Kapitel 8
Probabilistische und Possibilistische Logik

23. Juni 2005

Zusammenfassung

- Kapitel 1-2 Grundlagen,
- Kapitel 3 Fuzzy-Mengen und -Relationen,
- Kapitel 4 Erweiterung des klassischen Beweisbegriffes,
- Kapitel 5 Abstrakte Fuzzy-Logik,
- Kapitel 6 Fuzzy-Logik zur Modellierung von Vagheit,
- Kapitel 7 kanonische Erweiterungen zweiwertiger Operatoren,

Plan für heute

- Kapitel 8: Fuzzy-Logik zur Modellierung von Unsicherheit,
  - Possibilistisches Schließen,
  - Probabilistisches Schließen.

Zufallsgrößen

- mit Hilfe von Zufallsgröße wird der (unsichere) Ausgang eines Zufallsexperimentes beschrieben,
- die Zufallsgröße X nimmt Werte aus einem Grundbereich Ω an,
- falls Ω endlich oder abzählbar: diskrete Zufallsgröße,
- Zufallsexperiment des Würfelns: $\Omega = \{1, .., 6\}$,
- Information über den Würfel $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Beispiel Würfel

Wahrscheinlichkeiten für einen gleichverteilten Würfel:

$$P(\omega_i) = \begin{cases} 1/6, & \text{falls } 1 \leq \omega_i \leq 6; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten in Ω muß 1 ergeben.
Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel eine Sechs zu würfeln:

$$P(6) = P(X = 6) = 1/6.$$

Stetige Zufallsgrößen

- falls Ω nicht diskret ist, ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines konkreten Ergebnisses häufig gleich 0,
- stattdessen die Wahrscheinlichkeit für gewisse Teilmengen A von Ω, $P(A) = P(X \in A)$,

Definition

Sei Ω eine Menge. Eine σ-Algebra $\mathbb{B}$ ist eine nichtleere Familie von Teilmengen von Ω so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\emptyset \in \mathbb{B}$,
2. falls A in $\mathbb{B}$ liegt, dann liegt auch das Komplement von A in $\mathbb{B}$,
3. für eine Folge $\{A_i\}_{i\in I}, A_i \in \mathbb{B}$, ist auch $\bigcup_{i\in I} A_i$ in $\mathbb{B}$.

Wahrscheinlichkeitsraum

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{B}, P)$, mit:

- Ω: Grundmenge der Elementarereignisse,
- $\mathbb{B}$: σ-Algebra der zu bewertenden Ereignisse,
- P: Wahrscheinlichkeitsmaß.

Definition

Eine Funktion $P : \mathbb{B} \to [0, 1]$, mit

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$
2. $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(a_i)$ für paarweise disjunkte Mengen A_i.

heißt Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathbb{B})$.

$P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Ausgang des Experimentes in A liegt.

Wahrscheinlichkeitverteilung und Dichte

Sei $\Omega = \mathbb{R}$,

(kumulative) Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \to [0,1] : \qquad F(x) = P(X \leq x)$$

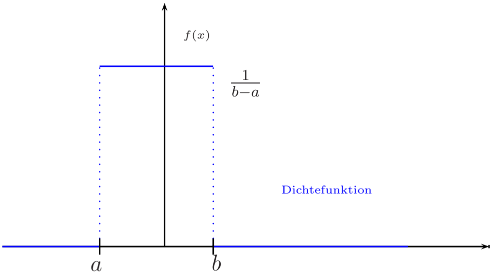
X heißt stetige Zufallsgröße, falls F stetig ist.

Wahrscheinlichkeitsdichte: $f(x) = F'(x)$

$$P(A) = P(X = x \in A) = \int_{[a,b]} f(x)dx.$$

Gleichverteilung auf einem Intervall $[a, b]$

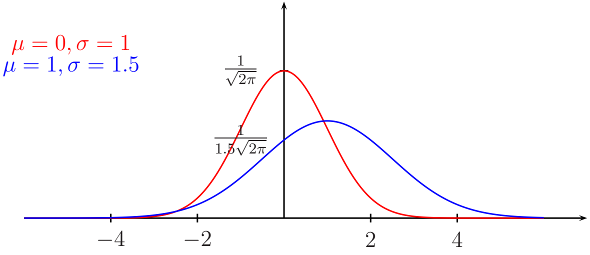
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{falls } a < x \leq b; \\ 0, & \text{falls } x > b. \end{cases}$$



(μ, σ)-Normalverteilung

Dichte	*Verteilungsfunktion*
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

μ: Erwartungswert, σ: Standardabweichung



Possibilistisches Schließen

- eingeführt von Dubois und Prade,
- Grade für die Möglichkeit des Wahrseins
- Möglichkeitsgrad einer Formel ist dual zu ihrem Notwendigkeitsgrad:
  falls φ mindestens zum Grad a notwendig ist, dann ist $\neg\varphi$ höchstens zum Grad $1 - a$ möglich.

