$

- Discount factor $0 \leq \gamma < 1$.

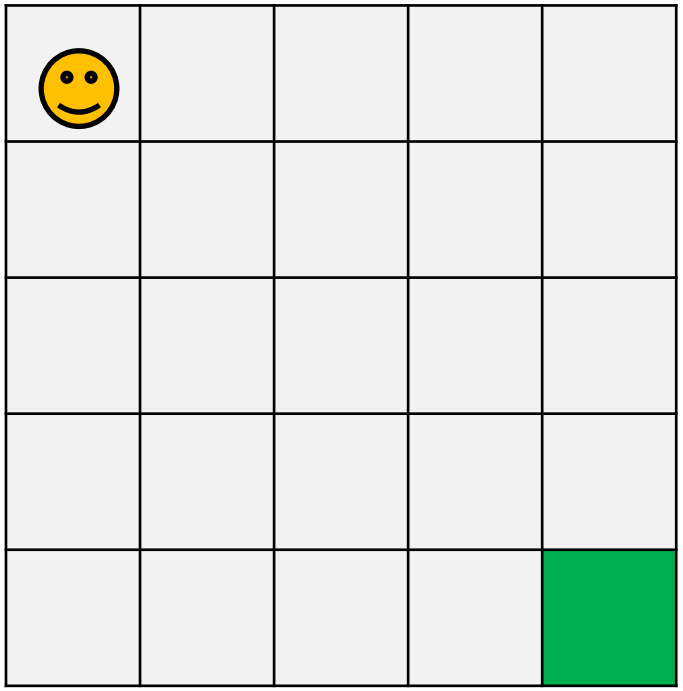
Beispiel: Gridworld

- Zustandsraum S
  - Startzustand $s_s \in S$
  - Zielzustand $s_z \in S$



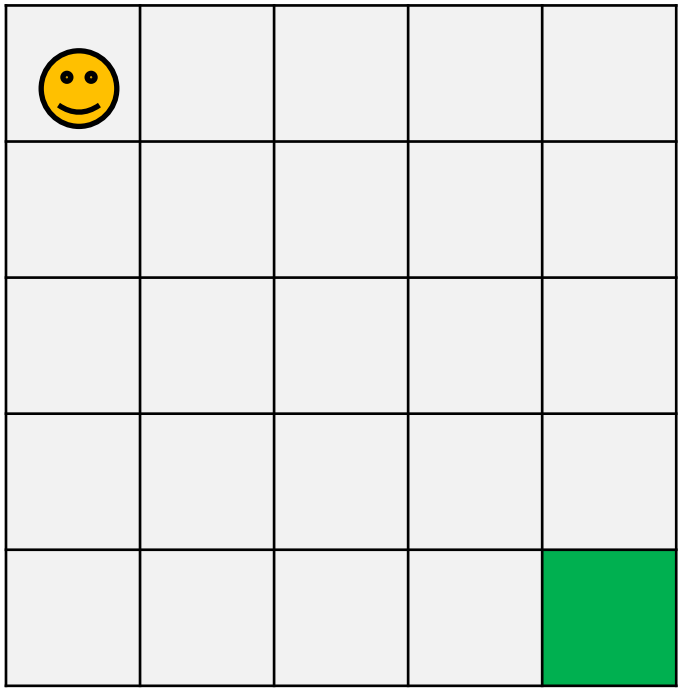
Beispiel: Gridworld

- Zustandsraum *S*
- Aktionsmenge *A*
  - *A*=(links, rechts, oben, unten)



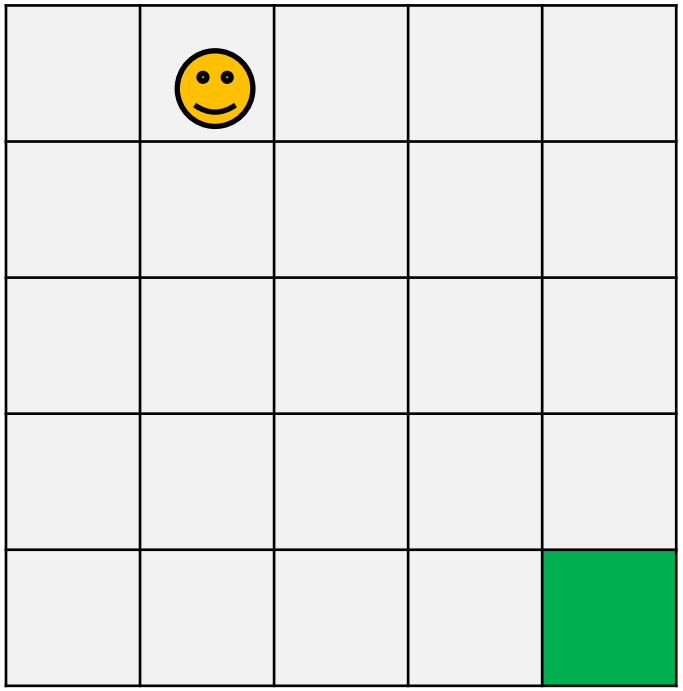
Beispiel: Gridworld

- Zustandsraum *S*
- Aktionsmenge *A*
- Übergangswahrscheinlichkeit *P*
  - *P*((1,2)|(1,1), rechts) = 1



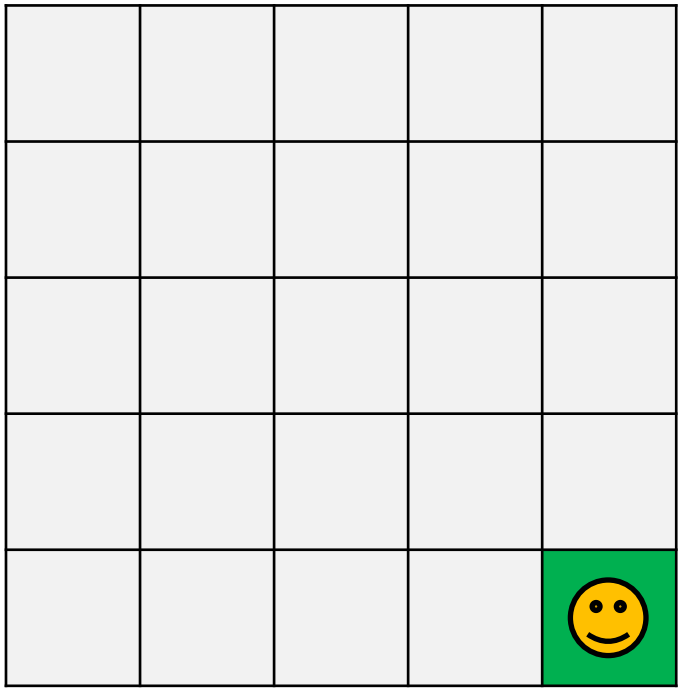
Beispiel: Gridworld

- Zustandsraum *S*
- Aktionsmenge *A*
- Übergangswahrscheinlichkeit *P*
- Erwarter Reward *R*
  - *R*((1,1),rechts) = 0



Beispiel: Gridworld

- Zustandsraum *S*
- Aktionsmenge *A*
- Übergangswahrscheinlichkeit *P*
- Erwarter Reward *R*
  - *R*((4,5),unten) = 1



Markov Decision Processes

- Markov-Entscheidungsprozess (S,A,R,P)
- S : endliche Zustandsmenge
- A : endliche Aktionsmenge
- P : Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(s'|s,a)\ \ s,s' \in S, a \in A$$

- R : Erwarteter Reward. Beschreibt den sofort erzielten Gewinn.

$$R : (S \times A) \to \mathbb{R}$$

- Discount factor $0 \leq \gamma < 1$.

MDP

- Eine deterministische stationäre Policy bildet Zustände auf Aktionen ab.

$$\pi : S \rightarrow A$$

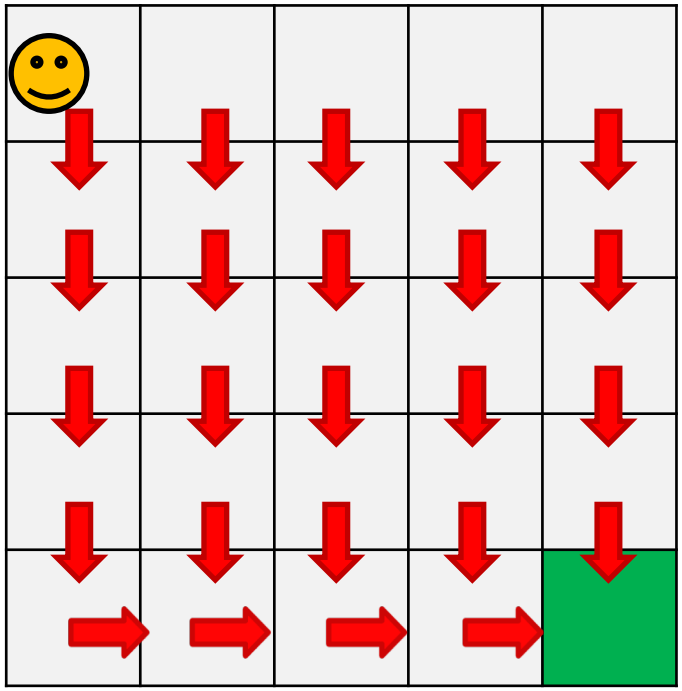
- Stochastische Policy: Funktion von Zuständen auf eine Verteilung von Aktionen.

