INTELLIGENTE DATENANALYSE IN MATLAB

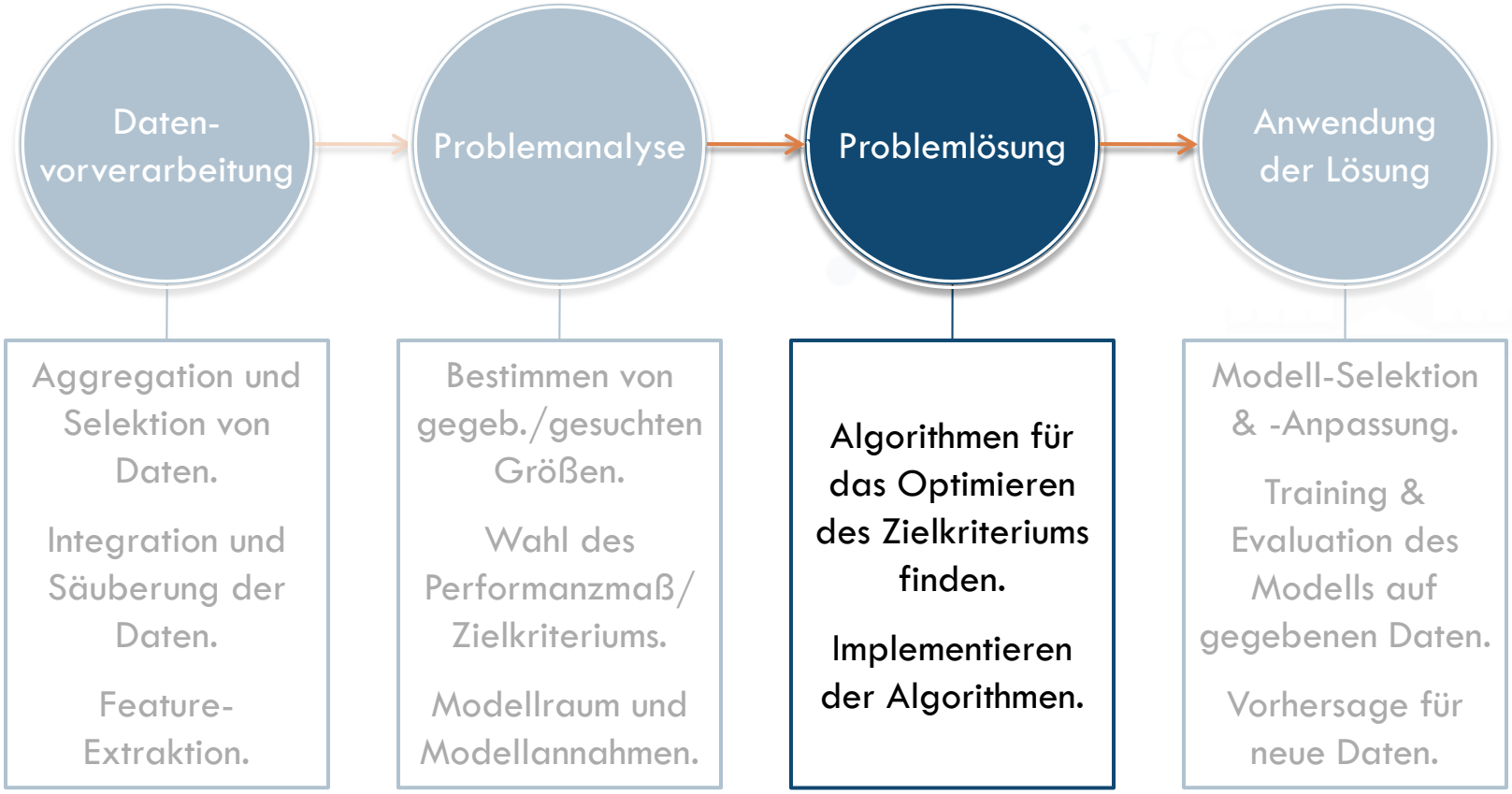
Lernen von Rankings

Literatur

- Chris Burges: Learning to Rank for Web Search.
  http://research.microsoft.com/en-us/um/beijing/events/lr4ir-2007
- Markus Weimer et al.: CoFiRank.
  http://www.cofirank.org
- Yisong Yue: Learning to Rank.
  http://www.yisongyue.com/research.php
- Lesley A. Ward et al.: Authority Rankings from HITS, PageRank, and SALSA.
  http://www.math.hmc.edu/~ward/paperpdfs/hitsheaderbw6Jan05.pdf

