Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Holger Arnold
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, Wintersemester 2005

Blatt 1 (Version 2) — Abgabetermin: 1.11.2005, 10.00 Uhr

Zunächst einige Hinweise...

Hausaufgaben Für jede Hausaufgabe können Sie maximal 3 Punkte bekommen. Die Punkte werden nach folgenden Regeln vergeben:

3 Punkte	= die Aufgabe wurde im Wesentlichen korrekt gelöst
2 Punkte	= die Aufgabe wurde nur teilweise gelöst
1 Punkt	= die Lösung der Aufgabe enthielt größere Fehler oder Lücken
0 Punkte	= die Aufgabe wurde nicht gelöst oder enthielt sehr viele Fehler oder Lücken

Sprechzeiten Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- Sprechen Sie in den Übungen Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor an.
- Prof. Dr. Christoph Kreitz, Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. (0331) 977 3060, **Sprechstunde:** mittwochs 11.15–12.15 Uhr und immer, wenn die Tür des Raumes 1.18 offen steht
- Holger Arnold, Raum 1.21, holger at cs.uni-potsdam.de, Tel. (0331) 977 3066, **Sprechstunde:** montags und dienstags 12.30–13.30 Uhr und nach Vereinbarung

---

Quiz 1

Markieren Sie die folgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Die Korrektheit jedes Programms kann durch systematisches Testen bewiesen werden.

[ ] Wenn ein Programm korrekt ist, dann gibt es dafür einen Beweis.

[ ] Wenn A und $B \Rightarrow A$ bekannt sind, kann auf B geschlossen werden.

[ ] Eine Aussage der Form $A \Rightarrow B$ und ihre Kontraposition $\neg B \Rightarrow \neg A$ sind äquivalent.

[ ] In einem indirekten Beweis der Aussage $A \Rightarrow B$ wird gezeigt, dass die Aussagen A und $\neg B$ zusammen zu einem Widerspruch führen.

[ ] Eine Menge M heißt genau dann unendlich, wenn es keine natürlichen Zahlen k und n gibt, so dass $|M| < k^n$.

[ ] Wenn $1 = 2$, dann „schwarz“ = „weiß“.

[ ] Aus einem Widerspruch folgt jede Aussage.

Aufgabe 1.1

Geben Sie in einer Tabelle die Wahrheitswerte folgender Aussagen in Abhängigkeit der Wahrheitswerte von A und B an: $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$, $\neg A \vee B$, $B \Rightarrow A$, $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ und $(A \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$. Wie viele verschiedene aussagenlogische Wahrheitswertfunktionen von n Variablen gibt es?

Aufgabe 1.2

Gegeben sind die Mengen $A = \{0, a, b, c\}$, $B = \{0, 1, 2, c\}$ und $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Geben Sie folgende Mengen an: $A \cap B$, $\mathbb{N} \cup A$, $\mathbb{N} \setminus B$, $\mathbb{N} \times B$ und $\mathcal{P}(A)$ (Potenzmenge, auch als 2^A bezeichnet). Wie viele (totale) Abbildungen von A nach B gibt es? Wie viele bijektive Abbildungen von A nach B gibt es?

Aufgabe 1.3

Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle Mengen M und alle Teilmengen $A, B \subseteq M$ gilt...

1. $A \setminus B = A \cap (M \setminus B)$.
2. $A \times B = B \times A \Rightarrow A = B$.

Aufgabe 1.4

Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle logischen Aussagen P, Q und R gilt...

1. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (\neg P \vee R)$.
2. $((P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R)) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow Q))$

Hausaufgabe 1.5

Machen Sie sich mit dem mathematischen Grundvokabular (Mengen, Relationen, Äquivalenzrelationen, Abbildungen, vollständige Induktion über natürliche Zahlen, rekursive Definitionen und strukturelle Induktion) vertraut. Arbeiten Sie dazu den Anfangsteil eines oder mehrerer der für die Vorlesung empfohlenen Bücher intensiv durch. (*für diese Aufgabe gibt es natürlich nur indirekt Punkte...*)

Hausaufgabe 1.6

Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle Mengen A, B und C gilt...

1. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
2. $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$.

Hausaufgabe 1.7

Für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ sei die Relation $\sim_k \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wie folgt definiert: Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n \sim_k m$ genau dann, wenn n und m bei der ganzzahligen Division durch k den gleichen Rest haben. Zeigen Sie, dass $\sim_k$ eine Äquivalenzrelation (also reflexiv, transitiv und symmetrisch) ist. Geben Sie alle Äquivalenzklassen der Menge $\{0, 1, 2, 4, 7, 9, 11, 13\}$ bezüglich der Relation $\sim_3$ an.

Hausaufgabe 1.8

Geben Sie für die folgenden Abbildungen an, ob sie injektiv, surjektiv, bijektiv oder keines davon sind. Beweisen Sie ihre Aussage (Sie müssen auch zeigen, warum eine Eigenschaft nicht zutrifft).

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{wenn } x < 0 \end{cases}.$$

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2^{|x|}$.

3. $h : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ mit $(h(f))(x) = (x+1)$. Beachten Sie, dass $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Menge aller Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ ist, h also Funktionen auf Funktionen abbildet.

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Lesen Sie sich in das Thema „deterministische endliche Automaten (DEAs)“ ein. Verwenden Sie z.B. die Vorlesungsfolien, eines der empfohlenen Bücher oder das Internet.