- Ziel: Finde Policy π, die den erwarteten kumulativen (discounted) Gewinn maximieren.

$$E_{\pi,P}\left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t R(s_t, \pi(s_t))\right]$$

Beispiel: Gridworld

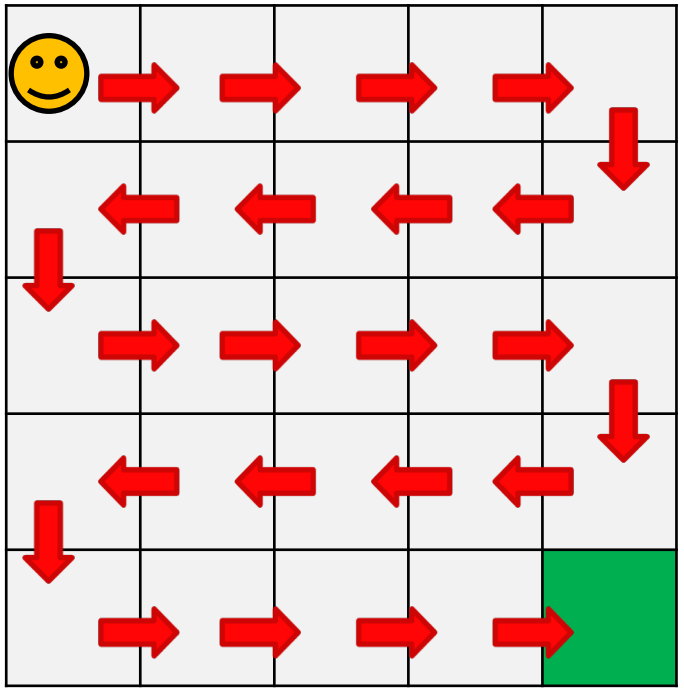
- Zustandsraum *S*
- Aktionsmenge *A*
- Übergangswahrscheinlichkeit *P*
- Erwarter Reward *R*
- Discountfaktor $\gamma = 0,9$
- Policy π
  - Gute Policy π_2 
- Erwarteter discounted Reward



$$E_{\pi,P}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\gamma^t R(s_t,\pi(s_t)) \mid s_0 = s_s\right] = 0,9^7$$

Beispiel: Gridworld

- Zustandsraum *S*
- Aktionsmenge *A*
- Übergangswahrscheinlichkeit *P*
- Erwarter Reward *R*
- Discountfaktor $\gamma = 0,9$
- Policy π
  - Schlechte Policy π_1 
- Erwarteter discounted Reward



$$E_{\pi,P}\left[\sum_{t=0}^{\infty}\gamma^t R(s_t,\pi(s_t)) \mid s_0 = s_s\right] = 0,9^{23}$$

Markov-Eigenschaft

- Markov-Eigenschaft:

$$\begin{aligned} P(s_{t+1}|s_t, a_t, s_{t-1}, a_{t-1}, \ldots, s_0, a_0) &= P(s_{t+1}|s_t, a_t) \\ R(s_t, a_t, s_{t-1}, a_{t-1}, \ldots, s_0, a_0) &= R(s_t, a_t) \end{aligned}$$

- Aus Sequenz von Beobachtungen und Aktionen wird Zustand.

- Markov-Eigenschaft in Realität selten genau erfüllt.

Value Functions – Bewertungsfunktionen

- Value function $V^{\pi}(s)$ für einen Zustand s und Policy π beschreibt den erwarteten kumulativen Gewinn der von diesem Zustand aus erreicht wird.

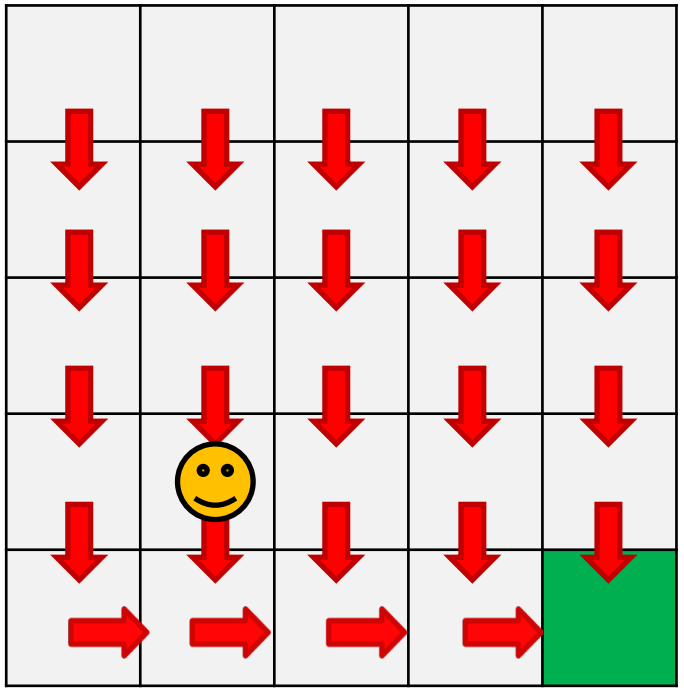
$$V^{\pi}(s_t) = E_{\pi,P}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R(s_{t+k}, \pi(s_{t+k}))\right]$$

- Bewertungsfunktion für Zustand-Aktions-Paar:

$$Q^{\pi}(s_t, a_t) = R(s_t, a_t) + E_{\pi,P}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k R(s_{t+k}, \pi(s_{t+k}))\right]$$

Beispiel: Gridworld

- Zustandsraum *S*
- Aktionsmenge *A*
- Übergangswahrscheinlichkeit *P*
- Erwarter Reward *R*
- Discountfaktor $\gamma = 0,9$
- Policy π
  - Gute Policy π_2
- Erwarteter discounted Reward



$$V^{\pi_1}(s_t) = E_{\pi,P}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k R(s_{t+k}, \pi(s_{t+k}))\right] = 0,9^3$$

Bellman-Gleichungen

- Für Bewertungsfunktionen gelten die Bellman-Gleichungen (durch Markov-Eigenschaft):

$$\begin{aligned} V^{\pi}(s_t) &= R(s_t, \pi(s_t)) + \gamma E_{\pi,P}\left[V^{\pi}(s_{t+1})\right] \\ &= R(s_t, \pi(s_t)) + \gamma \sum_{s_{t+1} \in S} P(s_{t+1}|s_t, \pi(s_t)) V^{\pi}(s_{t+1}) \end{aligned}$$

- Zustand-Aktions-Bewertungsfunktion:

$$Q^{\pi}(s_t, a_t) = R(s_t, a_t) + \gamma E_{\pi,P}\left[Q^{\pi}(s_{t+1}, \pi(s_{t+1}))\right]$$

Bellman-Operatoren

- In (linearer) Operatorschreibweise:

$$Q^\pi = T^\pi Q^\pi$$

- Mit linearem Operator T^π:

$$(T^\pi Q)(s,a) = R(s,a) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s,a) Q(s', \pi(s'))$$

➔ Q^π ist ein Fixpunkt des Bellman-Operators T^π .

- Iteration: $Q_{k+1} = T^\pi Q_k$

Bellman-Gleichungen

- Optimale Value Function:

$$Q^*(s,a) = \max_\pi Q^\pi(s,a)$$

- Optimale Policy:

$$\pi^*(s) = \arg\max_a Q^*(s,a)$$

- Rekursive Beziehung:

$$Q^*(s_t,a) = R(s_t,a) + \gamma E_P[V^*(s_{t+1})]$$
$$\text{und } V^*(s_t) = \max_a Q^*(s_t,a)$$

Bellman-Optimalitätsgleichungen

- Bellman-Gleichungen für das Kontrollproblem.