Überblick

- Schritte der Datenanalyse:



Lernen von Rankings

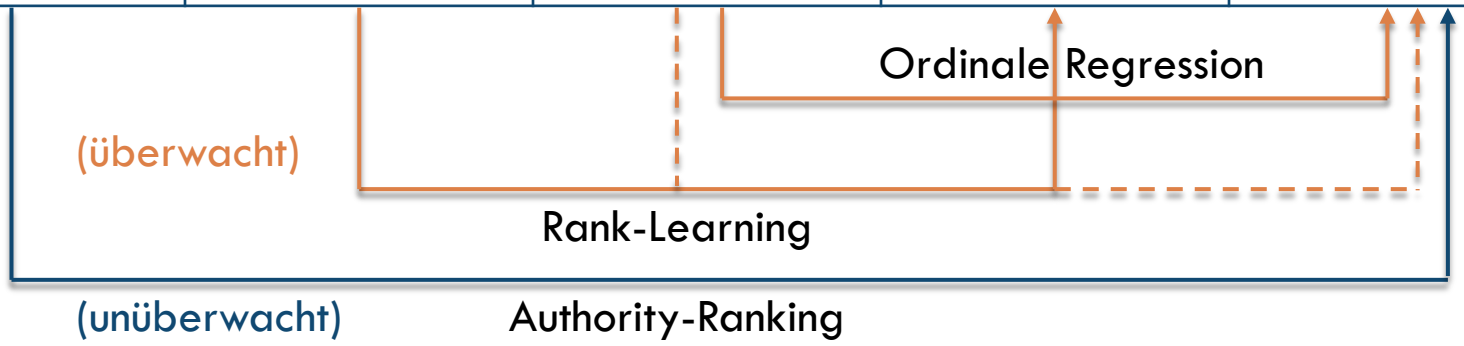
Problemstellungen

- Gegeben: Trainingsdaten mit (un-)bekannter Sortierung, paarweisen Ordnung oder Relevanz.
- Eingabe: Menge von Instanzen.
- Ausgabe: Sortierung der Instanzen.
  - Ordinale Regression: Sortierung der Trainingsdaten bekannt.
  - Rank-Learning: (lokale/paarweise) Sortierung Trainingsdaten bekannt.
  - Authority-Ranking: Lokale „Kompetenz“-Bewertung bekannt, z.B. durch Verlinkungsstruktur der Instanzen.

Lernen von Rankings

Problemstellungen

Instanz	Echte Belegung		Vorhergesagte Belegung	
	Ranking Score s (inverse Relevanz)	Position (Rank y)	Ranking Score s'	Position (Rank y')
$\mathbf{x}_1$	$s_1 \in \mathbb{R}_0^+$	$y_1 \in \{1...n\}$	$s'_1 \in \mathbb{R}$	$y'_1 \in \{1...n\}$
$\mathbf{x}_2$	$s_2 \in \mathbb{R}_0^+$	$y_2 \in \{1...n\}$	$s'_2 \in \mathbb{R}$	$y'_2 \in \{1...n\}$
...	...	...	...	...
$\mathbf{x}_n$	$s_n \in \mathbb{R}_0^+$	$y_n \in \{1...n\}$	$s'_n \in \mathbb{R}$	$y'_n \in \{1...n\}$



Lernen von Rankings

Problemstellungen

- Ordinale Regression.
  - Modellierung als Multiklassen-Problem.
  - Modellierung als numerisches Regressions-Problem.
  - Optimierung eines Multivariaten Performanzmaßes.
- Rank-Learning.
  - Optimierung eines Ranking-Kriteriums bzgl. Instanzpaaren oder bzgl. eines globalen Rankings.
- Authority-Ranking.
  - Aus lokalen Kompetenz-Bewertungen zwischen den Instanzen globale Kompetenz-Bewertung lernen.

Rank-Learning

Motivation

- Beispiele:
  - Sortieren von Dokumenten.
  - Ranking von neuen Produkten.

