

Maschinelles Lernen II

3. Übung

Prof. Tobias Scheffer
Dr. Niels Landwehr
Christoph Sawade

Sommer 2011

Ausgabe am: 12.05.11
Besprechung am: 19.05.11

Aufgabe 1

Graphische Modelle

Wir betrachten die folgende Domäne, die das Starten eines Automotors beschreibt. Wir versuchen, den Motor unseres Autos zu starten. Dieser startet ($Motor = 1$) oder nicht ($Motor = 0$). Es kann verschiedene Ursachen dafür geben, dass der Motor nicht startet: der Tank kann leer sein ($Tank = 0$), oder der Starter des Motors rotiert nicht ($Starter = 0$). Der Starter benötigt eine intakte Batterie ($Batterie = 1$) und er darf nicht defekt sein ($StarterDefekt = 0$). Den Zustand des Tanks können wir indirekt über die elektrische Tankanzeige beobachten, diese zeigt einen vollen Tank ($Anzeige = 1$), falls der Tank voll ist und die Batterie genügend Strom für die elektrische Anzeige liefert; sonst zeigt sie einen leeren Tank ($Anzeige = 0$).

1. Geben Sie ein gerichtetes graphisches Modell (Bayessches Netz) über die binären Zufallsvariablen $Batterie$, $StarterDefekt$, $Starter$, $Tank$, $Anzeige$, und $Motor$ an. Geben Sie dazu die Graphstruktur G und die entsprechenden (bedingten) Verteilungen in Tabellenform an. Setzen Sie realistische numerische Wahrscheinlichkeiten ein (Hinweis: diese sind praktisch nie genau 0 oder 1).
2. Prüfen Sie anhand des D-separation Kriteriums, ob die folgenden Unabhängigkeiten in der durch das Netz repräsentierten Verteilung gelten:
 - $StarterDefekt \perp Motor \mid Batterie$
 - $Batterie \perp Tank \mid \emptyset$
 - $Batterie \perp Motor \mid Starter$
 - $Tank \perp StarterDefekt \mid Motor$

Argumentieren Sie zusätzlich für jede der Unabhängigkeiten, warum sie gilt/nicht gilt.

3. Wir beobachten, dass die Tankanzeige einen leeren Tank anzeigt ($Anzeige = 0$). Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Tank wirklich leer ist ($Tank = 0$)?

Aufgabe 2*Naive Bayes als Graphisches Modell*

In der Vorlesung *Maschinelles Lernen I* wurde der Naive Bayes Klassifikator vorgestellt. Zur Erinnerung: naive Bayes ist ein generatives Modell, und modelliert $p(\mathbf{x}, y)$ durch

$$p(\mathbf{x}, y) = p(y) \prod_{i=1}^n p(x_i | y)$$

wobei

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

der Merkmalsvektor ist.

1. Geben Sie naive Bayes als graphisches Modell über den Zufallsvariablen y, x_1, \dots, x_n an (nur die Graphstruktur, keine numerischen Wahrscheinlichkeiten).
2. Betrachten Sie das alternative graphische Modell, das entsteht, in dem wir im naive Bayes Modell alle Kanten umdrehen. Handelt es sich immer noch um ein valides graphisches Modell? Welche Vorteile/Nachteile hat es im Vergleich zum ursprünglichen naive Bayes Modell?

Aufgabe 3*Azyklische Graphen*

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Graphentheorie:

Ein Graph G ist azyklisch genau dann wenn es eine Ordnung \leq_G auf den Knoten von G gibt, so dass für alle $X, X' \in G$ gilt: $X \rightarrow X' \implies X \leq_G X'$.

Hierbei bezeichnet $X \rightarrow X'$, dass es eine gerichtete Kante von Knoten X zu Knoten X' gibt.