Maschinelles Lernen

5. Übung

Prof. Tobias Scheffer
Dr. Niels Landwehr
Christoph Sawade
Jules Rasetaharison

WS10/11

Ausgabe am: 22.11.10
Besprechung am: 29.11.10

Aufgabe 1 (1/3 Punkt):
Betrachten wir die Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

$$\mathcal{N}(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right).$$

Zeigen sie, dass die zugehörige konjugierte Verteilung bezogen auf den Mittelwert bei fester Varianz σ^2 wieder eine Normalverteilung ist. Begründen sie warum in diesem Fall Likelihood-Verteilung und konjugierte Verteilung aus der gleichen Verteilungsfamilie stammen. Könnte es am Normalisierungsterm $\sqrt{2\pi\sigma^2}$ liegen?

Aufgabe 2 (1/3 Punkt):
Sie veranstalten ein Party und haben spezielle hochempfindliche bunte Glühlampen zur Dekoration gekauft. Die Lebensdauer dieser Sorte Glühlampen ist normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 12$ Stunden und der Varianz $\sigma^2 = 9$ Stunden. Zur Einstimmung schalten sie die Glühlampen schon vor der Party ein, die Party beginnt in 10 Stunden.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Glühlampe schon vor der Party ihren Geist aufgibt?

2. Sie möchte am liebsten, dass in der 7. Stunde der Party die Glühlampen von selbst nicht mehr leuchten, damit die Gäste nach Hause gehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Glühlampe genau in dieser Stunde aufhört zu leuchten? Bedenken sie, dass die Glühlampen schon vor der Party 10 Stunden leuchten.

Aufgabe 3 (1/5 Punkt):
Wir betrachten ein Experiment mit verschiedenen Ausgängen $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sei N_i die Anzahl der beobachteten Experimente mit Ergebnis i. Die Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung $N_1, \ldots, N_k$ ist gegeben durch die Multinomialverteilung

$$Mult(N_1, N_2, \ldots, N_k|\mathbf{\Theta}) = \binom{N_1 + N_2 + \ldots N_k}{N_1 N_2 \ldots N_k} \prod_{i=1}^{k} \Theta_k^{N_k},$$

wobei $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ die Auftretenswahrscheinlichkeit der einzelne Ausgänge sind. Wir betrachten die Dirichlet-Verteilung, gegeben durch

$$Dir(\mathbf{\Theta}|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_k)} \prod_{i=1}^{k} \Theta_k^{\alpha_k - 1}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Verteilung die konjugierte Prior Verteilung zur multinomialverteilten Likelihood ist.

b) Worin besteht der Unterschied zwischen ML und MAP Schätzung?

c) Welche Interpretation haben die Parameter der Dirichlet-Verteilung in diesem Zusammenhang?