Reifenmodell	Preis in EUR	Bremsweg (trocken)	Bremsweg (nass)	Geräusch	Platzierung
Fulda Carat Progresso	44 bis 70	2,0	1,8	3,0	1
Continental PC 2	59 bis 77	1,3	2,0	3,5	2
Bridgestone Turanza	51 bis 75	1,3	2,2	2,9	3
Uniroyal Rain Expert	52 bis 75	1,9	1,9	3,7	4
Semperit Comfort Life	46 bis 66	2,2	2,3	3,3	5
Firestone TZ300 a	48 bis 65	1,8	2,3	3,3	6
Dunlop SP Sport	51 bis 77	1,4	2,8	3,1	7
Vredestein Hi-Trac	37 bis 68	4,1	2,1	4,2	8
Hankook Optimo	43 bis 66	2,1	3,2	3,2	9
Yokohama C.Drive	48 bis 69	1,6	3,2	3,1	10
Goodyear DuraGrip	46 bis 72	2,0	2,8	3,0	?
Michelin Energy Saver	61 bis 86	2,1	2,5	3,0	?
Pneumant PN550	39 bis 65	2,4	3,2	3,6	?
Kumho Solus KH17	42 bis 61	1,8	2,2	3,0	?

Trainingsdaten

Testdaten

Zielgröße

Rank-Learning

Problemstellung

- Gegeben: Trainingsdaten $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$ mit gegebener Sortierung $y_1 < y_2 < ... < y_n$ bzw. Scores $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n$.
- Gesucht: Modell $f : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mapsto s \in \mathbb{R}$ welches für neue Instanzen Sortierung oder Ranking-Scores liefert.
- Ziel: Optimiere Ranking-Kriterium.

Gutes Kriterium?

  - Pairwise Ranking: Ranking-Kriterium = Summe über paarweisen Vergleich der Instanzen/Scores.
  - Global Ranking: Kriterium definiert für gesamtes Ranking.

Rank-Learning

Ranking-Kriteria

- Qualität einer Vorhersage $\mathbf{s}' = \{s'_1, s'_2, ..., s'_n\}$ für gegebene Ranking-Scores $s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n$ bzgl. top-k Instanzen ($1 \leq k \leq n$):
  - (Pairwise) Agreement at k-th Position:

$$A(\mathbf{s}', k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=k+1}^{n} [s'_l > s'_i]$$

  - Mean Pairwise Agreement at k-th Position:

$$MPA(\mathbf{s}', k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} A(\mathbf{s}', j)$$

  - Negative Mean Squared Error at k-th Position:

$$NMSE(\mathbf{s}, \mathbf{s}', k) = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (s_i - s'_i)^2$$

Rank-Learning

Ranking-Kriteria

- Qualität einer Vorhersage $\mathbf{y}' = \{y'_1, y'_2, ..., y'_n\}$ für gegebene Sortierung $y_1 = 1, y_2 = 2, ..., y_n = n$ bzgl. top-*k* Instanzen ($1 \leq k \leq n$):
  - Average Precision at *k*-th Position:

$$P(\mathbf{y}', k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} [k \geq y'_i]$$

  - Mean Average Precision at *k*-th Position:

$$MAP(\mathbf{y}', k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} P(\mathbf{y}', j)$$

  - Negative Distortion at *k*-th Position:

$$ND(\mathbf{y}', k) = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} |y_i - y'_i|$$

Rank-Learning

Ranking-Kriteria

- Qualität einer Vorhersage $\mathbf{y}' = \{y'_1, y'_2, ..., y'_n\}$ für gegebene Ranking-Scores $\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ bzgl. top-*k* Instanzen ($1 \leq k \leq n$):
  - Discounted Cumulative Gain at *k*-th Position:

$$DCG(\mathbf{s}, \mathbf{y}', k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{2 \wedge (\mu - s_{y'_i}) - 1}{\log(i+1)} \qquad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_k = \mu$$

  - Normalized Discounted Cumulative Gain at *k*-th Position:

$$NDCG(\mathbf{s}, \mathbf{y}', k) = \frac{DCG(\mathbf{s}, \mathbf{y}', k)}{DCG(\mathbf{s}, \mathbf{y}, k)}$$

