Theoretische Informatik I

Wintersemester 2006/07

Christoph Kreitz / Kirstin Peters
Theoretische Informatik
kreitz@cs.uni-potsdam.de
peters.kirstin@web.de
http://www.cs.uni-potsdam.de/ti/lehre/06-Theorie-I

1. Lehrziele und Lernformen
2. Lehrinhalte
3. Das Team
4. Organisatorisches
5. Gedanken zur Arbeitsethik

Gedanken zum Lernen an der Universität

Lernen ist wie eine Bergbesteigung

Lernen ist wie eine Bergbesteigung

- **Schule entspricht einem Wanderweg bis zur Alm**
  – Breit, gut beschildert, langsamer Anstieg
  – Etwas anstrengend aber ohne nennenswerte Schwierigkeiten
  – Sie sehen den Gipfel in der Ferne, erreichen ihn aber nicht

Gedanken zum Lernen an der Universität

Lernen ist wie eine Bergbesteigung

- **Schule entspricht einem Wanderweg bis zur Alm**
  - Breit, gut beschildert, langsamer Anstieg
  - Etwas anstrengend aber ohne nennenswerte Schwierigkeiten
  - Sie sehen den Gipfel in der Ferne, erreichen ihn aber nicht
- **Universität ist wie Kletterpfade zum Gipfel**
  - Ein Gewirr von Wegen, steil, anstrengend und z.T. risikoreich
  - Bergführer können Ihnen mit Rat und Ausrüstung helfen

Gedanken zum Lernen an der Universität

Lernen ist wie eine Bergbesteigung

- **Schule entspricht einem Wanderweg bis zur Alm**
  - Breit, gut beschildert, langsamer Anstieg
  - Etwas anstrengend aber ohne nennenswerte Schwierigkeiten
  - Sie sehen den Gipfel in der Ferne, erreichen ihn aber nicht
- **Universität ist wie Kletterpfade zum Gipfel**
  - Ein Gewirr von Wegen, steil, anstrengend und z.T. risikoreich
  - Bergführer können Ihnen mit Rat und Ausrüstung helfen
  - Bevor es losgeht, zeigt man Ihnen die wichtigsten Klettertechniken

Gedanken zum Lernen an der Universität

Lernen ist wie eine Bergbesteigung

- **Schule entspricht einem Wanderweg bis zur Alm**
  - Breit, gut beschildert, langsamer Anstieg
  - Etwas anstrengend aber ohne nennenswerte Schwierigkeiten
  - Sie sehen den Gipfel in der Ferne, erreichen ihn aber nicht
- **Universität ist wie Kletterpfade zum Gipfel**
  - Ein Gewirr von Wegen, steil, anstrengend und z.T. risikoreich
  - Bergführer können Ihnen mit Rat und Ausrüstung helfen
  - Bevor es losgeht, zeigt man Ihnen die wichtigsten Klettertechniken
  - Für den eigentlichen Aufstieg wählen Sie Weg und Begleiter selbst aus

Gedanken zum Lernen an der Universität

Lernen ist wie eine Bergbesteigung

- **Schule entspricht einem Wanderweg bis zur Alm**
  - Breit, gut beschildert, langsamer Anstieg
  - Etwas anstrengend aber ohne nennenswerte Schwierigkeiten
  - Sie sehen den Gipfel in der Ferne, erreichen ihn aber nicht
- **Universität ist wie Kletterpfade zum Gipfel**
  - Ein Gewirr von Wegen, steil, anstrengend und z.T. risikoreich
  - Bergführer können Ihnen mit Rat und Ausrüstung helfen
  - Bevor es losgeht, zeigt man Ihnen die wichtigsten Klettertechniken
  - Für den eigentlichen Aufstieg wählen Sie Weg und Begleiter selbst aus
  - Das anstrengende Klettern kann Ihnen niemand abnehmen
  - Manchmal übersteigt ein Pfad Ihre Kräfte und Sie müssen neu planen

Lernen ist wie eine Bergbesteigung

- **Schule entspricht einem Wanderweg bis zur Alm**
  - Breit, gut beschildert, langsamer Anstieg
  - Etwas anstrengend aber ohne nennenswerte Schwierigkeiten
  - Sie sehen den Gipfel in der Ferne, erreichen ihn aber nicht
- **Universität ist wie Kletterpfade zum Gipfel**
  - Ein Gewirr von Wegen, steil, anstrengend und z.T. risikoreich
  - Bergführer können Ihnen mit Rat und Ausrüstung helfen
  - Bevor es losgeht, zeigt man Ihnen die wichtigsten Klettertechniken
  - Für den eigentlichen Aufstieg wählen Sie Weg und Begleiter selbst aus
  - Das anstrengende Klettern kann Ihnen niemand abnehmen
  - Manchmal übersteigt ein Pfad Ihre Kräfte und Sie müssen neu planen
  - Am Ende stehen Sie oben auf dem Gipfel ... ein echtes Erfolgserlebnis

Unterschiede zur Schule

- **Ihnen begegnen ständig neue Denkweisen**

Unterschiede zur Schule

- **Ihnen begegnen ständig neue Denkweisen**
- **Zu Beginn sehr grundlagenorientiert**

Unterschiede zur Schule

- **Ihnen begegnen ständig neue Denkweisen**
- **Zu Beginn sehr grundlagenorientiert**
- **Erheblich steilerer Anstieg, höheres Niveau**

Unterschiede zur Schule

- **Ihnen begegnen ständig neue Denkweisen**
- **Zu Beginn sehr grundlagenorientiert**
- **Erheblich steilerer Anstieg, höheres Niveau**
- **Angebote – statt Zwang und Anwesenheitspflicht**

Unterschiede zur Schule

- **Ihnen begegnen ständig neue Denkweisen**
- **Zu Beginn sehr grundlagenorientiert**
- **Erheblich steilerer Anstieg, höheres Niveau**
- **Angebote – statt Zwang und Anwesenheitspflicht**
- **Sie entscheiden allein, was Sie tun**

Unterschiede zur Schule

- **Ihnen begegnen ständig neue Denkweisen**
- **Zu Beginn sehr grundlagenorientiert**
- **Erheblich steilerer Anstieg, höheres Niveau**
- **Angebote – statt Zwang und Anwesenheitspflicht**
- **Sie entscheiden allein, was Sie tun**

