Maschinelles Lernen II

8. Übung

Prof. Tobias Scheffer
Dr. Niels Landwehr
Matthias Bussas

Sommer 2014

Ausgabe am: 04.06.14
Besprechung am: 10.06.14

Aufgabe 1 *Eigenvektoren symmetrischer Matrizen*

In der Vorlesung wurde bei der Anwendung des PCA- bzw. des Kernel-PCA-Algorithmus eine Eigenwertzerlegung der Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma}$ bzw. der Kernelmatrix $\mathbf{K}$ benötigt. Bei diesen beiden Matrizen $\mathbf{\Sigma}$ und $\mathbf{K}$ handelt es sich um symmetrische Matrizen und wir wollen nun Eigenschaften der Eigenvektoren dieser Matrizen untersuchen.
Sei dazu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige symmetrische Matrix. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es seien $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2. Gilt nun $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so sind die Vektoren $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ zueinander senkrecht, d.h. $\mathbf{u}_1^\mathsf{T}\mathbf{u}_2 = 0$.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$, dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$. Hinweis: Komplexe Konjugation.

Aufgabe 2 *PCA*

Das Ergebnis der Hauptkomponentenanalyse auf einer Datenmatrix $X \in \mathbb{R}^{10000\times 5}$ ergab die folgenden Hauptkomponenten:

$$U = \begin{pmatrix} - & u_1 & - \\ - & u_2 & - \\ - & u_3 & - \\ - & u_4 & - \\ - & u_5 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}98 & -0{,}15 & -0{,}13 & -0{,}03 & 0{,}00 \\ 0{,}10 & -0{,}20 & 0{,}97 & -0{,}03 & -0{,}01 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}01 & 0{,}01 & 1{,}00 \\ -0{,}02 & -0{,}30 & -0{,}03 & 0{,}95 & -0{,}01 \\ -0{,}18 & -0{,}92 & -0{,}18 & -0{,}30 & 0{,}00 \end{pmatrix}$$

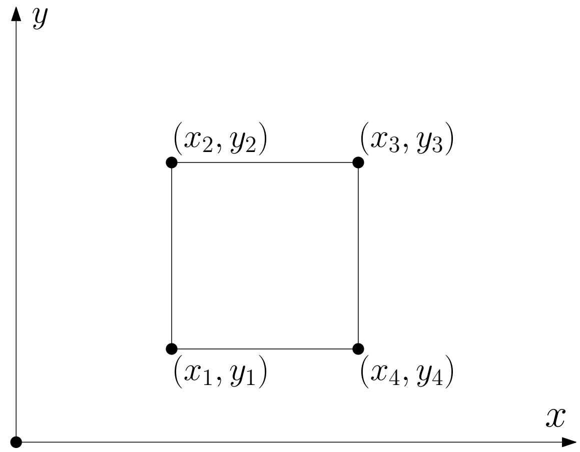
mit $(\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4; \lambda_5) = (0,03; 0,28; 1,01; 1,64; 30,12)$. Bestimmen Sie für das Beispiel

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0{,}54 \\ -0{,}84 \\ 0{,}82 \\ 1{,}71 \\ -0{,}28 \end{pmatrix}$$

den Fehler, der durch die Reduktion auf die ersten $d = 1, \ldots, 5$ Hauptkomponenten verursacht wird. Prüfen Sie die Nebenbedingung $U^T U = I$.

Aufgabe 3 *Experiment zu PCA*

Führen Sie in einer Programmiersprache ihrer Wahl das folgende Experiment durch:



Wir betrachten die folgenden 8-dimensionalen Datenpunkte $\mathbf{x}$, die die Eckpunkte von Vierecken im Uhrzeigersinn beschreiben. In obigem Bild gilt für den Datenpunkt $\mathbf{x}$ zum Beispiel $\mathbf{x} = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)^\intercal$. Generieren Sie sich nun eine Datenmatrix $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{100\times 8}$, indem Sie mit dem Quadrat $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0)^\intercal$ beginnen und dieses 100 mal zufällig

a) entlang der x-Achse verschieben.

b) entlang der x- und der y-Achse verschieben.

c) um den Ursprung des Koordinatensystems drehen und anschließend entlang der x-Achse verschieben.
Hinweis: Multiplikation aller Eckpunkte mit der Matrix $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ entspricht einer Drehung um den Ursprung mit dem Winkel θ.

Berechnen Sie nun in jedem der Fälle mit Hilfe der PCA, wie viele Dimensionen der kleinste lineare Unterraum des $\mathbb{R}^8$ hat, der alle Datenpunkte aus $\mathbf{X}$ enthält. Berechnen Sie auch in jedem Fall zu welchem Fehler die Reduktion auf die ersten $1, 2, 3$ oder 4 Hauptkomponenten führt.