  - (Unnormierte) Cosinus-Ähnlichkeit bzgl. **c** mit $0 < c_1 < ... < c_n$:

$$C(\mathbf{s}, \mathbf{y}', \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} s_i (c_{y'_i} - c_i)$$

Rank-Learning

Lösungsansatz

- Approximation des Ranking-Kriteriums durch konvexe Verlustfunktion:
  - (Pairwise) Agreement (z.B. RankSVM).
  - Normalized DCG (z.B. CoFiRank).
  - Mean Average Precision (z.B. Multivariate SVM).
- Approximation des Gradienten des Ranking-Kriteriums:
  - Mean Average Precision, Normalized DCG (z.B. SPSA, LambdaRank).
- Heuristische Suche bzw. Graph-basierte Verfahren:
  - Normalized DCG (z.B. Xrank).

Rank-Learning

RankSVM

- Ziel: Maximiere paarweise Übereinstimmung

$$A(\mathbf{s}', k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} \left[s'_j > s'_i \right]$$

für lineares Modell $f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ mit $s'_i = f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i)$.

- Umformung: Minimierung einer (regularisierten) Verlustfunktion

$$\min_{f_{\mathbf{w}}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} l_{0/1}(f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i), f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j)) + \Omega(\mathbf{w})$$

Konvexer Regularisierer

mit $l_{0/1}(f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i), f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j)) = \begin{cases} 0 & f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j) > f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i) \\ 1 & f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j) \leq f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i) \end{cases}$

Nicht konvexe Verlustfunktion

Rank-Learning

RankSVM

- Konvexe Approximation der Verlustfunktion

$$l_{0/1}(f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i), f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j)) = \begin{cases} 0 & f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j) > f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i) \\ 1 & f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j) \leq f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i) \end{cases} = \begin{cases} 0 & f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) > 0 \\ 1 & f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \leq 0 \end{cases}$$

bspw. durch Hinge-Loss:

$$l_h(f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), +1) = \begin{cases} 0 & 1 - f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) < 0 \\ 1 - f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) & 1 - f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \geq 0 \end{cases} = \max(0, 1 - f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i))$$

Neue Beispiele $\mathbf{x}_{ji} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i$ mit Label $y_{ji} = +1$

- RankSVM = Minimierung des regularisierten Hinge-Loss mit Instanzen $\{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, +1) : i = 1...n, j = i+1...n\}$.

Rank-Learning

RankSVM

- Lösung des Optimierungsproblems:
  - Bspw. durch Gradientenabstieg (siehe: lineare Modelle).
- Ranking für neue Instanzen:
  - Berechnen und Sortieren der Scores $s = f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$.
- Erweiterungen:
  - Kernelisierte Variante durch Structural SVM: Quadratische Optimierung mit „Most Violating Constraint“-Ansatz.
  - Approximative Optimierung des Mean Pairwise Agreement at *k*-th Position durch verwenden der Instanzen $\{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i, +1) : i = 1...k,\ j = k+1...n\}$.

Rank-Learning

CoFiRank

- Ziel: Maximiere Normalized Discounted Cumulative Gain bzgl. der ersten *k* Positionen

$$NDCG(\mathbf{s}, \mathbf{y}', k) = \frac{1}{DCG(\mathbf{s}, \mathbf{y}, k)} \sum_{i=1}^{k} \frac{2 \wedge (\mu - s_{y'_i}) - 1}{\log(i+1)}$$

  für lineares Modell $f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ mit $\mathbf{y}' = \arg\mathrm{sort}(f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i))$, $\mathbf{y} = \arg\mathrm{sort}(s_i)$ und $\mu = \max_i(s_i)$.

- Problem: $NDCG(\mathbf{s}, \arg\mathrm{sort}(f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i)), k)$ ist nicht konvex in **w**!
- Idee: Konvexe obere Schranke für NDCG-Loss finden.