Eigenverantwortung und Selbstdisziplin erforderlich

Lehrziele des Universitätsstudiums

- **Selbständigkeit**

Lehrziele des Universitätsstudiums

- **Selbständigkeit**
- **Verantwortungsbewusstsein**

Lehrziele des Universitätsstudiums

- **Selbständigkeit**
- **Verantwortungsbewusstsein**
- **Berufsqualifikation**

Lehrziele des Universitätsstudiums

- **Selbständigkeit**
- **Verantwortungsbewusstsein**
- **Berufsqualifikation**
- **Teamfähigkeit**

Lehrziele des Universitätsstudiums

- **Selbständigkeit**
- **Verantwortungsbewusstsein**
- **Berufsqualifikation**
- **Teamfähigkeit**
- **Qualifikation zur wissenschaftlichen Arbeit**

Lehrziele des Universitätsstudiums

- **Selbständigkeit**
- **Verantwortungsbewusstsein**
- **Berufsqualifikation**
- **Teamfähigkeit**
- **Qualifikation zur wissenschaftlichen Arbeit**
- **… am Ende besser als wir!**

Lehrziele des Universitätsstudiums

- **Selbständigkeit**
- **Verantwortungsbewusstsein**
- **Berufsqualifikation**
- **Teamfähigkeit**
- **Qualifikation zur wissenschaftlichen Arbeit**
- **... am Ende besser als wir!**

Eigenständiges Lernen unter Anleitung

Lehr- und Lernformen

- **Selbststudium ist das wichtigste**
  - Lernen durch Bearbeitung verschiedener Quellen (Literatur, Web,...)
  - Trainieren durch Lösung von leichten und schweren Beispielaufgaben alleine und im Team mit anderen
  - Nachweis von Fähigkeiten in Prüfungen und Projekten
  - Ziel ist Verständnis eines Themengebiets (nicht nur der Vorlesung)
  - Unsere Aufgabe ist, Ihnen dabei zu helfen

Lehr- und Lernformen

- **Selbststudium ist das wichtigste**
  - Lernen durch Bearbeitung verschiedener Quellen (Literatur, Web,...)
  - Trainieren durch Lösung von leichten und schweren Beispielaufgaben alleine und im Team mit anderen
  - Nachweis von Fähigkeiten in Prüfungen und Projekten
  - Ziel ist Verständnis eines Themengebiets (nicht nur der Vorlesung)
  - Unsere Aufgabe ist, Ihnen dabei zu helfen
- **Vorlesung** Was soll ich lernen ?
  - Vorstellung und Illustration zentraler Konzepte und Zusammenhänge
  - Knapp und "unvollständig" – nur als Heranführung gedacht
  - Die Idee (Verstehen) zählt mehr als das Detail (Aufschreiben)
  - Es hilft, schon etwas über das Thema im Voraus zu lesen
  - Stellen Sie Fragen, wenn Ihnen etwas unklar ist !!
  - Nutzen Sie das optionale Tutorium zweiwöchentlich Do 11:00–12:30

Lehr- und Lernformen (II)

- **Übungen** Vertiefung und Anwendung
  - Kurzquiz als Selbsttest – verstehe ich die Konzepte?
  - Betreutes Üben in Gruppen: Bearbeitung von Aufgaben unter Anleitung
  - Klärung von Fragen allgemeinen Interesses
  - Bearbeitung von aufwändigeren Hausaufgaben: Feedback & Korrektur
    - Ziel ist verständliches Aufschreiben einer vollständigen Lösung
    - Arbeit in Gruppen sehr zu empfehlen
  - Selbst aktiv werden ist notwendig für erfolgreiches Lernen
  - Kommen Sie vorbereitet – Sie lernen mehr dabei

Lehr- und Lernformen (II)

- **Übungen** — Vertiefung und Anwendung
  - Kurzquiz als Selbsttest – verstehe ich die Konzepte?
  - Betreutes Üben in Gruppen: Bearbeitung von Aufgaben unter Anleitung
  - Klärung von Fragen allgemeinen Interesses
  - Bearbeitung von aufwändigeren Hausaufgaben: Feedback & Korrektur
    - Ziel ist verständliches Aufschreiben einer vollständigen Lösung
    - Arbeit in Gruppen sehr zu empfehlen
  - Selbst aktiv werden ist notwendig für erfolgreiches Lernen
  - Kommen Sie vorbereitet – Sie lernen mehr dabei
- **Sprechstunden** — Persönliche Beratung
  - Fachberatung zur Optimierung des individuellen Lernstils
  - Klärung von Schwierigkeiten mit der Thematik
    ... aber nicht Lösung der Hausaufgaben
  - Auch sinnvoll für bessere Studenten, die Herausforderungen suchen

Lehrinhalt: Analyse von Grundsatzfragen

- **Problemstellungen**
  - Präzisierung: Wie beschreibt man Probleme?
  - Berechenbarkeit: Ist ein Problem überhaupt lösbar?
  - Effizienz: Ist ein Problem schwer oder leicht lösbar?

Lehrinhalt: Analyse von Grundsatzfragen

- **Problemstellungen**
  - Präzisierung: Wie beschreibt man Probleme?
  - Berechenbarkeit: Ist ein Problem überhaupt lösbar?
  - Effizienz: Ist ein Problem schwer oder leicht lösbar?
- **Algorithmen: abstrakte Lösungsmethoden**
  - Was ist ein Algorithmus und welche Beschreibungsformen gibt es?
  - Welche Merkmale und Eigenschaften haben Algorithmen?
  - Wie kann man sicherstellen, daß eine Lösung korrekt ist?

Lehrinhalt: Analyse von Grundsatzfragen

- **Problemstellungen**
  - Präzisierung: Wie beschreibt man Probleme?
  - Berechenbarkeit: Ist ein Problem überhaupt lösbar?
  - Effizienz: Ist ein Problem schwer oder leicht lösbar?
- **Algorithmen: abstrakte Lösungsmethoden**
  - Was ist ein Algorithmus und welche Beschreibungsformen gibt es?
  - Welche Merkmale und Eigenschaften haben Algorithmen?
  - Wie kann man sicherstellen, daß eine Lösung korrekt ist?
- **Programme: konkrete Lösungsvorschriften**
  - Syntax: Wie kann man Sprachen beschreiben, erkennen und erzeugen?
  - Semantik: wie beschreibt man die Bedeutung von Programmen
  - Wie flexibel kann man eine Programmiersprache gestalten?