- Rekursive Beziehungen der optimalen Value Functions.

$$V^*(s_t) \quad = \quad \max_a E_{\pi,T}\Big[R(s_t,a) + \gamma V^*(s_{t+1})\Big]$$

$$Q^*(s_t,a_t) \quad = \quad R(s_t,a_t) + \gamma E_{\pi,T}\Big[\max_a Q^*(s_{t+1},a)\Big]$$

Policy Iteration

- Allgemeines Verfahren zum Bestimmen der optimalen Policy.

- Iteriere:
  - Policy Evaluation:
    - Gegeben Policy π_k, bestimme Q^{π_k}
  - Policy Improvement:
    - Inferiere verbesserte Policy π_{k+1} aus Q^{π_k}
    - z.B. greedy Policy:

$$\pi_{k+1}(s) = \arg\max_a Q^{\pi_k}(s, a)$$

Value Iteration für Policy Evaluation

- Iteratives Verfahren zur Berechnung
- von V^π

$$\begin{aligned} V_{k+1}(s_t) &= E_{\pi,P}\Big[R(s_t,\pi(s_t)) + \gamma V_k(s_{t+1}))\Big] \\ &= R(s_t,\pi(a_t)) + \gamma \sum_{s_{t+1}\in S} P(s_{t+1}|s_t,\pi(s_t))V_k(s_{t+1}) \end{aligned}$$

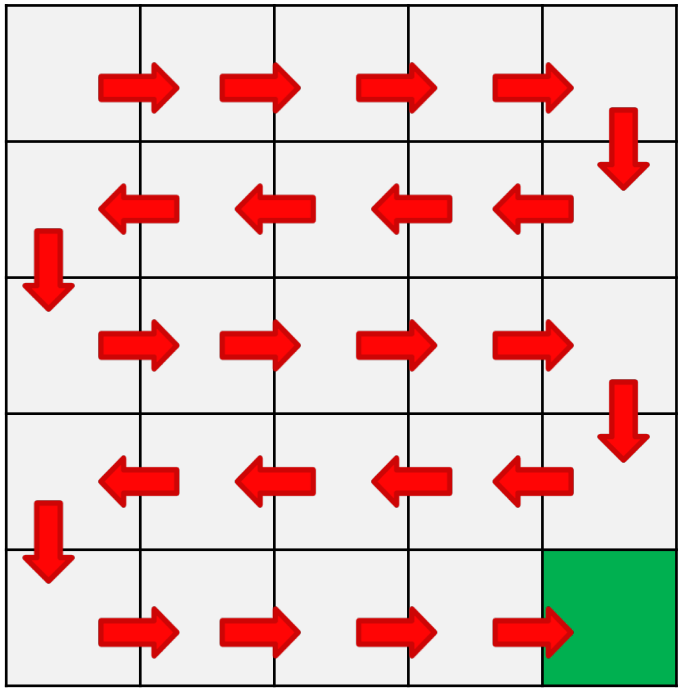
- bzw. Q^π

$$Q_{k+1}(s,a) = R(s,a) + \gamma \sum_{s'} P(s'|s,a)Q_k(s',\pi(s'))$$

- Konvergiert gegen V^π bzw. Q^π für $k\to\infty$

Beispiel: Gridworld

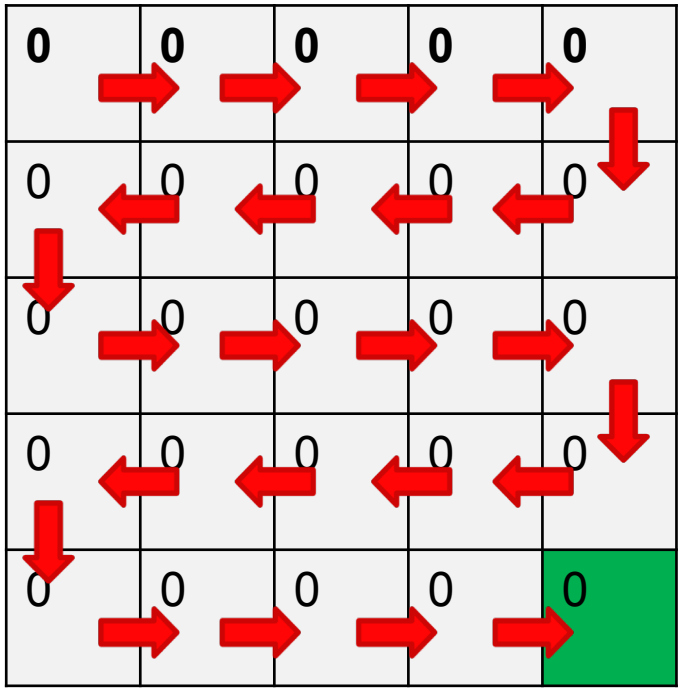
- Discountfaktor $\gamma = 0,9$
- Start Policy π_1 
- Policy Iteration:
  - Berechne V^{π_1} durch Folge von Approximationen V^k



Beispiel: Gridworld

- Discountfaktor $\gamma = 0,9$
- Start Policy π_1 
- Policy Iteration:
  - Berechne V^{π_1} durch Folge von Approximationen V^k

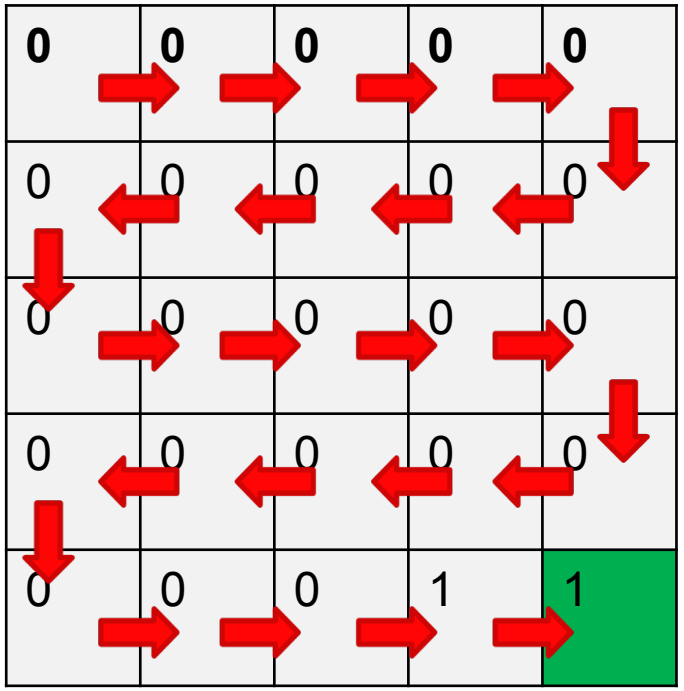
V^0



Beispiel: Gridworld

- Discountfaktor $\gamma = 0,9$
- Start Policy π_1 
- Policy Iteration:
  - Berechne V^{π_1} durch Folge von Approximationen V^k

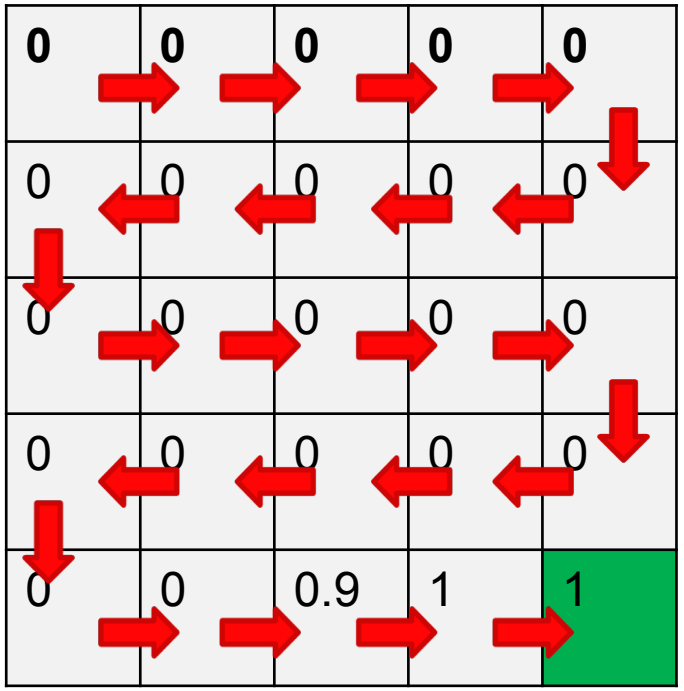
V^1



Beispiel: Gridworld

- Discountfaktor $\gamma = 0,9$
- Start Policy π_1 
- Policy Iteration:
  - Berechne V^{π_1} durch Folge von Approximationen V^k