Rank-Learning

CoFiRank

- NDCG-Verlustfunktion für $\mathbf{y}' = \arg\operatorname{sort}(s_i')$ mit $s_i' = f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i)$:

$$l_{NDCG}(\mathbf{s}, \mathbf{y}') = 1 - NDCG(\mathbf{s}, \mathbf{y}', k)$$

- Es gilt $\mathbf{y}' = \arg\operatorname{sort}(s_i') = \arg\max_{\mathbf{p} \in \mathrm{perm}(n)} C(\mathbf{s}', \mathbf{p}, \mathbf{c}) = \arg\max_{\mathbf{p} \in \mathrm{perm}(n)} \sum_{i=1}^{n} s_i'(c_{p_i} - c_i)$.

Permutation von {1,…,*n*}

Maximal falls **p** sortiert ist wie **s´**

- Relaxierte NDCG-Verlustfunktion:

$$l'_{NDCG}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \max_{\mathbf{p} \in \mathrm{perm}(n)} l_{NDCG}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) + C(\mathbf{s}', \mathbf{p}, \mathbf{c})$$

Rank-Learning

CoFiRank

- Für die relaxierte Verlustfunktion gilt:
  - $l'_{NDCG}(\mathbf{s},\mathbf{s}') = l_{NDCG}(\mathbf{s},\hat{\mathbf{p}}) + C(\mathbf{s}',\hat{\mathbf{p}},\mathbf{c}) \geq l_{NDCG}(\mathbf{s},\mathbf{y}') + C(\mathbf{s}',\mathbf{y}',\mathbf{c}) \geq l_{NDCG}(\mathbf{s},\mathbf{y}')$

    mit $\hat{\mathbf{p}} = \underset{\mathbf{p}\in\mathrm{perm}(n)}{\arg\max}\, l_{NDCG}(\mathbf{s},\mathbf{p}) + C(\mathbf{s}',\mathbf{p},\mathbf{c})$.

    Nicht-negativ
  - $l'_{NDCG}(\mathbf{s},\mathbf{s}')$ ist konvex in $\mathbf{s}'$ und damit auch konvex in $\mathbf{w}$ mit Ableitung $\frac{\partial l'_{NDCG}(\mathbf{s},\mathbf{s}')}{\partial \mathbf{s}'} = \frac{\partial C(\mathbf{s}',\hat{\mathbf{p}},\mathbf{c})}{\partial \mathbf{s}'} = \mathbf{c}_{\hat{\mathbf{p}}} - \mathbf{c}$.
  - Optimierungsproblem $\hat{\mathbf{p}} = \underset{\mathbf{p}\in\mathrm{perm}(n)}{\arg\max}\, l_{NDCG}(\mathbf{s},\mathbf{p}) + C(\mathbf{s}',\mathbf{p},\mathbf{c})$ kann für gegebenes $\mathbf{w}$ (und damit festes $\mathbf{s}'$) effizient berechnet werden.

Rank-Learning

CoFiRank

- Algorithmus (RegERM mit relaxiertem NDCG-Loss):

RegNDCG(*Instanzen* $\mathbf{x}_i$, *echte Ranking Scores* s_i *und Schranke* k)

Setze $k = 0$, $\mu^0 = 1$, $\mathbf{w}^0 = \mathbf{0}$

Wähle $\mathbf{c}$ mit $0 < c_1 < \ldots < c_n$

DO

$$s_i'^k = \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{w}^k \quad \forall i$$

$$\hat{\mathbf{p}}^k = \arg\max_{\mathbf{p} \in \mathrm{perm}(n)} l_{NDCG}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) + C(\mathbf{s}'^k, \mathbf{p}, \mathbf{c})$$

$$\mathbf{g}^k = \sum_{i=1}^{n} (c_{\hat{p}_i^k} - c_i)\mathbf{x}_i + \Omega'(\mathbf{w}^k)$$

IF $k > 0$ THEN

$$\mu^k = \mu^{k-1} (\mathbf{g}^{k-1^{\mathrm{T}}} \mathbf{g}^{k-1}) / ((\mathbf{g}^{k-1} - \mathbf{g}^k)^{\mathrm{T}} \mathbf{g}^{k-1})$$

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k - \mu^k \mathbf{g}^k$$

$$k = k + 1$$

WHILE $\left\| \mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{k-1} \right\| > \varepsilon$

RETURN $\mathbf{w}^k, \mathbf{s}'^k$

Authority-Ranking

Motivation

- Beispiele:
  - Ranking von Webseiten, z.B. durch Analyse der Verlinkungsstruktur.
  - Reputation von Benutzern in sozialen Netzwerken.