Lehrinhalt: Analyse von Grundsatzfragen

- **Problemstellungen**
  - Präzisierung: Wie beschreibt man Probleme?
  - Berechenbarkeit: Ist ein Problem überhaupt lösbar?
  - Effizienz: Ist ein Problem schwer oder leicht lösbar?
- **Algorithmen: abstrakte Lösungsmethoden**
  - Was ist ein Algorithmus und welche Beschreibungsformen gibt es?
  - Welche Merkmale und Eigenschaften haben Algorithmen?
  - Wie kann man sicherstellen, daß eine Lösung korrekt ist?
- **Programme: konkrete Lösungsvorschriften**
  - Syntax: Wie kann man Sprachen beschreiben, erkennen und erzeugen?
  - Semantik: wie beschreibt man die Bedeutung von Programmen
  - Wie flexibel kann man eine Programmiersprache gestalten?
- **Maschinen: Ausführung von "Berechnungen"**
  - Welche grundsätzlichen Typen und Merkmale von Maschinen gibt es?
  - Was können bestimmte Maschinentypen leisten?

Themen der Theoretischen Informatik

- **Automatentheorie und Formale Sprachen** TI-1
  – Endliche Automaten und Reguläre Sprachen – Lexikalische Analyse
  – Kontextfreie Sprachen und Pushdown Automaten – Syntaxanalyse
  – Turingmaschinen und allgemeine formale Sprachen

Themen der Theoretischen Informatik

- **Automatentheorie und Formale Sprachen** TI-1
  - Endliche Automaten und Reguläre Sprachen – Lexikalische Analyse
  - Kontextfreie Sprachen und Pushdown Automaten – Syntaxanalyse
  - Turingmaschinen und allgemeine formale Sprachen
- **Theorie der Berechenbarkeit** TI-2
  - Berechenbarkeitsmodelle
  - Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Unlösbare Probleme

Themen der Theoretischen Informatik

- **Automatentheorie und Formale Sprachen** TI-1
  - Endliche Automaten und Reguläre Sprachen – Lexikalische Analyse
  - Kontextfreie Sprachen und Pushdown Automaten – Syntaxanalyse
  - Turingmaschinen und allgemeine formale Sprachen
- **Theorie der Berechenbarkeit** TI-2
  - Berechenbarkeitsmodelle
  - Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Unlösbare Probleme
- **Komplexitätstheorie** TI-2
  - Komplexitätsmaße und -klassen für Algorithmen und Probleme
  - Nicht handhabbare Probleme ($\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)
  - Effiziente Alternativen zu konventionellen Verfahren

Der Lehrstoff

- **Reihenfolge und Notation folgt Leittext**
  - J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman: *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie, Pearson 2002*

Der Lehrstoff

- **Reihenfolge und Notation folgt Leittext**
  - J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman: *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie, Pearson 2002*
  - Vorlesungsfolien sind im Voraus auf dem Webserver erhältlich

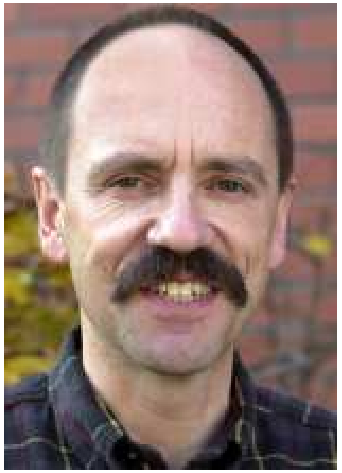
Der Lehrstoff

- **Reihenfolge und Notation folgt Leittext**
  - J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman: *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie, Pearson 2002*
  - Vorlesungsfolien sind im Voraus auf dem Webserver erhältlich
- **Lesenswerte Zusatzliteratur**
  - G. Vossen, K.-U. Witt: *Grundkurs Theoretische Informatik. Vieweg 2004*
  - P. Leypold: *Schneller Studieren. Pearson 2005*
  - M. Sipser: *Introduction to the Theory of Computation. PWS 1997*
  - A. Asteroth, C. Baier: *Theoretische Informatik, Pearson 2002*

Der Lehrstoff

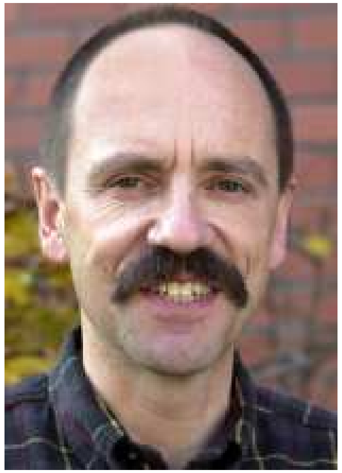
- **Reihenfolge und Notation folgt Leittext**
  - J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman: *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie, Pearson 2002*
  - Vorlesungsfolien sind im Voraus auf dem Webserver erhältlich
- **Lesenswerte Zusatzliteratur**
  - G. Vossen, K.-U. Witt: *Grundkurs Theoretische Informatik. Vieweg 2004*
  - P. Leypold: *Schneller Studieren. Pearson 2005*
  - M. Sipser: *Introduction to the Theory of Computation. PWS 1997*
  - A. Asteroth, C. Baier: *Theoretische Informatik, Pearson 2002*
  - I. Wegener: *Theoretische Informatik, Teubner Verlag 1993*
  - U. Schöning: *Theoretische Informatik - kurzgefaßt, Spektrum-Verlag 1994*
  - K. Erk, L. Priese: *Theoretische Informatik, Springer Verlag 2000*
  - H. Lewis, C. Papadimitriou: *Elements of the Theory of Computation, PHl 1998*
  - Mitschriften aus früheren Semestern benutzen andere Notationen