Possibilitätsverteilung

Idee: auf einer Grundmenge Ω sei eine Verteilung der Möglichkeiten gegeben.

Definition

Eine Possibilitätsverteilung π über Ω ist eine Funktion $\pi : \Omega \rightarrow [0, 1]$, für die mindestens ein $\omega \in \Omega$ existiert, so daß $\pi(\omega) = 1$ (Normalisiertheit).

$POSS(\Omega)$ – Menge aller Possibilitätsverteilungen über Ω.

Possibilitätsverteilung

- Bei gegebener Possibilitätsverteilung fragen wir nach der Möglichkeit, daß für einen bestimmten Objektzustand ω gilt: $\omega \in \Sigma$.
- Semantik von Probabilistischen und Possibilistischen Verteilungen ist verschieden:
  großer Unterschied zwischen der Möglichkeit z.B. jeden Morgen schwimmen zu gehen und der Wahrscheinlichkeit dafür.

Possibilitätsmaße

Definition

Sei $\pi_0 \in POSS(\Omega)$ eine Possibilitätsverteilung, dann ist $POSS_\pi : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, mit

$$POSS_\pi(A) := \sup\{\pi(\omega) \mid \omega \in A\}$$

heißt Possibilitätsmaß von π.

$NEC_\pi : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, mit

$$NEC_\pi(A) := \inf\{1 - \pi(\omega) \mid \omega \in \Omega \setminus A\}$$

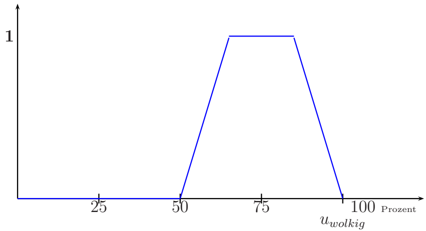
heißt Notwendigkeitsmaß von π.

Ein hoher Grad $POSS_{\pi_0}(A)$ ist nicht ausreichend, um sicher feststellen zu können, daß ω_0 tatsächlich zu A gehört.

Beispiel

$\pi_0 \equiv u_{wolkig}$ Possibilitätsverteilung für den Bedeckungsgrad am 15.06.2005 in Potsdam.

$\Omega = [1, 100]$ Grundbereich.



Beispiel

wähle $A = [65, 70]$

$$POSS_{\pi_0}(A) = 1 \text{ und } NEC_{\pi_0}(A) = 0$$

ein Bedeckungsgrad zwischen 65 und 70 Prozent wird als uneingeschränkt möglich angesehen, aber nicht als sicher.

Wahrscheinlichkeit und Möglichkeit

- die Möglichkeit eines Ereignisses folgt aus seiner (positiven) Wahrscheinlichkeit,
- Wahrscheinlichkeitstheorie und Possibilitätstheorie modellieren das Phänomen der Unsicherheit auf verschiedene Weise,
- π_0 ist keine Dichtefunktion, das Integral $\int_{[0,100]} \pi_0(\omega) d\omega = 35$ ist verschieden von 1.
  Auch nach Normalisierung mit $\pi_0' \equiv \frac{1}{35}\pi_0$ ergibt das von π_0' induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß P den Wert $P(A) = \frac{1}{7} \neq POSS_{\pi_0}(A)$

Eigenschaften von Possibilitäts- und Necessity-Maßen

Satz

Für alle $\pi \in POSS(\Omega)$ und alle $A, B \subseteq \Omega$ gilt:

1. $Poss_\pi(\emptyset) = Nec_\pi(\emptyset) = 0$,
2. $Poss_\pi(\Omega) = Nec_\pi(\Omega) = 1$,
3. $Poss_\pi(A \bigcup B) = max\{Poss_\pi(A), Poss_\pi(B)\}$,
4. $Nec_\pi(A \bigcup B) \geq max\{Nec_\pi(A), Nec_\pi(B)\}$,
5. $Poss_\pi(A \bigcap B) \leq min\{Poss_\pi(A), Poss_\pi(B)\}$,
6. $Nec_\pi(A \bigcap B) = min\{Nec_\pi(A), Nec_\pi(B)\}$,
7. $Nec_\pi(A) \leq Poss_\pi(A)$.