  - Finden geeigneter Literatur-Referenzen und Domain-Experten (zugehörige Autoren).

Authority-Ranking

Problemstellung

- Gegeben: Trainingsdaten $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$ mit gegebenen lokalen *Authority* Scores (Kompetenz-Bewertungen):
  - Authority Score $A_{ij} = a(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ gibt an wie „kompetent“ $\mathbf{x}_j$ aus Sicht von $\mathbf{x}_i$ ist.

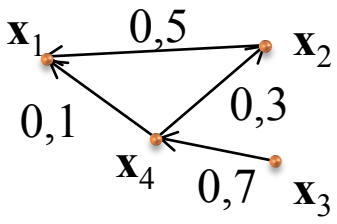
Authority Matrix

- Gesucht: Modell $f : \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ welches für Instanzen $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$ globalen Ranking Score s_i liefert.
- Annahme: Je kompetenter $\mathbf{x}_i$ und je höher der Authority Score A_{ij}, desto kompetenter $\mathbf{x}_j$.

Authority-Ranking

Lösungsansatz

- Modellierung der (nicht-symmetrischen) Kompetenz-Bewertungen als ungerichteten Graphen:
  - Instanzen sind Knoten, Authority Scores sind Kanten-Gewichte
    $\Rightarrow$ Authority Matrix = Adjazenzmatrix **A**.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,7 \\ 0,1 & 0,3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \qquad d_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

  - Intuition: (normalisierter) Graph beschreibt mit welcher Wahrscheinlichkeit Knoten $\mathbf{x}_i$ Knoten $\mathbf{x}_j$ als „Experten“ nennen würde.
  - Beispiel: $\mathbf{x}_4$ hält $\mathbf{x}_2$ für 3-mal so kompetent wie $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3$ ist aus seiner Sicht kein „Experte“.

Authority-Ranking

Lösungsansatz

- Random Surfer:
  - Beginnend bei einem beliebigen Knoten „fragt“ man sich (unendlich lang) durch.
  - Wahrscheinlichkeit mit der ein Knoten insgesamt gefragt wurde = globaler Authority Score.
- Hubs & Authorities:
  - Jeder Knoten besitzt…
    - *Hub Score:* Wie gut sind seine Verweise auf „kompetente“ Knoten = ausgehende Kanten.
    - *Authority Score:* Wie kompetent ist der Knoten, d.h. wie viele kompetente Knoten verweisen auf ihn = eingehende Kanten.