Das Team



Christoph Kreitz
Raum 1.18, Telephon 3060
kreitz@cs.uni-potsdam.de

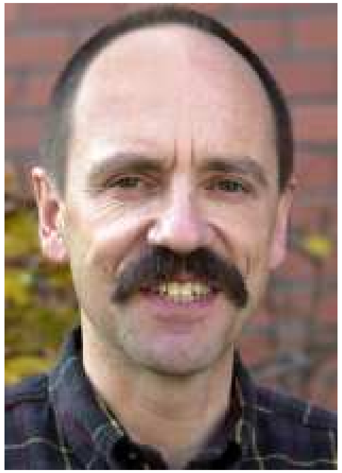
Das Team



Christoph Kreitz
Raum 1.18, Telephon 3060
`kreitz@cs.uni-potsdam.de`

Kirstin Peters
Raum 1.22, Telephon 3068
`peters.kirstin@web.de`

Das Team



Christoph Kreitz
Raum 1.18, Telephon 3060
kreitz@cs.uni-potsdam.de

Kirstin Peters
Raum 1.22, Telephon 3068
peters.kirstin@web.de

Tutoren

Marcel Goehring	Jan Schwarz
Ellen König	Jens Steinborn
Marius Schneider	Holger Trölenberg

Organisatorisches

- **Zielgruppe: ab 3. Semester (!)**
  - Bei guten mathematischen Vorkenntnissen auch ab dem 1. Semester
  - Oft ist es sinnvoller erst an Mathematikveranstaltungen teilzunehmen

Organisatorisches

- **Zielgruppe: ab 3. Semester (!)**
  - Bei guten mathematischen Vorkenntnissen auch ab dem 1. Semester
  - Oft ist es sinnvoller erst an Mathematikveranstaltungen teilzunehmen
- **Vorlesung** (Wird aufgezeichnet und ins Internet gestellt)
  - Wöchentlich Fr 11:00–12:30

Organisatorisches

- **Zielgruppe: ab 3. Semester (!)**
  - Bei guten mathematischen Vorkenntnissen auch ab dem 1. Semester
  - Oft ist es sinnvoller erst an Mathematikveranstaltungen teilzunehmen
- **Vorlesung** (Wird aufgezeichnet und ins Internet gestellt)
  - Wöchentlich Fr 11:00–12:30
- **Tutorium** (Besprechung allgemeiner Fragen)
  - Jede zweite Woche Do 11:00–12:30

Organisatorisches

- **Zielgruppe: ab 3. Semester (!)**
  - Bei guten mathematischen Vorkenntnissen auch ab dem 1. Semester
  - Oft ist es sinnvoller erst an Mathematikveranstaltungen teilzunehmen
- **Vorlesung** (Wird aufgezeichnet und ins Internet gestellt)
  - Wöchentlich Fr 11:00–12:30
- **Tutorium** (Besprechung allgemeiner Fragen)
  - Jede zweite Woche Do 11:00–12:30
- **Übungen**
  - 6 Gruppen, wöchentlich (Montags & Dienstags) je 2 Stunden

Organisatorisches

- **Zielgruppe: ab 3. Semester (!)**
  - Bei guten mathematischen Vorkenntnissen auch ab dem 1. Semester
  - Oft ist es sinnvoller erst an Mathematikveranstaltungen teilzunehmen
- **Vorlesung** (Wird aufgezeichnet und ins Internet gestellt)
  - Wöchentlich Fr 11:00–12:30
- **Tutorium** (Besprechung allgemeiner Fragen)
  - Jede zweite Woche Do 11:00–12:30
- **Übungen**
  - 6 Gruppen, wöchentlich (Montags & Dienstags) je 2 Stunden
- **Sprechstunden**
  - C. Kreitz: Mi 9:30–10:30 . . . , und immer wenn die Türe offen ist
  - K. Peters: Do 12:30–13:30 und nach Vereinbarung
  - Tutoren: individuell in Übungsgruppen vereinbaren

Leistungserfassung

- **Eine Klausur entscheidet die Note**
  - Hauptklausur Anfang April (Ende vorlesungsfreie Zeit)
  - Probeklausur Ende Dezember (geht nicht in Bewertung ein)

Leistungserfassung

- **Eine Klausur entscheidet die Note**
  - Hauptklausur Anfang April (Ende vorlesungsfreie Zeit)
  - Probeklausur Ende Dezember (geht nicht in Bewertung ein)
- **Zulassung zur Klausur**
  - 50% der Punkte in den Hausaufgaben
    - Gruppen bis 4 Studenten dürfen gemeinsame Lösungen abgeben
    - Gruppen dürfen sich nur nach Rücksprache mit Frau Peters ändern
  - Quiz und Probeklausur zählen jeweils wie ein Hausaufgabenblatt

Leistungserfassung

- **Eine Klausur entscheidet die Note**
  - Hauptklausur Anfang April (Ende vorlesungsfreie Zeit)
  - Probeklausur Ende Dezember (geht nicht in Bewertung ein)
- **Zulassung zur Klausur**
  - 50% der Punkte in den Hausaufgaben
    - Gruppen bis 4 Studenten dürfen gemeinsame Lösungen abgeben
    - Gruppen dürfen sich nur nach Rücksprache mit Frau Peters ändern
  - Quiz und Probeklausur zählen jeweils wie ein Hausaufgabenblatt
- **Vorbereitung auf die Klausur**
  - Kurzquiz in jeder Übungsstunde ernsthaft bearbeiten
  - Eigenständige Lösung von Haus- und Übungsaufgaben
  - Feedback durch Korrektur der Hausaufgaben und der Probeklausur
  - Klärung von Fragen in Übung und Sprechstunden

Leistungserfassung

- **Eine Klausur entscheidet die Note**
  - Hauptklausur Anfang April (Ende vorlesungsfreie Zeit)
  - Probeklausur Ende Dezember (geht nicht in Bewertung ein)
- **Zulassung zur Klausur**
  - 50% der Punkte in den Hausaufgaben
    - Gruppen bis 4 Studenten dürfen gemeinsame Lösungen abgeben
    - Gruppen dürfen sich nur nach Rücksprache mit Frau Peters ändern
  - Quiz und Probeklausur zählen jeweils wie ein Hausaufgabenblatt
- **Vorbereitung auf die Klausur**
  - Kurzquiz in jeder Übungsstunde ernsthaft bearbeiten
  - Eigenständige Lösung von Haus- und Übungsaufgaben
  - Feedback durch Korrektur der Hausaufgaben und der Probeklausur
  - Klärung von Fragen in Übung und Sprechstunden

Fangen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung an

Welche Vorkenntnisse sollten Sie mitbringen ?