Possibilistisches Schließen

- $u \in \mathcal{F}(F_L)$ –Fuzzy-Menge von Formeln.
- $u(\varphi)$ ist untere Schranke für den Notwendigkeitsgrad von φ,
- ein Notwendigkeitsmaß N erfüllt φ, wenn $N(\varphi) \geq u(\varphi)$,
- jedes Paar $(\varphi, u(\varphi))$ ist ein Konstraint für die Menge der Notwendigkeitsmaße,
- Ω– Menge der klassischen aussagenlogischen Modelle,
- $\pi : \Omega \to [0, 1]$ Possibilitätsverteilung, $\pi(\omega)$ist der Grad zu dem ω möglicherweise die reale Welt ist.

Induzierte Maße

Definition

Das von π induzierte Möglichkeitsmaß ist eine Funktion $\Pi : F_L \to [0,1]$ ist definiert durch:

$$\Pi_\pi(\varphi) = \sup\{\pi(\omega) \mid \omega \models \varphi\}.$$

Das von π induzierte Notwendigkeitsmaß ist eine Funktion $N : F_L \to [0,1]$, die definiert ist durch:

$$N_\pi(\varphi) = 1 - \Pi(\neg\varphi) = \inf\{1 - \pi(\omega) \mid \omega \models \neg\varphi\}.$$

Possibilistisches Schließen

Definition

1. Eine Possibilitätsverteilung π erfüllt das Paar (φ, a), $\pi \models (\varphi, a)$, falls $N_\pi(\varphi) \geq a$.
2. π erfüllt die Fuzzy-Menge u, falls für alle $\varphi \in supp(u)$ gilt $\pi \models (\varphi, u(\varphi))$.
3. (ψ, b) ist eine logische Konsequenz von u, falls für alle π mit $\pi \models u$ gilt $\pi \models (\psi, b)$. Schreibweise: $u \models (\psi, b)$.

$$D_P(u)(\varphi) := \sup\{a \in (0,1], u \models (\varphi, a)\}$$

Prinzip der minimalen Spezifität

- für jedes u existiert eine größte Possibilitätsverteilung π_u, mit $\pi_u \models u$,
-

$$\pi_u(\omega) = \begin{cases} \min\{1 - u(\varphi_i) & \mid \omega \models \neg\varphi_i, \varphi_i \in supp(u)\}, \\ 1 & \text{falls } \omega \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n. \end{cases}$$

falls $supp(u) = \{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}$

Satz

Eine Possibilitätsverteilung π erfüllt eine Fuzzy-Menge u genau dann, wenn $\pi \sqsubseteq \pi_u$, d.h. für alle ω gilt $\pi_u(\omega) \leq \pi(\omega)$.

Probabilistische Logiken

- Modellierung von Unsicherheit im Sinne von (subjektiver) Wahrscheinlichkeit,
- klassische Tautologien werden stets mit 1 bewertet,
- logisch äquivalente Formeln erhalten denselben Grad,
- Klasse der Formeln, die betrachtet wird, ist die Lindenbaum-Algebra $\mathbb{B}$ der klassischen Logik mit dem größten Element $\mathbf{1}$ und kleinsten Element $\mathbf{0}$

Probabilistische Semantiken

- $\mathcal{M}_{sa}$ der *konstante-Summen-super-additiven Maße*,
- $\mathcal{M}_{ul}$ der *upper-lower Wahrscheinlichkeiten*,
- $\mathcal{M}_{p}$ der *endlich-additiven Maße*,

Wir konzentrieren uns auf endlich-additive Wahrscheinlichkeitsmaße.

endlich-additive Wahrscheinlichkeitsmaße

Definition

Ein *endlich-additives Wahrscheinlichkeitsmaß* ist eine Abbildung $P : \mathbb{B} \to [0, 1]$ mit

1. $P(\mathbf{1}) = 1$,
2. für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{B}$ mit $\varphi \wedge \psi = \mathbf{0}$ gilt: $P(\varphi \vee \psi) = P(\varphi) + P(\psi)$,
3. für alle $\varphi \in \mathbb{B}$ gilt: $1 = P(\varphi) + P(\neg\varphi)$.