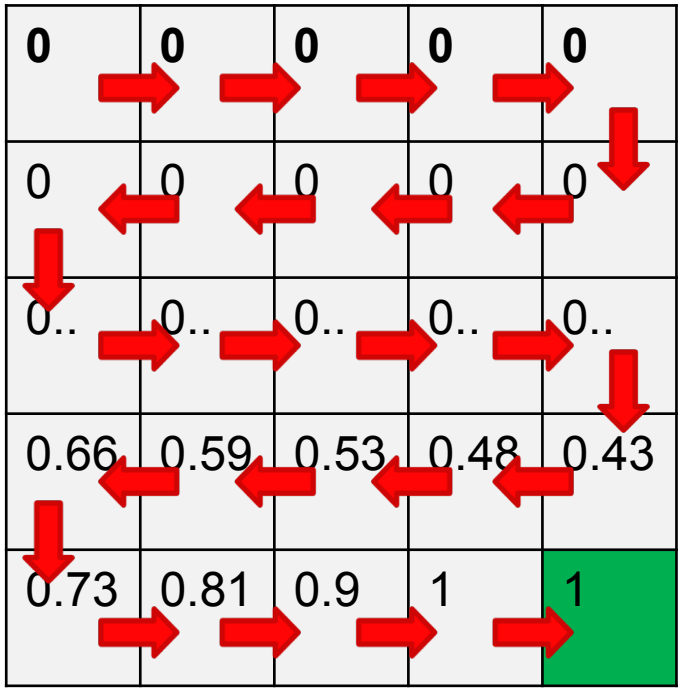
V^2



Beispiel: Gridworld

- Discountfaktor $\gamma = 0,9$
- Start Policy π_1 
- Policy Iteration:
  - Berechne V^{π_1} durch Folge von Approximationen V^k

V^n

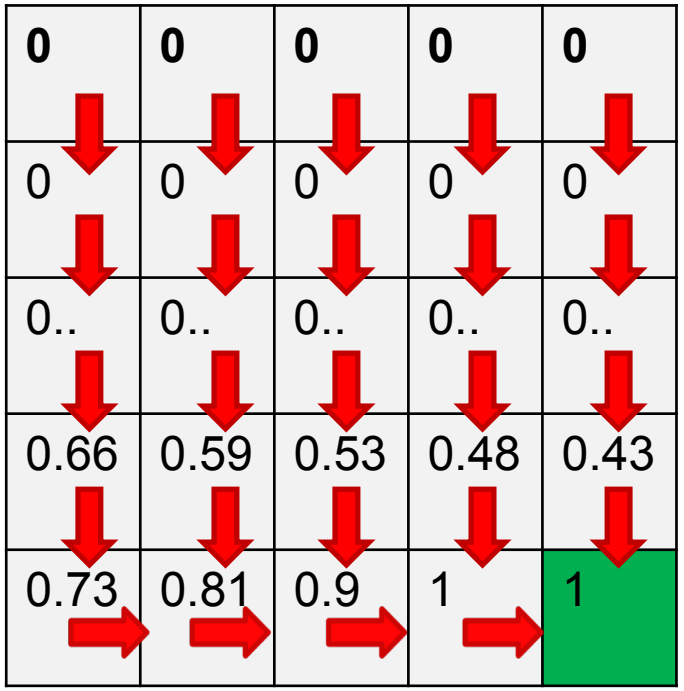


Beispiel: Gridworld

- Discountfaktor $\gamma = 0,9$
- Start Policy π_1 

- Policy Iteration:
  - Berechne V^{π_1} durch Folge von Approximationen V^k
  - Policy Improvement: Berechne greedy Policy π_2

V^{π_1}



Value Iteration

- Value Iteration für das Kontrollproblem.
- Für V^*:

$$V_{k+1}(s_t) \quad = \quad \max_a \left[R(s_t, a) + \gamma \sum_{s_{t+1}} P(s_{t+1}|s_t, a) V_k(s_{t+1}) \right]$$

- für Q^* :

$$Q_{k+1}(s, a) \quad = \quad R(s, a) + \gamma \sum_{s'} P(s'|s, a) \max_{a'} Q_k(s', a')$$

- Konvergiert gegen V^* bzw. Q^* für $k \to \infty$

TD(λ)

$$
\begin{array}{lll}
 & & R_0 \quad R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad \ldots \quad R_k \\
(1-\lambda) & \Delta_1: & R_0 + \gamma V(s_1) \\
(1-\lambda)\lambda & \Delta_2: & R_0 + \gamma R_1 + \gamma^2 V(s_2) \\
(1-\lambda)\lambda^2 & \Delta_3: & R_0 + \gamma R_1 + \gamma^2 R_2 + \gamma^3 V(s_3) \\
 & & \vdots \\
(1-\lambda)\lambda^{k-1} & \Delta_k: & R_0 + \gamma R_1 + \gamma^2 R_2 + \gamma^3 R_3 + \ldots + \gamma^k V(s_k) \\
 & & \vdots
\end{array}
$$

- Updateregel: $V(s_t) \leftarrow (1-\alpha_t)V(s_t) + \alpha_t \Delta V(s_t)$
- TD(λ) Update: $\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-\lambda)\lambda^{k-1} \Delta_k V(s_0)$
- $0 \leq \lambda \leq 1$ interpoliert zwischen 1-step und MC.

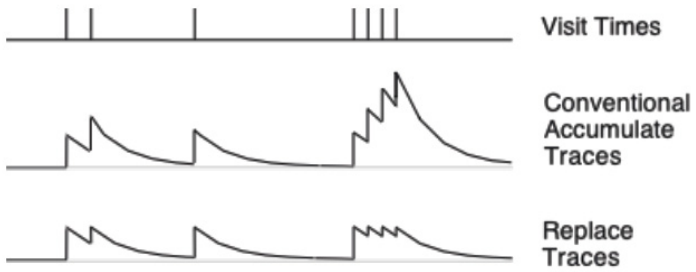
Eligibility Traces

- Algorithmische Sicht auf TD(λ)
- Einführung eines zusätzlichen Speichers $e(s)$ für jeden Zustand $s \in S$.
- Nach Beobachtung <s_t, a_t, R_t, s_{t+1}>, berechne

$$\begin{aligned} \delta_t &\leftarrow R_t + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t) \\ e(s_t) &\leftarrow e(s_t) + 1 \end{aligned}$$

- Update für alle Zustände

$$\begin{aligned} V(s) &\leftarrow V(s) + \alpha_t \delta_t e(s) \\ e(s) &\leftarrow \lambda \gamma e(s) \end{aligned}$$



Problemstellungen

- Lernen einer optimalen Policy.
  - Oder bestmögliche Approximation.

- Optimales Lernen: Möglichst wenige Fehler während des Lernen.
  - Exploration / Exploitation Problem.

Exploration / Exploitation Problem

- Tradeoff zwischen
  - Verfolgen der derzeit besten Policy, um den (greedy) Gewinn zu maximieren.
    (Exploitation)
  - und Erkunden derzeit suboptimaler Aktionen, über deren Wert noch Unsicherheit besteht, um eine potentiell bessere Policy zu finden.
    (Exploration)

Bandit Problem

- n-armed bandit Problem:
  - n Aktionen (Hebel) .
  - Jede Aktion anderen erwarteten Gewinn.
  - Erwartete Gewinne unbekannt.
  - Problem: Finde beste Aktion durch Ausprobieren, ohne dabei zuviel zu verlieren.

- Erwarteter Gewinn für Aktion a ist $Q^*(a)$.
- Schätzung des erwarteten Gewinns nach t Versuchen:

$$Q_t(a) = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_{n_a(t)}}{n_a(t)}$$

Greedy und ϵ-greedy Policies

- Greedy:

$$\pi = \arg\max_a Q_t(a)$$

- ϵ-greedy

$$\pi = \begin{cases} \arg\max_a Q_t(a) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-\epsilon \\ \text{zufällige Aktion} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \epsilon \end{cases}$$

- ϵ-greedy lässt zufällige Explorationsschritte zu.