Authority-Ranking

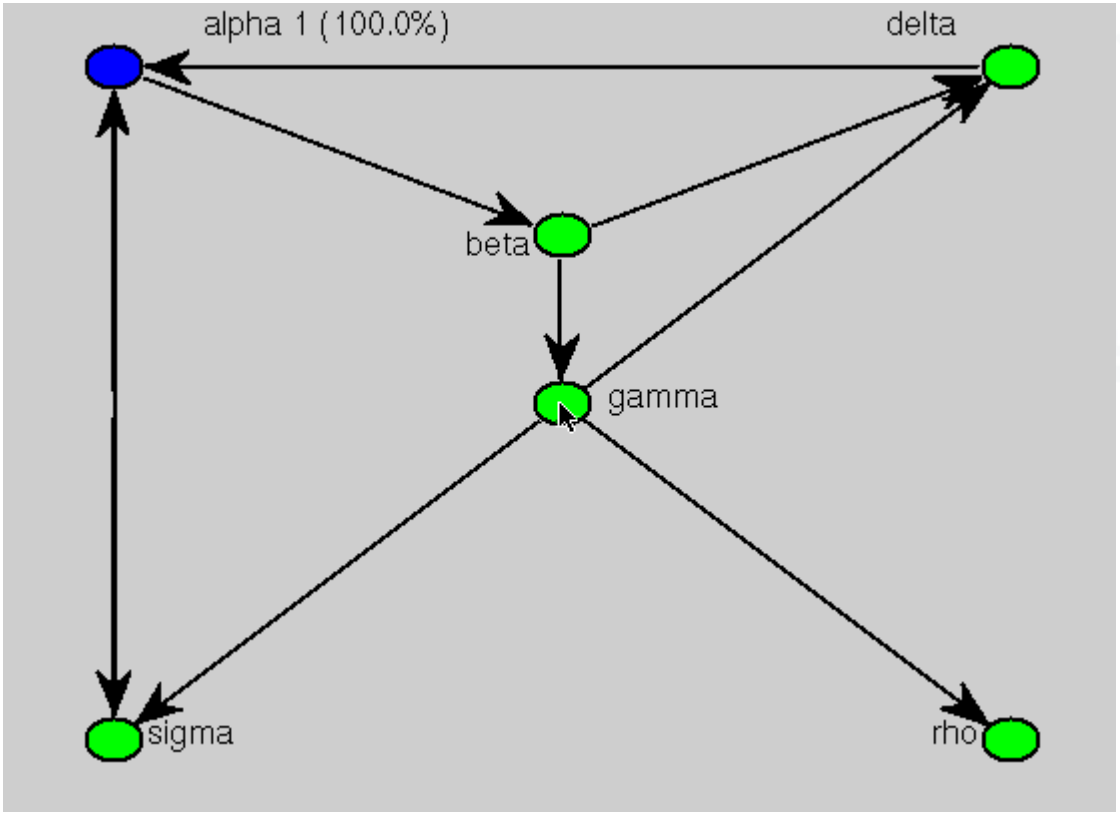
Random Surfer: PageRank

- PageRank: Random Surfer Modell zum Ranking von Webseiten.
  - (Urspünglicher) Ranking-Algorithmus von Google, Fireball etc.
  - Abhängig von Query werden relevante Webseiten gefunden und nach ihrem globalen Authority Score sortiert.
- Annahmen:
  - Link auf Webseite $\mathbf{x}_i$ verweist auf „kompetente“ Webseite $\mathbf{x}_j$, d.h. Adjazenzmatrix des Webgraphen = Authority Matrix mit $A_{ij} = 1$.
  - Mit Wahrscheinlichkeit $1 - \varepsilon$ folgt der Nutzer (Random Surfer) einem Link auf der Webseite.
  - Mit Wahrscheinlichkeit ε wechselt er auf eine zufällige Webseite.

Authority-Ranking

Random Surfer: PageRank

- Beispiel:



Authority-Ranking

Random Surfer: PageRank

- Gegeben: Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Nutzer von Webseite $\mathbf{x}_i$ zu Webseite $\mathbf{x}_j$ wechselt ist

$$P_{ij} = p(\mathbf{x}_j \mid \mathbf{x}_i) = (1-\varepsilon)\frac{A_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} A_{ik}} + \varepsilon\frac{1}{n}$$

Transitionswahrscheinlichkeit

und somit $\mathbf{P} = (1-\varepsilon)\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{U}$ mit $U_{ij} = \frac{1}{n}$.

- Gesucht: Wahrscheinlichkeit dafür, dass man auf Webseite $\mathbf{x}_i$ ist, d.h. $s_i = p(\mathbf{x}_i)$.

Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Authority-Ranking

Random Surfer: PageRank

- Algorithmus: Beginnend mit initialen Ranking Scores $\mathbf{s}$ iterativ neue Scores bestimmen mit

$$\mathbf{s}' = \frac{1}{c}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{s} \quad \text{wobei} \quad c = \left\|\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}\right\| \Rightarrow \left\|\mathbf{s}'\right\| = 1$$

- Konvergenz von PageRank bei $\mathbf{s}' = \mathbf{s}$, sodass gilt

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}$$

  d.h. $\mathbf{s}$ ist ein Eigenvektor von $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ mit Eigenwert λ.

- Man kann zeigen, dass $\mathbf{s}$ der Eigenvektor mit größtem Eigenwert λ ist (Analogie zu Spectral Clustering).

Authority-Ranking

Random Surfer: PageRank

- Vorteile:
  - Leicht und effizient berechenbar.
  - Existenz & Eindeutigkeit der Lösung sowie Konvergenz des Algorithmus ist garantiert für $0 < \varepsilon < 1$.
- Nachteile:
  - Links können schlechte Indikatoren für Kompetenz-Bewertung sein:
    - Kompetenz zweier Instanzen kann sich gegenseitig verstärken.
    - Automatisch generierte Links haben kaum Aussagekraft.
    - „Künstliche“ Links (z.B. Link-Spam) verändern Ranking.
  - Eigenschaften der Instanzen fließen nicht ins Ranking ein.