Probabilistische Information

- die Wahl von Wahrscheinlichkeitsmaßen als Modelle erscheint vernünftig, da ein Wahrscheinlichkeitsmaß vollständige Information über ein Zufallsphänomen enthält, d.h. eine vollständige Theorie ist,
- die Information, die von einer Anfangsbelegung u gegeben wird ist, daß für jede Formel φ die Wahrscheinlichkeit größer oder gleich $u(\varphi)$ ist,
- eine probabilistische Theorie $\mathbf{J}_{\mathcal{M}_P}$ ist die größte untere Schranke der Wahrscheinlichkeitsmaße, die größer oder gleich u sind,
- eine Abbildung, die als größte untere Schranke von Wahrscheinlichkeitsmaßen bestimmt wird heißt eine untere Hülle (envelope)

Probabilistisches Schließen

- $\mathcal{M}_P$ ist balanciert, d.h. $\forall m \in \mathcal{M}_P$ gilt stets $m(\varphi) + m(\neg\varphi) = 1$, damit gibt eine Fuzzy-Menge immer ein Intervall-Constraint für eine unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung,
- $\mathbf{J}_{\mathcal{M}_P}$ erlaubt uns, dieses Intervall-Constraint zu verbessern, bzw. das bestmögliche Intervall-Constraint für u zu finden.
- Suche nach einem Fuzzy-H-System zu dieser Semantik ist äquivalent zur Suche nach einem Algorithmus, mit dessen Hilfe das beste Intervall-Constraint für eine gegebene Information u gefunden werden kann,
- Problem ist eng mit der Entwicklung von Diagnose-Systemen verbunden.

Konsistenzbegriff für probabilistische Information

durch Einführung einer neuen Familie von Junktoren

Definition

Sei $h \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Ein $h-k$-Junktor ist eine h-stellige Operation C^k auf $\mathbb{B}$, die wie folgt definiert wird:

1. $C^0 : \mathbb{B}^h \to \mathbb{B}$ ist die konstante Abbildung mit $C^0(\varphi_1 \dots \varphi_h) = \mathbf{1}$,
2. falls $k \neq 0$ ist für beliebige $\varphi_1, \dots, \varphi_h \in \mathbb{B}$

$$C^k(\varphi_1 \dots \varphi_h) = \begin{array}{l} \sup\{\varphi_{i(1)} \wedge \dots \wedge \varphi_{i(k)} \mid i(1) \dots i(k) \\ \quad \text{paarweise disjunkt aus } \{1, \dots, h\}\} \end{array}$$

Interpretation der Junktoren als Spiel

- ein Spieler kann auf eine Folge von Ereignissen $\varphi_1 \ldots \varphi_h$ aus $\mathbb{B}$ wetten,
- die Bank bezahlt einen Euro für irgendein eingetretenes Ereignis φ_i.

In diesem Fall ist $C^k(\varphi_1 \ldots \varphi_h)$ die Menge der Elementarereignisse für die eine Mehrfachwette auf $\varphi_1 \ldots \varphi_h$ uns ermöglicht zumindestens k Euros zu gewinnen.

Interpretation der Junktoren als Spiel II

$$\begin{aligned}
C^0(\varphi_1 \ldots \varphi_h) &\geq C^1(\varphi_1 \ldots \varphi_h) \geq \ldots \geq C^h(\varphi_1 \ldots \varphi_h),\\
C^1(\varphi_1 \ldots \varphi_h) &= \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_h,\\
C^h(\varphi_1 \ldots \varphi_h) &= \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_h,\\
C^{h+1}(\varphi_1 \ldots \varphi_h) &= C^{h+2}(\varphi_1 \ldots \varphi_h) = \ldots = \mathbf{0},\\
C^k(\varphi_1 \ldots \varphi_h) &\geq C^k(\varphi_1 \ldots \varphi_{h-1}),\\
C^k(\varphi_1 \ldots \varphi_h) &= C^k(\varphi_1 \ldots \varphi_h, \mathbf{0}) = C^{k+1}(\varphi_1 \ldots \varphi_h, \mathbf{1}).
\end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsmaße und $h - k$-Junktoren

Satz

Eine Abbildung $P : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, gdw.