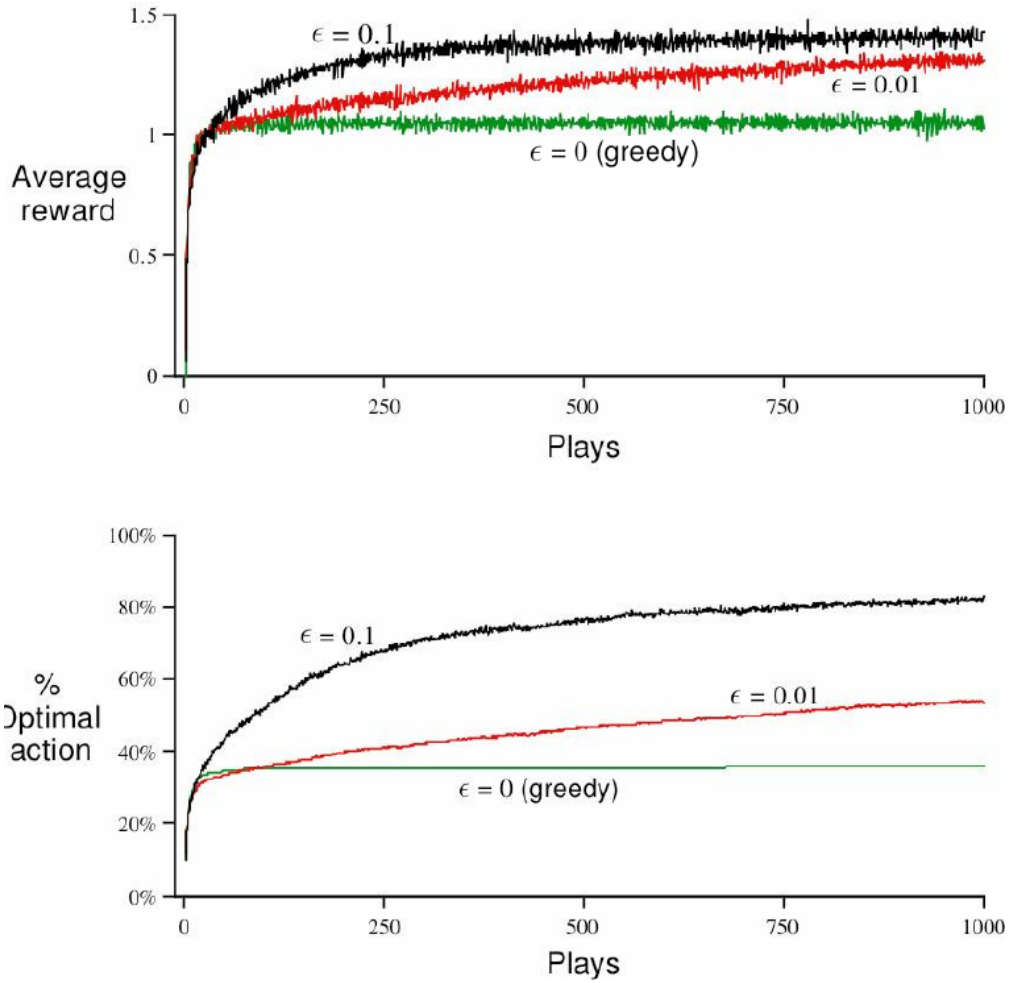
ϵ-greedy Policies

- 10-armed bandit
- 2000 Wiederholungen
- Zufälliges Ziehen von $Q^*(a)$ für alle a:

$$Q^*(a) \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- Rewards werden gezogen aus

$$R_t(a) \sim \mathcal{N}(Q^*(a), 1)$$



Stochastische Policy: Softmax

- π stochastische Policy.
- Schätzungen sollen Einfluss auf Auswahlwahrscheinlichkeit haben.
  $\rightarrow$ Softmax

- Beispiel: Gibbs-Verteilung:

$$\pi(a) = \frac{e^{Q_t(a)/\tau_t}}{\sum_{i=1}^{|A|} e^{Q_t(a_i)/\tau_t}}$$

- τ_t ist Temperaturparameter.

Optimismus bei Unsicherheit

- Ein Prinzip zur Auflösung des Exploration/Exploitation Dilemmas ist „Optimismus bei Unsicherheit“.
- Existieren auch Umgebungen, in denen Performance schlecht ist.
- Implementierbar z.B. über sehr hohe Initialisierungswerte von Q.

Optimismus bei Unsicherheit

- Upper Confidence Bound (UCB): [Auer et al. 02]
  - Angenommen, Rewards sind in [0,1].

$$\pi = \arg\max_a \left[Q_t(a) + \sqrt{\frac{c_e \log(t)}{2 n_a(t)}} \right] \quad , \; c_e \geq 2$$

- Für stationäre Umgebungen und iid Rewards sehr gute Ergebnisse.

Problemstellungen

- P,R bekannt. $P(s'|s,a)$ können abgefragt werden.
- P,R nicht explizit bekannt. Aber aus den Verteilungen $P(s'|s,a)$ kann gesamplet werden. Annahme: Generatives Modell von P und R.
- P,R nicht oder teilweise bekannt. Es kann Erfahrung gesammelt werden durch Interaktion mit der Umgebung.
  $\rightarrow$ Reinforcement Learning.
- Batch Reinforcement Learning: Es muss von einer fixen Menge von Beispielepisoden gelernt werden.

Große und unendliche Zustandsräume

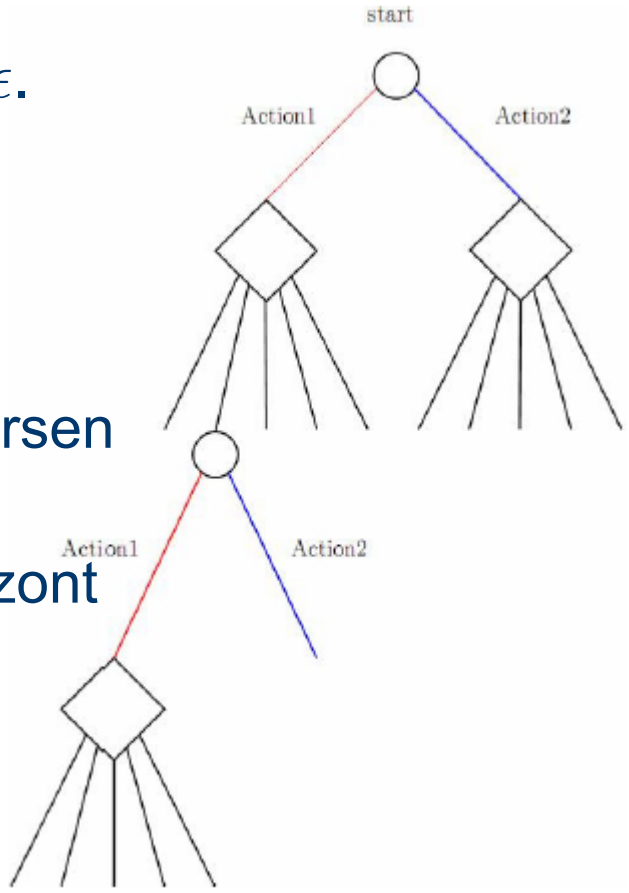
- In realistischen Anwendungen sind Zustandsräume i.A. sehr groß bzw. kontinuierlich.
- Bisherige Annahme: tabellarische Repräsentation der Value Function.

- Mögliche Lösungen:
  - Planen:
    - Monte-Carlo Sampling
    - Diskretisierung und anschließend z.B. Value Iteration
  - Approximation der Value Function durch Funktionsapproximationsmethoden.
  - Direktes Lernen der Policy.