Eine gute Oberstufenmathematik reicht aus

Welche Vorkenntnisse sollten Sie mitbringen ?

Eine gute Oberstufenmathematik reicht aus

- **Verständnis mathematischer Konzepte**
  - Elementare Mengentheorie und die Gesetze von $\{x|P(x)\}$, $\cup$, $\cap$
  - Bezug zwischen Mengen, Relationen und Funktionen
  - Datenstrukturen wie Listen, Wörter, Graphen, Bäume …
  - Elementare Gesetze der Algebra und Logik
  - Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung
  - Zusammenhang zwischen formaler und informaler Beschreibung

  Nötiges Vokabular wird bei Bedarf kurz vorgestellt/wiederholt/eingeübt

Welche Vorkenntnisse sollten Sie mitbringen ?

Eine gute Oberstufenmathematik reicht aus

- **Verständnis mathematischer Konzepte**
  – Elementare Mengentheorie und die Gesetze von $\{x|P(x)\}$, $\cup$, $\cap$
  – Bezug zwischen Mengen, Relationen und Funktionen
  – Datenstrukturen wie Listen, Wörter, Graphen, Bäume ...
  – Elementare Gesetze der Algebra und Logik
  – Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung
  – Zusammenhang zwischen formaler und informaler Beschreibung

  Nötiges Vokabular wird bei Bedarf kurz vorgestellt/wiederholt/eingeübt

- **Verständnis mathematischer Beweismethoden**

  Informatiker müssen Korrektheit von Programmen beweisen können
  – Deduktive Beweise für Analyse von Befehlssequenzen
  – Induktionsbeweise für Analyse von Rekursion / Schleifen
  – Widerlegungsbeweise und Gegenbeispiele für Unmöglichkeitsaussagen

Wichtige Beweismethoden

Zeige, daß Behauptung B aus Annahmen A folgt

Wichtige Beweismethoden

Zeige, daß Behauptung *B* aus Annahmen *A* folgt

- **Deduktiver Beweis:**
  - Aneinanderkettung von Argumenten / Aussagen $A_1, A_2, ..., A_n = B$
  - Zwischenaussagen A_i müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
  - Verwendet werden dürfen nur Annahmen aus A, mathematische Grundgesetze, bereits bewiesene Aussagen und logische Schlußfolgerungen

Zeige, daß Behauptung B aus Annahmen A folgt

- **Deduktiver Beweis:**
  - Aneinanderkettung von Argumenten / Aussagen $A_1, A_2, ..., A_n = B$
  - Zwischenaussagen A_i müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
  - Verwendet werden dürfen nur Annahmen aus A, mathematische Grundgesetze, bereits bewiesene Aussagen und logische Schlußfolgerungen

Beispiel: *"Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade"*

Aussage	Begründung
1. $a = 2x + 1$	Gegeben (Auflösung des Begriffs "ungerade")
2. $b = 2y + 1$	Gegeben (Auflösung des Begriffs "ungerade")
3. $a + b = 2(x + y + 1)$	(1,2) und Gesetze der Arithmetik

Wichtige Beweismethoden

Zeige, daß Behauptung B aus Annahmen A folgt

- **Deduktiver Beweis:**
  - Aneinanderkettung von Argumenten / Aussagen $A_1, A_2, \ldots, A_n = B$
  - Zwischenaussagen A_i müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
  - Verwendet werden dürfen nur Annahmen aus A, mathematische Grundgesetze, bereits bewiesene Aussagen und logische Schlußfolgerungen

  Beispiel: *"Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade"*

Aussage	Begründung
1. $a = 2x + 1$	Gegeben (Auflösung des Begriffs "ungerade")
2. $b = 2y + 1$	Gegeben (Auflösung des Begriffs "ungerade")
3. $a + b = 2(x + y + 1)$	(1,2) und Gesetze der Arithmetik

- **Beweis durch Kontraposition**
  - Beweise, daß nicht A aus der Annahme nicht B folgt
  - $\neg B \Rightarrow \neg A$ ist aussagenlogisch äquivalent zu $A \Rightarrow B$

Wichtige Beweismethoden

Zeige, daß Behauptung B aus Annahmen A folgt

- **Deduktiver Beweis:**
  - Aneinanderkettung von Argumenten / Aussagen $A_1, A_2, ..., A_n = B$
  - Zwischenaussagen A_i müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
  - Verwendet werden dürfen nur Annahmen aus A, mathematische Grundgesetze, bereits bewiesene Aussagen und logische Schlußfolgerungen

  Beispiel: *“Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade”*

Aussage	Begründung
1. $a = 2x + 1$	Gegeben (Auflösung des Begriffs “ungerade”)
2. $b = 2y + 1$	Gegeben (Auflösung des Begriffs “ungerade”)
3. $a + b = 2(x + y + 1)$	(1,2) und Gesetze der Arithmetik

- **Beweis durch Kontraposition**
  - Beweise, daß nicht A aus der Annahme nicht B folgt
  - $\neg B \Rightarrow \neg A$ ist aussagenlogisch äquivalent zu $A \Rightarrow B$
- **Indirekte Beweisführung**
  - Aus A und nicht B folgt ein Widerspruch (äquivalent zu $A \Rightarrow B$)

Wichtige Beweismethoden (II)

- **Widerlegungsbeweise: Zeige, daß A nicht gilt**
  - Widerspruchsbeweis: Zeige, daß aus Annahme A ein Widerspruch folgt
  - Gegenbeispiele beweisen, daß A nicht allgemeingültig ist

Wichtige Beweismethoden (II)

- **Widerlegungsbeweise: Zeige, daß A nicht gilt**
  - Widerspruchsbeweis: Zeige, daß aus Annahme A ein Widerspruch folgt
  - Gegenbeispiele beweisen, daß A nicht allgemeingültig ist
- **Induktionsbeweise: Zeige, daß A für alle x gilt**

  Standardinduktion (auf natürlichen Zahlen):

  Gilt A für i und folgt A für $n+1$, wenn A für n gilt, so gilt A für alle $n \geq i$

Wichtige Beweismethoden (II)

- **Widerlegungsbeweise: Zeige, daß A nicht gilt**
  - Widerspruchsbeweis: Zeige, daß aus Annahme A ein Widerspruch folgt
  - Gegenbeispiele beweisen, daß A nicht allgemeingültig ist