1. $P(\mathbf{0} = 0$ *und* $P(\mathbf{1} = 1$, *und*
2. $P(\varphi_1) + \ldots + P(\varphi_h) =$
   $P(C^1(\varphi_1 \ldots \varphi_h)) + \ldots + P(C^h(\varphi_1 \ldots \varphi_h))$.

Beispiel: Seien $\varphi_1, ..\varphi_4$ paarweise disjunkt, dann gilt:
$P(\varphi_1) + \ldots + P(\varphi_4) = P(C^1(\varphi_1 \ldots \varphi_4))$

Maximaler Gewinn

Sei $\varphi_1 \dots \varphi_h$ gegeben. Wir definieren:

$$M(\varphi_1 \dots \varphi_h) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid C^k(\varphi_1 \dots \varphi_h) \neq \mathbf{0}\},$$

oder äquivalent dazu:

$$M(\varphi_1 \dots \varphi_h) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid C^k(\varphi_1 \dots \varphi_h) = \mathbf{0}\} - 1.$$

- $C^k(\varphi_1 \dots \varphi_h) \neq \mathbf{0}$ bedeutet, daß es möglich ist, k Euros zu gewinnen,
- $M(\varphi_1 \dots \varphi_h)$ ist der maximal mögliche Gewinn für einen Spieler, der auf $\varphi_1 \dots \varphi_h$ wettet.

Konsistenz für Probabilistische Interpretation

Satz

Die Semantik $\mathcal{M}_P$ ist logisch kompakt. Eine Anfangsbelegung ist erfüllbar, gdw. $\varphi_1 \dots \varphi_h \in \mathbb{B}$ gilt:

$$u(\varphi_1) + \dots + u(\varphi_h) \leq M(\varphi_1 \dots \varphi_h)$$

- die Bedingung des Satzes erlaubt es, allein den Träger von u zu berücksichtigen,
- falls der Träger endlich ist, ist die Überprüfung auf Erfüllbarkeit sehr einfach,
- falls die $\varphi_1 \dots \varphi_h$ paarweise disjunkt sind u genau dann erfüllbar, wenn $u(\varphi_1) + \dots + u(\varphi_h) \leq 1$.

Hilbert-Kalkül und Probabilistische Theorien

Satz

Sei τ eine Fuzzy-Menge von Formeln, so daß $\tau(\mathbf{1}) = 1$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *τ ist eine $\mathbf{J}_{\mathcal{M}_P}$-Theorie,*
2. *$\tau(\varphi_1) + \ldots + \tau(\varphi_h) \leq (M(\varphi_1 \ldots \varphi_h) - k + 1) \cdot \tau(C^k(\varphi_1 \ldots \varphi_h)) + k - 1$ für jedes $h \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und Formelmengen $\{\varphi_1 \ldots \varphi_h\}$,*
3. *für jede Formel $\varphi \in \mathbb{B}$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß P mit $P(\varphi) = \tau(\varphi)$.*

Hilbert-Kalkül und Fuzzy-Inferenzregeln

Aussage (2) kann man auch schreiben als:

$$\tau(C^k(\varphi_1 \dots \varphi_h)) \geq \frac{\tau(\varphi_1) + \dots + \tau(\varphi_h) - k + 1}{M(\varphi_1 \dots \varphi_h) - k + 1}.$$

$h, m, k \in \mathbb{N}_0$ mit $h \geq m \geq k$ definieren wir eine h-m-k-Fuzzy-Inferenzregel $r_{hmk} = (r', r'')$ durch:

$$\frac{\varphi_1 \dots \varphi_h}{C^k(\varphi_1 \dots \varphi_h)} \qquad \frac{a_1 \dots a_h}{n(\frac{(a_1 + \dots + a_h - k + 1)}{m - k + 1})}$$

$$Dom(r_{hmk}) = \{\varphi_1 \dots \varphi_h \mid M(\varphi_1 \dots \varphi_h) = m\}.$$

Fuzzy-Inferenzregeln

- Die Bedeutung der Ableitungsregeln ist nur in einigen Fällen klar.
- für paarweise disjunkte $\varphi_1 \dots \varphi_h$ ist $h-1-1$-Regel ist eine verallgemeinerte Disjunktionsregel

$$\frac{\varphi_1 \dots \varphi_h}{C^k(\varphi_1 \dots \varphi_h)} \qquad \frac{a_1 \dots a_h}{n(\frac{(a_1+\dots+a_h-k+1)}{m-k+1})}$$