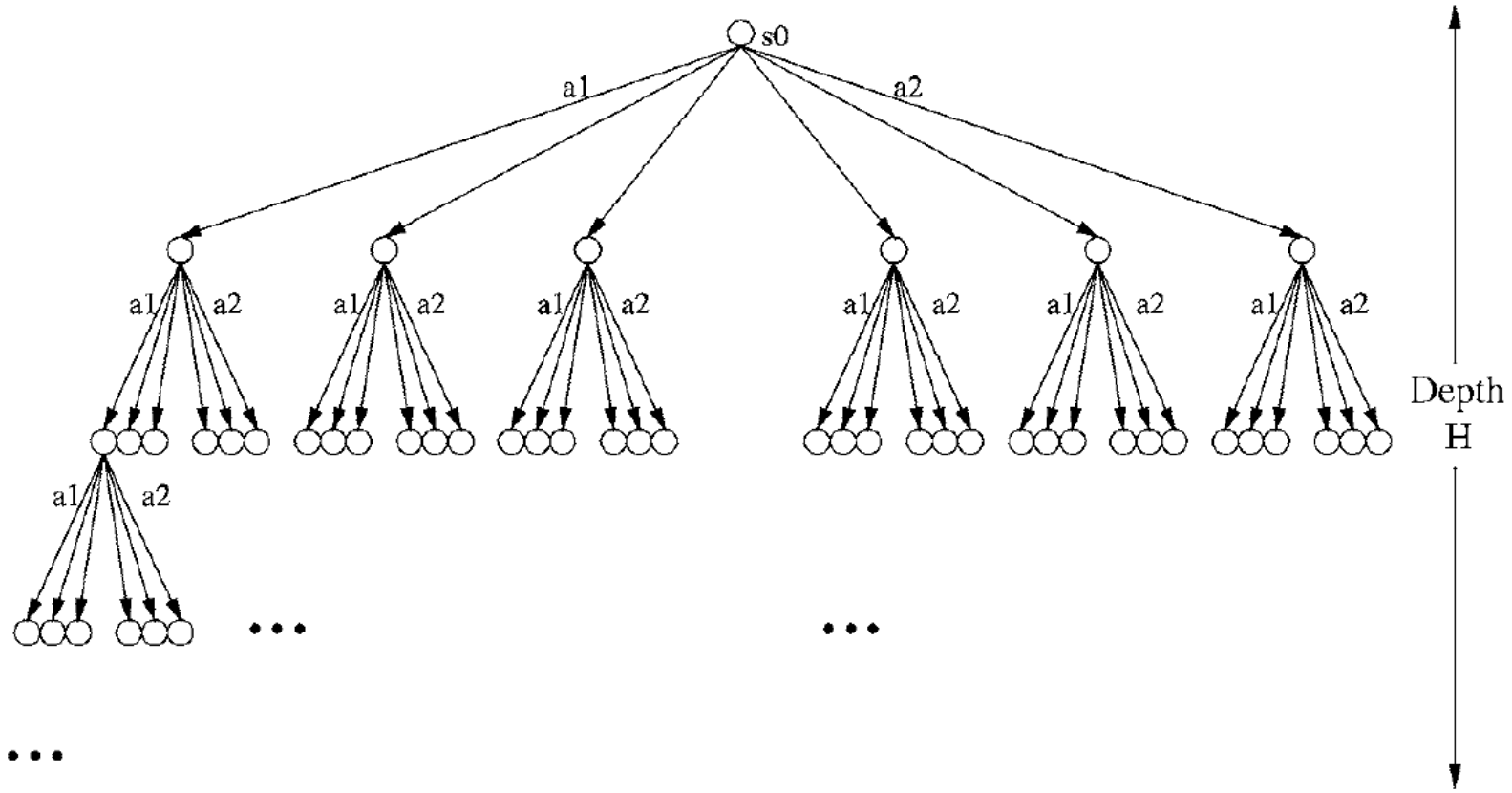
Monte-Carlo Sampling

- Angenommen, S sehr groß
- Ziel: Finde Q, so dass $||Q\text{-}Q^*||_\infty < \epsilon$.

- Sparse Lookahead Trees: [Kearns et al. 02]
  - Monte-Carlo: Samplen eines sparsen Aktions-Zustands-Baums.
  - Tiefe des Baums: Effektiver Horizont $H(\epsilon)$ = O(1/(1-γ) log(1/ϵ(1-γ)))
  - MC unabhängig von |S|
  - Aber exponentiell in $H(\epsilon)$: min. Größe des Baums $c|A|^{H(\epsilon)}$



Sparse Lookahead Trees



Upper Confidence Bounds for Trees

- Besser: Nur solche Teilbäume genauer untersuchen, die vielversprechend sind.
- Optimismus bei Unsicherheit!
  - Nutze das gleiche Prinzip wie bei Bandit Problem.
  - UCT: UCB for Trees.
    [Kocsis & Szepesvári 06]

$$\pi(s,a) = \arg\max_a \left[Q_t(s,a) + \sqrt{\frac{c_e \log(t)}{2n_{s,a}(t)}} \right] \quad , c_e \geq 2$$

UCT Performance: Go

- Sehr gute Resultate in Go.
- 9x9 & 19x19

- Computer Olympiade 2007 - 2009:
  - 2007 & 2008: 1.-3. Platz verwenden Varianten von UCT.
  - Im Allgemeinen: Monte-Carlo Search Trees (MCST).
  - 2009: Mindestens 2. und 3. verwenden Varianten von UCT.

Diskretisierung

- Kontinuierlicher Zustandsraum S.
- Random Discretization Method: [Rust 97]
  - Sampling von Zuständen S‘ nach uniformer Verteilung über den Zustandsraum.
  - Value Iteration.
- Kontinuierliche Value Iteration:

$$V_{t+1}(s) = \max_a \left[R(s,a) + \gamma \int_{s'} p(s'|s,a) V_t(s') ds' \right]$$

- Diskretisierung: Weighted Importance Sampling

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} p(s_i|s,a) V(s_i)}{\sum_{j=0}^{N} p(s_j|s,a)} \rightarrow \int_{s'} p(s'|s,a) V(s') \text{ , für N} \rightarrow \infty$$

Diskretisierung

- Berechnen der Value Function $V(s)$ für Zustände, die nicht in der Samplingmenge S‘ sind:
- Bellman-Update –Schritt

$$V^*(s) = \max_a \left[R(s,a) + \gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{p(s_i|s,a)}{\sum_{j=0}^{N} p(s_j|s,a)} V^*(s_i) \right]$$

- Garantierte Performance: [Rust97]
  Annahme: S=[0,1]^d

$$E[\|V_N(s) - V^*(s)\|_\infty^2] \leq \frac{Cd|A|^{5/4}}{(1-\gamma)^2 N^{1/4}}$$

Funktionsapproximation

- Darstellen der Value Function als parametrisierte Funktion aus dem Funktionsraum $\mathcal{F}$ mit Parametervektor θ.

$$\hat{V}(s;\theta) \qquad\qquad \hat{Q}(s,a;\theta)$$

- Vorhersageproblem: Finde Parametervektor θ, so dass V^π, bzw. Q^π am besten approximiert wird.

$$\theta^\pi = \arg\min_\theta \sum_s \mu(s) \left| V^\pi(s) - \hat{V}(s;\theta) \right|^2$$

$$\theta^\pi = \arg\min_\theta \sum_s \sum_a \mu(s) \left| Q^\pi(s,a) - \hat{Q}(s,a;\theta) \right|^2$$

Fitted Value Iteration mit Samples

- [Szepesvári & Munos 05]
- $V = 0$.
- Ziehe N Zustände s aus $\mu(s)$.
- Für jedes s und $a \in A$, Ziehe M Nachfolgezustände s' aus $P(\cdot|s,a)$ und Rewards $R(s,a)$.
- Iteriere:
  - Mit diesen Samples <s, a, R, s'> wird ein Bellman-Update-Schritt durchgeführt:

$$V_k(s) \leftarrow \max_a \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} R_i(s,a) + \gamma V(s'_i) \right]$$

  - Dann least-squares Fitting:

$$V \leftarrow \arg\min_{f \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^{N} |V_k(s_i) - f(s_i)|^2$$

Fehlerabschätzung

$$\|V^* - V^{\pi_K}\|_{p,\rho} \leq$$

$$\frac{2\gamma}{(1-\gamma)^2} \left\{ C(\mu)^{1/p} \left[d(T\mathcal{F}, \mathcal{F}) + \right.\right.$$

$$c_1 \left(\frac{\mathcal{E}}{N} \left(\log(N) + \log(K/\delta) \right) \right)^{1/2p} +$$

$$\left.\left. c_2 \left(\frac{1}{M} \left(\log(N|A|) + \log(K/\delta) \right) \right)^{1/2} \right] + \right.$$

$$\left. c_3 \gamma^K K_{\max} \right\}$$

FA für Reinforcement Learning

- Das Reinforcement Learning Problem:
  - Beispiele <s_t, a_t, R_t, s_{t+1}> aus Interaktion mit der Umgebung.
  - Annahme: Interaktion folgt der zu lernenden Policy
  - On-policy-Verteilung von Zuständen $\mu(s)$.