Authority-Ranking

Hubs & Authorities: HITS

- Hypertext Induced Topic Search (HITS):
  - Query-abhängige Auswahl relevanter Webseiten R.
  - Webseiten R, alle auf R verweisenden Webseiten und alle von R direkt erreichbaren Webseiten bilden Teilgraphen mit Adjazenzmatrix $\mathbf{A}$.
  - Für diesen Teilgraphen Hub- und Authority-Scores bestimmen und Webseiten bzgl. Authority-Scores sortieren.
- Annahmen:
  - Hubs zeigen auf viele Authorities.
  - Authorities werden von vielen Hubs erwähnt.

Authority-Ranking

Hubs & Authorities: HITS

- *Hub Score* h_i einer Webseite $\mathbf{x}_i$ ist (normierte) Summe der *Authority Scores* s_i der Webseiten $\mathbf{x}_i$ auf welche $\mathbf{x}_i$ verweist:

$$h_i = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} s_j \Rightarrow \mathbf{h} = \frac{1}{d}\mathbf{As} \text{ wobei } d = \|\mathbf{As}\| \Rightarrow \|\mathbf{h}\| = 1$$

- *Authority Score* s_i einer Webseite $\mathbf{x}_i$ ist (normierte) Summe der *Hub Scores* h_i der Webseiten $\mathbf{x}_i$ welche auf $\mathbf{x}_i$ verweisen:

$$s_i = \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n} A_{ji} h_j \Rightarrow \mathbf{s} = \frac{1}{c}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{h} \text{ wobei } c = \|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{h}\| \Rightarrow \|\mathbf{s}\| = 1$$

Authority-Ranking

Hubs & Authorities: HITS

- Gegenseitiges Einsetzen ergibt:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{d}\mathbf{A}\mathbf{s} = \frac{1}{d}\mathbf{A}\left(\frac{1}{c}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{h}\right) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{h}$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{c}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{h} = \frac{1}{c}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{d}\mathbf{A}\mathbf{s}\right) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{s}$$

- Analog zu PageRank ist $\mathbf{h}$ der Eigenvektor von $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ und $\mathbf{s}$ der Eigenvektor von $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ mit jeweils größtem Eigenwert.
- Algorithmus: Iterative, abwechselnde Berechnung der Hub- und Authority-Scores.

Authority-Ranking

Hubs & Authorities: HITS

- Vorteile:
  - Effizient berechenbar.
  - Unterscheidung in Hubs & Authorities.
- Nachteile:
  - Links können schlechte Indikatoren für Kompetenz-Bewertung sein; anfällig für Link-Spam.
  - Lösung muss nicht eindeutig sein (Lösung ist dann abhängig von Initialisierung).
  - Leichte Veränderung des Graphen kann unter Umständen große Änderung des Ranking verursachen.

Authority-Ranking

Erweiterungen

- Kombination beider Ansätze:
  - Stochastic Approach for Link Structure Analysis (SALSA).
- Modell für Transitionswahrscheinlichkeiten:
  - Eigenschaften der verlinkten Seite (z.B. Aktualität, inhaltliche Ähnlichkeit zur verlinkenden Seite, Relevanz bzgl. der Query).
  - Eigenschaften der Verlinkung (z.B. Position, Anchor-Text).
  - Struktur des umgebenden Teilgraphen.
- Personalisierung:
  - Benutzerabhängige Transitionswahrscheinlichkeiten.
  - Re-Ranking nach User-Feedback (Click-Stream-Analyse).

Zusammenfassung

- Rank-Learning: Lernen eines Modells basierend auf Daten mit gegebenem Ranking.
  - Zahlreiche (nicht-konvexe) Ranking-Kriteria.
  - Ein Lösungsansatz: Konvexe Approximation für Kriterium finden und diese optimieren (z.B. RankSVM, CoFiRank).
- Authority-Ranking: Lernen eines Modells basierend auf lokalen Relevanz-Bewertungen.
  - Modellierung als Graph.
  - Finden eines globalen Rankings durch Lösen eines Eigenwertproblems (z.B. PageRank, HITS, SALSA).