- **Induktionsbeweise: Zeige, daß A für alle x gilt**

  Standardinduktion (auf natürlichen Zahlen):

  Gilt A für i und folgt A für $n+1$, wenn A für n gilt, so gilt A für alle $n \geq i$

  Vollständige Induktion:

  Folgt A für n, wenn A für alle $j<n$ mit $j \geq i$ gilt, dann gilt A für alle $n \geq i$

Wichtige Beweismethoden (II)

- **Widerlegungsbeweise: Zeige, daß A nicht gilt**
  - Widerspruchsbeweis: Zeige, daß aus Annahme A ein Widerspruch folgt
  - Gegenbeispiele beweisen, daß A nicht allgemeingültig ist

- **Induktionsbeweise: Zeige, daß A für alle x gilt**

  Standardinduktion (auf natürlichen Zahlen):

  Gilt A für i und folgt A für $n+1$, wenn A für n gilt, so gilt A für alle $n \geq i$

  Vollständige Induktion:

  Folgt A für n, wenn A für alle $j<n$ mit $j \geq i$ gilt, dann gilt A für alle $n \geq i$

  Strukturelle Induktion (auf Datentypen wie Listen, Bäumen, Wörtern):

  Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

Wichtige Beweismethoden (II)

- **Widerlegungsbeweise: Zeige, daß A nicht gilt**
  - Widerspruchsbeweis: Zeige, daß aus Annahme A ein Widerspruch folgt
  - Gegenbeispiele beweisen, daß A nicht allgemeingültig ist

- **Induktionsbeweise: Zeige, daß A für alle x gilt**

  Standardinduktion (auf natürlichen Zahlen):

  Gilt A für i und folgt A für $n+1$, wenn A für n gilt, so gilt A für alle $n \geq i$

  Vollständige Induktion:

  Folgt A für n, wenn A für alle $j<n$ mit $j \geq i$ gilt, dann gilt A für alle $n \geq i$

  Strukturelle Induktion (auf Datentypen wie Listen, Bäumen, Wörtern):

  Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

  Gegenseitige oder simultane Induktion

  Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen gleichzeitig in einer Induktion

Wichtige Beweismethoden (II)

- **Widerlegungsbeweise: Zeige, daß A nicht gilt**
  – Widerspruchsbeweis: Zeige, daß aus Annahme A ein Widerspruch folgt
  – Gegenbeispiele beweisen, daß A nicht allgemeingültig ist

- **Induktionsbeweise: Zeige, daß A für alle x gilt**

  Standardinduktion (auf natürlichen Zahlen):

  Gilt A für i und folgt A für $n+1$, wenn A für n gilt, so gilt A für alle $n \geq i$

  Vollständige Induktion:

  Folgt A für n, wenn A für alle $j < n$ mit $j \geq i$ gilt, dann gilt A für alle $n \geq i$

  Strukturelle Induktion (auf Datentypen wie Listen, Bäumen, Wörtern):

  Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

  Gegenseitige oder simultane Induktion

  Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen gleichzeitig in einer Induktion

Mehr dazu im Anhang

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

- Genau genug, um Details rekonstruieren zu können

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

- Genau genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

- Genau genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Text muß lesbar und klar verständlich sein und präzise Sprache verwenden

  Formeln und Textfragmente ohne erkennbaren Sinn aneinanderzureihen ist unakzeptabel

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

- Genau genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Text muß lesbar und klar verständlich sein und präzise Sprache verwenden

  Formeln und Textfragmente ohne erkennbaren Sinn aneinanderzureihen ist unakzeptabel
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

- Genau genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Text muß lesbar und klar verständlich sein und präzise Sprache verwenden
  Formeln und Textfragmente ohne erkennbaren Sinn aneinanderzureihen ist unakzeptabel
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

- Genau genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Text muß lesbar und klar verständlich sein und präzise Sprache verwenden
  Formeln und Textfragmente ohne erkennbaren Sinn aneinanderzureihen ist unakzeptabel
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, dass Sie nichts mehr falsch machen können

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

- Genau genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Text muß lesbar und klar verständlich sein und präzise Sprache verwenden
  Formeln und Textfragmente ohne erkennbaren Sinn aneinanderzureihen ist unakzeptabel
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, dass Sie nichts mehr falsch machen können
  … es reicht nicht, dass Sie es einmal richtig gemacht haben

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

- Genau genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Text muß lesbar und klar verständlich sein und präzise Sprache verwenden
  Formeln und Textfragmente ohne erkennbaren Sinn aneinanderzureihen ist unakzeptabel
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, dass Sie nichts mehr falsch machen können
  ... es reicht nicht, dass Sie es einmal richtig gemacht haben

---

- Tip: ausführliche Lösungen entwickeln, bis Sie genug Erfahrung haben.
  Bei Präsentation für Andere zentrale Gedanken aus Lösung extrahieren

Was ist eigentlich ein Beweis?

"Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt"

- Genau genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Text muß lesbar und klar verständlich sein und präzise Sprache verwenden
  Formeln und Textfragmente ohne erkennbaren Sinn aneinanderzureihen ist unakzeptabel
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, dass Sie nichts mehr falsch machen können
  ... es reicht nicht, dass Sie es einmal richtig gemacht haben

---

- Tip: ausführliche Lösungen entwickeln, bis Sie genug Erfahrung haben.
  Bei Präsentation für Andere zentrale Gedanken aus Lösung extrahieren
- Test: verstehen Ihre Kommilitonen Ihre Lösung und warum sie funktioniert?

Nutzen Sie Ihre Chancen!

- **Theorie ist bedeutender als viele glauben**
  - Ist Theorie langweilig? überflüssig? unverständlich? …eine Plage?
  - Alle großen Softwareprojekte benutzten theoretische Modelle
  - Ohne theoretische Kenntnisse begehen Sie viele elementare Fehler
  - Theorie kann durchaus sehr interessant sein

Nutzen Sie Ihre Chancen!

- **Theorie ist bedeutender als viele glauben**
  - Ist Theorie langweilig? überflüssig? unverständlich? ...eine Plage?
  - Alle großen Softwareprojekte benutzten theoretische Modelle
  - Ohne theoretische Kenntnisse begehen Sie viele elementare Fehler
  - Theorie kann durchaus sehr interessant sein
- **Es geht um mehr als nur bestehen**
  - Das wichtige ist Verstehen
  - Sie können jetzt umsonst lernen, was später teure Lehrgänge benötigt
  - Wann kommen Sie je wieder mit den Besten des Gebietes in Kontakt?