- Vorhersageproblem: Finde

$$\theta^{\pi} = \arg\min_{\theta} \sum_{s} \mu(s) \left| V^{\pi}(s) - \hat{V}(s;\theta) \right|^2$$

FA für Reinforcement Learning

- Online Updates: Anpassen von θ_t nach jeder Interaktion <s_t, a_t, R_t, s_{t+1}>.

$$\hat{V}(\cdot;\theta_t) \rightarrow V^\pi \text{ , für } t \rightarrow \infty$$

- Gradientenabstieg:

$$\begin{aligned} \theta_{t+1} &= \theta_t - \frac{1}{2}\alpha_t \nabla_\theta \left[V^\pi(s_t) - \hat{V}(s_t;\theta)\right]^2 \\ &= \theta_t + \alpha_t \left[V^\pi(s_t) - \hat{V}(s_t;\theta)\right] \nabla_\theta \hat{V}(s_t;\theta_t) \end{aligned}$$

FA für Reinforcement Learning

- Value Function V^{π} unbekannt. Ersetze mit Schätzung.
  - Monte-Carlo: Erwartungstreue Schätzung von V^{π}.
    - ➔ Konvergenz zu lokalem Optimum.
      (Unter Bedingungen für α_t)
  - Temporal Difference (TD(0)): Gebiaste Schätzung.
    - ➔ keine Konvergenz zu lokalem Optimum beweisbar.
- Spezialfall: lineare Methoden.

$$\hat{V}(s;\theta_t) = \phi(s)^T \theta_t$$

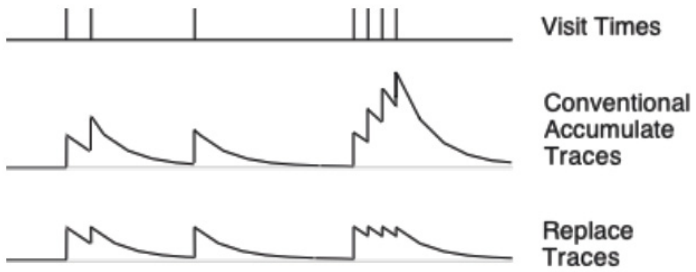
Eligibility Traces

- Algorithmische Sicht auf TD(λ)
- Einführung eines zusätzlichen Speichers $e(s)$ für jeden Zustand $s \in S$.
- Nach Beobachtung <s_t, a_t, R_t, s_{t+1}>, berechne

$$\begin{aligned} \delta_t &\leftarrow R_t + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t) \\ e(s_t) &\leftarrow e(s_t) + 1 \end{aligned}$$

- Update für alle Zustände

$$\begin{aligned} V(s) &\leftarrow V(s) + \alpha_t \delta_t e(s) \\ e(s) &\leftarrow \lambda \gamma e(s) \end{aligned}$$



FA für Reinforcement Learning

- TD(λ)
  - Eligibility traces:

$$\begin{aligned} \delta_t &\leftarrow R_t + \gamma V(s_{t+1}) - V(s_t) \\ e_t &\leftarrow \gamma\lambda e_{t-1} + \nabla_\theta V(s_t) \\ \theta_{t+1} &\leftarrow \alpha_t \delta_t e_t \end{aligned}$$

  - Lineare Methode: Konvergenzgarantie nur für on-policy.
  - Fehlerabschätzung:

$$\lim_{t\to\infty} \sum_s \mu(s) |V^\pi(s) - \hat{V}(s;\theta_t)|^2$$

$$\leq \frac{1-\gamma\lambda}{1-\gamma} \sum_s \mu(s) |V^\pi(s) - \hat{V}(s;\theta^*)|^2$$

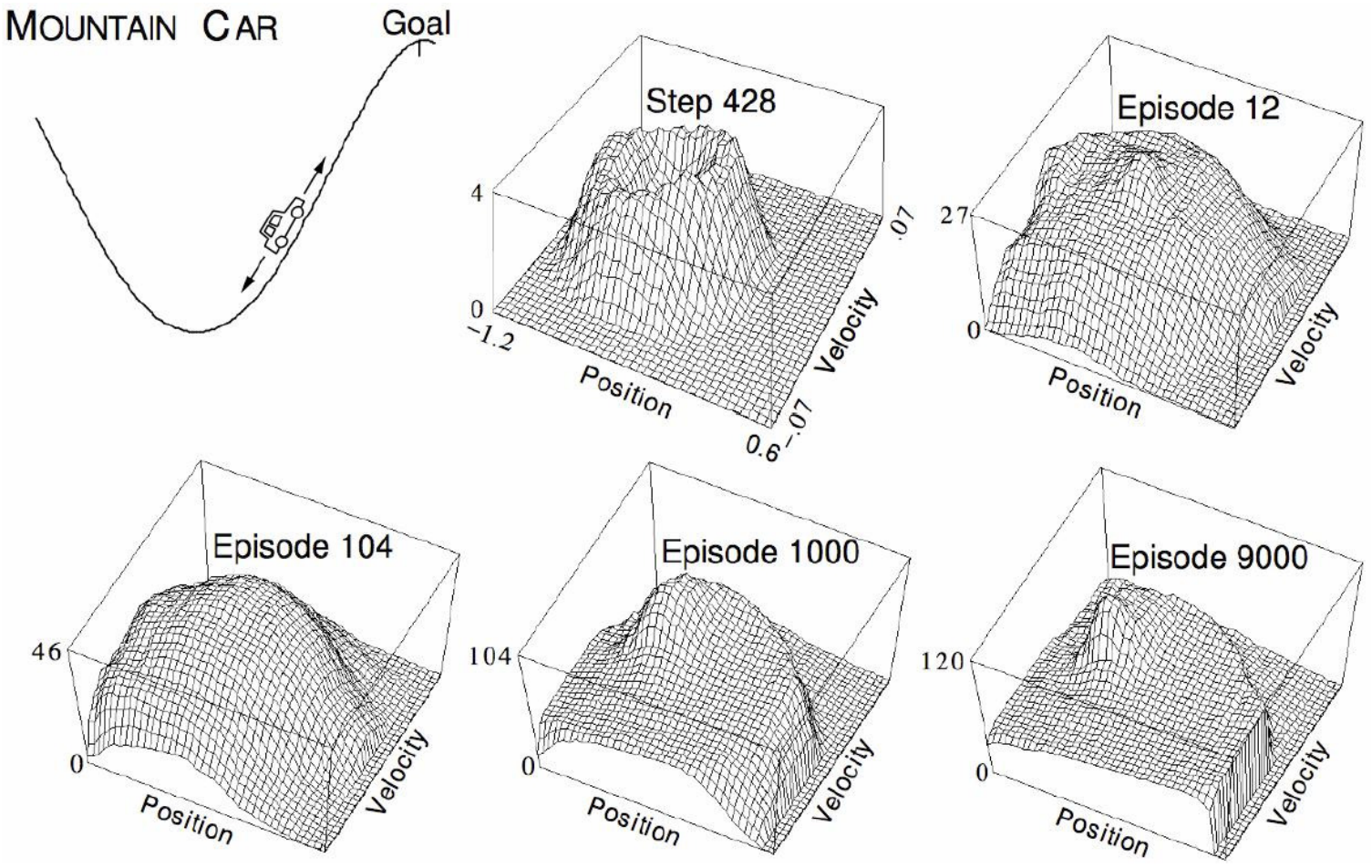
SARSA(λ)

- Kontrollproblem: SARSA(λ) (On-Policy)

$$\begin{aligned} \delta_t &\leftarrow R(s_t, a_t) + \gamma Q(s_{t+1}, a_{t+1}) - Q(s_t, a_t) \\ e_t &\leftarrow \gamma\lambda e_{t-1} + \nabla_\theta Q(s_t, a_t) \\ \theta_{t+1} &\leftarrow \alpha_t \delta_t e_t \end{aligned}$$

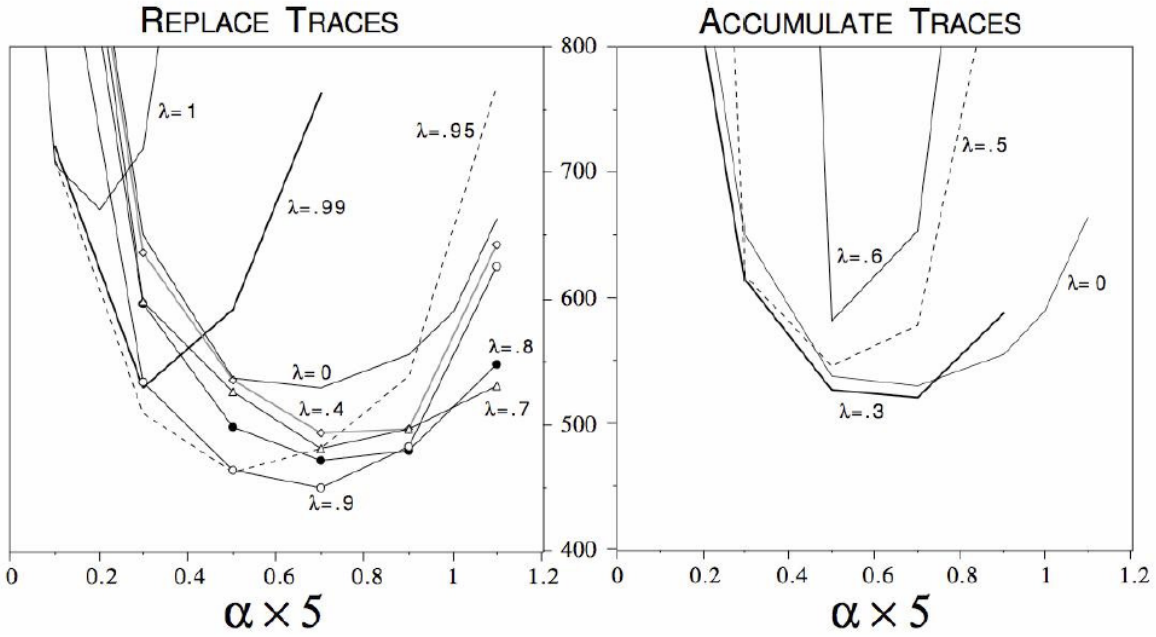
- Off-policy kann divergieren.