- für $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_h \neq \mathbf{0}$ erhält man bei $h = k = m$ eine verallgemeinerte Konjunktionsregel

$$\frac{\varphi_1 \dots \varphi_h}{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_h} \qquad \frac{a_1 \dots a_h}{a_1 \odot \dots \odot a_h}$$

m-Collapsing-Regeln

Wir haben für jede Anfangsbelegung u

$$u(\varphi_1) + \ldots + u(\varphi_h) \leq M(\varphi_1 \ldots \varphi_h)$$

Definition

Sei $m, h \in \mathbb{N}$ mit $h \geq m$. Eine m-Collapsing-Regel $r_C = (r'_C, r''_C)$ wird definiert durch:

$$r'_C(\varphi_1 \ldots \varphi_h) = \mathbf{0}$$

$$r''_C(a_1, \ldots a_h) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a_1 + \ldots + a_h \geq m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir Formeln $\varphi_1 \ldots \varphi_h$ mit den Graden $a_1, \ldots a_h$ abgeleitet haben, die die Konsistenzbedingung verletzen, dann können wir die Kontradiktion $\mathbf{0}$ zum Grad 1 beweisen.

Vollständigkeitssatz

Satz

Das Fuzzy-Hilbertsystem bestehend aus der Fuzzy-Menge der Axiome $Ax(\mathbf{1}) = 1$ *und der Menge der* $h - m - k$*-Fuzzy-Inferenzregeln und* $m - collapsing - Regeln$ *ist eine vollständige und korrekte Axiomatisierung für die Semantik* $\mathcal{M}_P$ *der additiven probabilistischen Maße.*

- Offenbar ist die Axiomatisierung von $\mathcal{M}_P$ nur theoretisch interessant,
- es ist ein offenes Problem, ob sich der Fuzzy-Hilbert-Kalkül noch verkleinern läßt.

Der Spieler

- $M(\varphi_1 \ldots \varphi_h)$ stellt dann den maximal möglichen Gewinn bei einer Wette auf die Menge $\varphi_1 \ldots \varphi_h$
- Anfangsinformation u als eine Wettfunktion interpretieren, $u(\varphi)$ den Wetteinsatz für φ, $u(\varphi_1) + \ldots + u(\varphi_h)$ der Einsatz für die Gesamtwette
- **Wette** ist Spieler-vernünftig, wenn es Belegungen u gibt, sd.

$$u(\varphi_1) + \ldots + u(\varphi_h) \leq M(\varphi_1 \ldots \varphi_h)$$

  Spieler hat die Chance zumindestens den Betrag zu gewinnen, den er eingesetzt hat, **Wettfunktion** ist Spieler-vernünftig, falls alle Mehrfachwetten Spieler-vernünftig sind,
- wegen der 0-Regel ist Roulette nicht Spieler-vernünftig,
- eine Wettfunktion ist Spieler-vernünftig, wenn sie erfüllbar ist.

Die Bank

- vernünftig für die Bank:

$$m(\varphi_1, \ldots, \varphi_h) = \max\{t \in \mathbb{N}_0 \mid C^t(\varphi_1, \ldots, \varphi_h) = \mathbf{1}\}$$

- $m(\varphi_1, \ldots, \varphi_h)$ stellt den kleinstmöglichen Geldbetrag dar, den ein Spieler bei einer Wette auf $\varphi_1, \ldots, \varphi_h$ sicher gewinnt,
- eine Wettfunktion u ist Bank-vernünftig , wenn

$$m(\varphi_1, \ldots, \varphi_h) \leq u(\varphi_1) + \ldots + u(\varphi_h),$$

- eine Wettfunktion ist Bank-vernünftig, wenn es keine Mehrfachwette gibt, bei der ein Spieler sicher gewinnt.

Probabilistische Maße als Wettfunktionen

Satz

Eine Abbildung $P : \mathbb{B} \longrightarrow [0,1]$ *ist ein additives Wahrscheinlichkeitsmaß, genau dann wenn für alle* $\varphi_1, \ldots, \varphi_h \in \mathbb{B}$ *gilt:*

$$m(\varphi_1, \ldots, \varphi_h) \leq P(\varphi_1) + \ldots + P(\varphi_h) \leq M(\varphi_1 \ldots \varphi_h)$$

Wahrscheinlichkeitsmaße sind Wettfunktionen, die sowohl Spieler-vernünftig, als auch Bank-vernünftig sind, bei denen also weder ein sicheres Gewinnen noch Verlieren möglich sind.