Nutzen Sie Ihre Chancen!

- **Theorie ist bedeutender als viele glauben**
  - Ist Theorie langweilig? überflüssig? unverständlich? …eine Plage?
  - Alle großen Softwareprojekte benutzten theoretische Modelle
  - Ohne theoretische Kenntnisse begehen Sie viele elementare Fehler
  - Theorie kann durchaus sehr interessant sein
- **Es geht um mehr als nur bestehen**
  - Das wichtige ist Verstehen
  - Sie können jetzt umsonst lernen, was später teure Lehrgänge benötigt
  - Wann kommen Sie je wieder mit den Besten des Gebietes in Kontakt?
- **Die Türe steht offen**
  - Lernfrust und mangelnder Durchblick sind normal aber heilbar
  - Kommen Sie in die Sprechstunden und stellen Sie Fragen

Vertrauen ist ein kostbares Gut

... missbrauchen Sie es nicht

Vertrauen ist ein kostbares Gut

… missbrauchen Sie es nicht

- **Abschreiben fremder Lösungen bringt nichts**
  - Sie lernen nichts dabei – weder Inhalt noch Durchhaltevermögen
  - Sie erkennen Ihre Lücken nicht und nehmen Hilfe zu spät wahr
  - Sie werden nie ein echtes Erfolgserlebnis haben
  - Es schadet Ihrer persönlichen Entwicklung

Vertrauen ist ein kostbares Gut

... missbrauchen Sie es nicht

- **Abschreiben fremder Lösungen bringt nichts**
  - Sie lernen nichts dabei – weder Inhalt noch Durchhaltevermögen
  - Sie erkennen Ihre Lücken nicht und nehmen Hilfe zu spät wahr
  - Sie werden nie ein echtes Erfolgserlebnis haben
  - Es schadet Ihrer persönlichen Entwicklung
- **Wir vertrauen Ihrer Ehrlichkeit**
  - Benutzen Sie externe Ideen (Bücher/Internet) nur mit Quellenangabe
  - Benutzen Sie keine Lösungen von Kommilitonen
  - Geben Sie keine Lösungen an Kommilitonen weiter

  Klausurlösungen sollten ausschließlich Ihre eigenen sein

  Keine "Überwachung", aber wenn es dennoch auffliegt . . .

Vertrauen ist ein kostbares Gut

… missbrauchen Sie es nicht

- **Abschreiben fremder Lösungen bringt nichts**
  - Sie lernen nichts dabei – weder Inhalt noch Durchhaltevermögen
  - Sie erkennen Ihre Lücken nicht und nehmen Hilfe zu spät wahr
  - Sie werden nie ein echtes Erfolgserlebnis haben
  - Es schadet Ihrer persönlichen Entwicklung
- **Wir vertrauen Ihrer Ehrlichkeit**
  - Benutzen Sie externe Ideen (Bücher/Internet) nur mit Quellenangabe
  - Benutzen Sie keine Lösungen von Kommilitonen
  - Geben Sie keine Lösungen an Kommilitonen weiter

  Klausurlösungen sollten ausschließlich Ihre eigenen sein

  Keine "Überwachung", aber wenn es dennoch auffliegt …
- **Mehr zur Arbeitsethik auf unseren Webseiten**

ANHANG

Theoretische Informatik I

Lektion 0

Mathematische Methodik

1. Problemlösen
2. Beweistechniken
3. Wichtige Grundbegriffe

- **Klärung der Voraussetzungen**
  - Welche Begriffe sind zum Verständnis des Problems erforderlich?
  - Erstellung eines präzisen Modells: abstrahiere von Details
  - Formulierung des Problems im Modell: was genau ist zu tun?

Methodik des Problemlösens

- **Klärung der Voraussetzungen**
  - Welche Begriffe sind zum Verständnis des Problems erforderlich?
  - Erstellung eines präzisen Modells: abstrahiere von Details
  - Formulierung des Problems im Modell: was genau ist zu tun?
- **Lösungsweg konkretisieren**
  - Welche Einzelschritte benötigt man, um das Problem zu lösen?
  - Welches Gesamtergebnis ergibt sich aus den Einzelschritten?
  - Wie beweist man die Korrektheit des Gesamtergebnisses?

Methodik des Problemlösens

- **Klärung der Voraussetzungen**
  – Welche Begriffe sind zum Verständnis des Problems erforderlich?
  – Erstellung eines präzisen Modells: abstrahiere von Details
  – Formulierung des Problems im Modell: was genau ist zu tun?
- **Lösungsweg konkretisieren**
  – Welche Einzelschritte benötigt man, um das Problem zu lösen?
  – Welches Gesamtergebnis ergibt sich aus den Einzelschritten?
  – Wie beweist man die Korrektheit des Gesamtergebnisses?
- **Lösung zusammenfassen**
  – Kurz und prägnant: Argumente auf das Wesentliche beschränken
  – Umgangssprache durch mathematisch präzise Formulierungen ersetzen

Modelle für Berechnung und Sprachen

- **Automaten**: **Abarbeitung von Eingaben**

Modelle für Berechnung und Sprachen

- **Automaten: Abarbeitung von Eingaben**
  - z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben

  - 2 Zustände: aus, ein

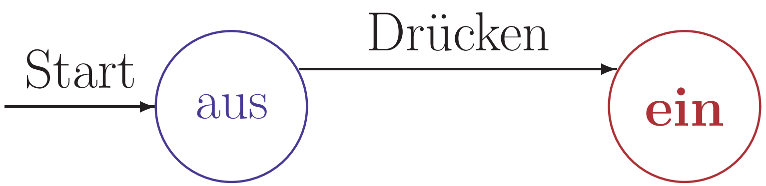
Modelle für Berechnung und Sprachen

- **Automaten: Abarbeitung von Eingaben**
  - z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von "Drück"-Eingaben