SARSA(λ)



SARSA(λ)

Steps per episode
averaged over
first 20 trials
and 30 runs



Approximate Policy Iteration

- Im Folgenden: lineares Modell.

$$\hat{Q}(\phi(s,a);\theta) = \phi(s,a)^T\theta$$

- Approximate Policy Evaluation:
  - Lernen der optimalen state-action value function $\hat{Q}^\pi$ von
    - Interaktion
    - fester Trainingsmenge

- Policy Improvement

Approximate Policy Iteration

- Falls Samples von $Q^{\pi}(s,a)$ bekannt, lerne Q^{π} vom Trainingssample mit Hilfe einer überwachten Regressionsmethode.

- Problem: Oft off-policy, d.h. Trainingsbeispiele werden beobachtet während einer Verhaltenspolicy gefolgt wird.
  - Sample Selection Bias (Unterschiedliche Training- und Testverteilungen)

Bellman-Residuen-Minimierung

- Temporal Difference Methode.
- Bellman-Gleichung als Fixpunkt-Gleichung.

$$Q^\pi - T^\pi Q^\pi = 0$$

- Linke Seite als Fehler interpretieren: Bellman Residuum. μ stationäre Verteilung von Zuständen.

$$L_{BRM}(Q;\pi) = \|Q - T^\pi Q\|_\mu^2$$

- Empirisch:

$$\hat{L}_{BRM}(Q;\pi,n) = \frac{1}{n|A|}\sum_{t=1}^{n}\Big[Q(s_t,a_t) - \big(R(s_t,a_t) + \gamma Q(s_{t+1},\pi(s_{t+1}))\big)\Big]^2$$

Bellman-Residuen-Minimierung

- Problem: Schätzer $\hat{L}_{BRM}$ nicht erwartungstreu.

$$E[\hat{L}_{BRM}(Q;\pi,n)] \neq L_{BRM}(Q;\pi)$$

- Denn

$$L_{BRM}(Q;\pi) = E_{s\sim\mu,a}\left[\left(Q(s,a) - T^{\pi}Q(s,a)\right)^2\right]$$

$$(T^{\pi}Q)(s,a) = E_{s'\sim P}\left[R(s,a) + \gamma Q(s',\pi(s'))\right]$$

- Es folgt:

$$L_{BRM}(Q;\pi)$$

$$= \quad E_{s\sim\mu,a}\left[\left(Q(s,a) - E_{s'\sim P}\left[R(s,a) + \gamma Q(s',\pi(s'))\right]\right)^2\right]$$

Bellman-Residuen-Minimierung

- Aber für $E[\hat{L}(Q;\pi)] = \hat{L}(Q;\pi,n)$, für $n \to \infty$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& E_{s\sim\mu,a,s'\sim P}\left[\hat{L}_{BRM}(Q;\pi)\right] \\
&= E_{s\sim\mu,a,s'\sim P}\left[\left(Q(s,a) - R(s,a) + \gamma Q(s',\pi(s'))\right)^2\right] \\
&= E_{s\sim\mu,a}\left[E_{s'\sim P}\left[\left(Q(s,a) - R(s,a) + \gamma Q(s',\pi(s'))\right)^2\right]\right]
\end{aligned}
$$

- Es gilt aber für Erwartungswerte über Zufallsvariablen X:

$$E[X^2] = E[X]^2 + \mathrm{Var}[X]$$

Bellman-Residuen-Minimierung

- Anwendung auf inneren Erwartungswert:

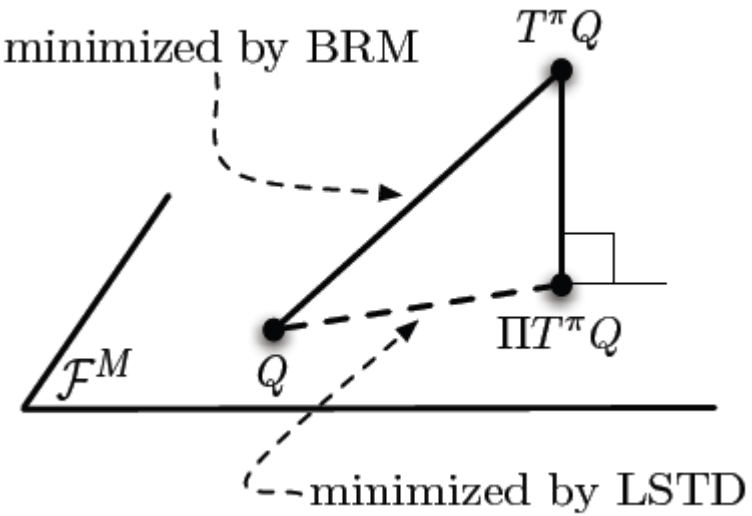
$$
\begin{aligned}
& E_{s'}\left[\Big(Q(s,a) - \big(R(s,a) + \gamma Q(s', \pi(s'))\big)\Big)^2\right] \\
&\quad = \quad E_{s'}\Big[Q(s,a) - \big(R(s,a) + \gamma Q(s', \pi(s'))\big)\Big]^2 \\
&\qquad\quad + \mathrm{Var}_{s'}\Big[Q(s,a) - \big(R(s,a) + \gamma Q(s', \pi(s'))\big)\Big] \\
&\quad = \quad \Big(Q(s,a) - (T^\pi Q)(s,a)\Big)^2 \\
&\qquad\quad + \mathrm{Var}_{s'}\Big[R(s,a) + \gamma Q(s', \pi(s'))\Big]
\end{aligned}
$$

- Der Varianzterm wirkt ähnlich wie ein Regularisierer $\rightarrow$ Bias.

BRM

- Vorschlag: [Antos et. al. 07]
  Erwartungstreue durch Einführung einer Hilfsfunktion $h \in \mathcal{F}$.

$$L_{BRM}(Q, h; \pi) = \|Q - T^\pi Q\|_\mu^2 - \|h - T^\pi Q\|_\mu^2$$



Least-Squares Temporal Difference

- Q ist aus Funktionsraum $\mathcal{F}$.
- $T^\pi Q$ aber nicht notwendigerweise.
- LSTD minimiert den quadratischen Abstand zwischen Q und der Projektion von $T^\pi Q$ auf $\mathcal{F}$.

$$L_{LSTD}(Q;\pi) = \|Q - \Pi T^\pi Q\|_\mu^2$$

$$\Pi f = \arg\min_{h \in \mathcal{F}} \|h - f\|_\mu$$

- Unbiased.
- LSTD oft bessere Ergebnisse.

Batch Reinforcement Learning

- Episode gesamplet nach π_b
- Zum Trainingszeitpunkt nur Zugang zu dieser einen Episode.

$$\hat{L}_{BRM}(Q;\pi,n)$$
$$= \frac{1}{n|A|}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{\pi_b(a_t|s_t)}\Big[Q(s_t,a_t)-\big(R(s_t,a_t)+\gamma Q(s_{t+1},\pi(s_{t+1}))\big)\Big]^2$$

Literatur

- [Auer et al. 02]: P.Auer, N.Cesa-Bianchi and P.Fischer: Finite time analysis of the multiarmed bandit problem. Machine Learning 47, 2002.
- [Kearns et al. 02]: M.J. Kearns, Y. Mansour, A.Y. Ng: A sparse sampling algorithm for near-optimal planning in large Markov decision processes. Machine Learning 49: 2002.
- [Kocsis & Szepesvári 06]: L. Kocsis and Cs. Szepesvári: Bandit based Monte-Carlo planning. ECML, 2006.
- [Rust 97]: J. Rust, 1997, Using randomization to break the curse of dimensionality, Econometrica, 65:487—516, 1997.
- [Szepesvári & Munos 05]: Cs. Szepesvári and R. Munos: Finite time bounds for sampling based fitted value iteration, ICML, 2005.
- [Antos et. al. 07]: A. Antos, Cs. Szepesvari and R. Munos: Learning near-optimal policies with Bellman-residual minimization based fitted policy iteration and a single sample path, Machine Learning Journal, 2007