  - 2 Zustände: aus, ein – 1 Startzustand: aus

Modelle für Berechnung und Sprachen

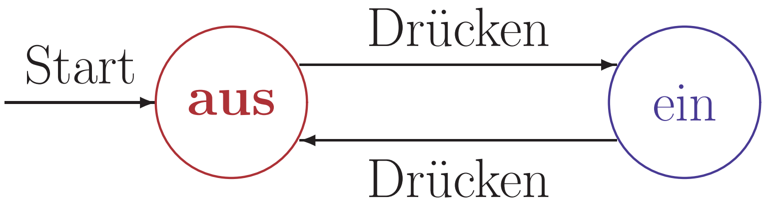
- **Automaten: Abarbeitung von Eingaben**
  - z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von "Drück"-Eingaben



  - 2 Zustände: aus, ein – 1 Startzustand: aus
  - 1 Eingabesymbol: Drücken

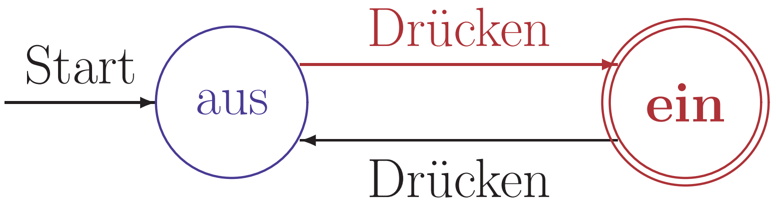
Modelle für Berechnung und Sprachen

- **Automaten: Abarbeitung von Eingaben**
  - z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben



  - 2 Zustände: aus, ein – 1 Startzustand: aus
  - 1 Eingabesymbol: Drücken

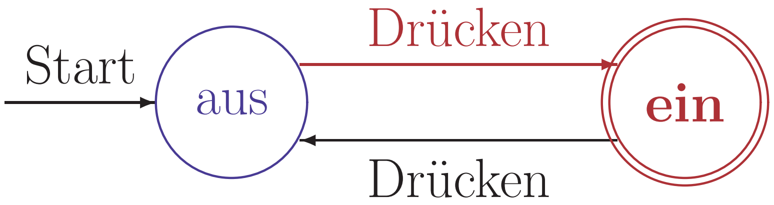
- **Automaten: Abarbeitung von Eingaben**
  - z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben



  - 2 Zustände: aus, ein – 1 Startzustand: aus
  - 1 Eingabesymbol: Drücken
  - 1 Endzustand: ein — wird erreicht bei ungerader Anzahl von Drücken

Modelle für Berechnung und Sprachen

- **Automaten: Abarbeitung von Eingaben**
  - z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben

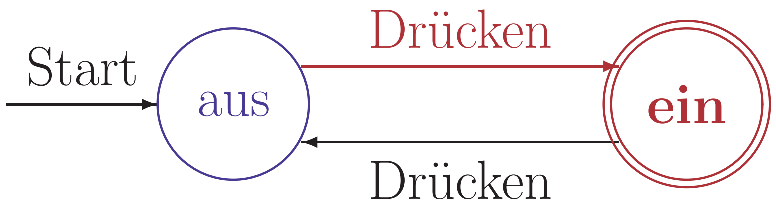


  - 2 Zustände: aus, ein – 1 Startzustand: aus
  - 1 Eingabesymbol: Drücken
  - 1 Endzustand: ein — wird erreicht bei ungerader Anzahl von Drücken

- **Grammatiken: Vorschriften für Spracherzeugung**
  - z.B.: $S \longrightarrow$ Drücken, $S \longrightarrow S$DrückenDrücken
  - Erzeugt nur ungerade Anzahl von Drücken-Symbolen

Modelle für Berechnung und Sprachen

- **Automaten: Abarbeitung von Eingaben**
  - z.B. Wechselschalter: Verarbeitung von “Drück”-Eingaben



  - 2 Zustände: aus, ein – 1 Startzustand: aus
  - 1 Eingabesymbol: Drücken
  - 1 Endzustand: ein — wird erreicht bei ungerader Anzahl von Drücken

- **Grammatiken: Vorschriften für Spracherzeugung**
  - z.B.: $S \longrightarrow$ Drücken, $S \longrightarrow S$DrückenDrücken
  - Erzeugt nur ungerade Anzahl von Drücken-Symbolen

- **Reguläre Ausdrücke: algebraische Strukturen**
  - z.B.: (DrückenDrücken)*Drücken

Formale Beweise in der Informatik

- **Testen von Programmen ist unzureichend**
  - Nur hilfreich zur Entdeckung grober Fehler
  - Viele kleine, aber gravierende Fehler fallen durch das Testraster
    - Pentium Bug (1994), Ariane 5 (1996), Mars Polar Lander (1999), ...

Formale Beweise in der Informatik

- **Testen von Programmen ist unzureichend**
  - Nur hilfreich zur Entdeckung grober Fehler
  - Viele kleine, aber gravierende Fehler fallen durch das Testraster
    - Pentium Bug (1994), Ariane 5 (1996), Mars Polar Lander (1999), ...
- **Kritische Programme muss man "beweisen"**
  - Erfolgreicher Beweis zeigt genau, wie das Programm arbeitet
  - Erfolgloser Beweisversuch deutet auf mögliche Fehler im Programm
  - Jeder Informatiker sollte die eigenen Programme beweisen

Formale Beweise in der Informatik

- **Testen von Programmen ist unzureichend**
  - Nur hilfreich zur Entdeckung grober Fehler
  - Viele kleine, aber gravierende Fehler fallen durch das Testraster
    - Pentium Bug (1994), Ariane 5 (1996), Mars Polar Lander (1999), ...
- **Kritische Programme muss man “beweisen”**
  - Erfolgreicher Beweis zeigt genau, wie das Programm arbeitet
  - Erfolgloser Beweisversuch deutet auf mögliche Fehler im Programm
  - Jeder Informatiker sollte die eigenen Programme beweisen
- **Jeder Informatiker muss Beweise verstehen**
  - Deduktive Beweise für sequentielle Verarbeitung
  - Induktionsbeweise für Rekursion / Schleifen
  - Widerlegungsbeweise und Gegenbeispiele für Unmöglichkeitsaussagen

Formale Beweise in der Informatik

- **Testen von Programmen ist unzureichend**
  - Nur hilfreich zur Entdeckung grober Fehler
  - Viele kleine, aber gravierende Fehler fallen durch das Testraster
    - Pentium Bug (1994), Ariane 5 (1996), Mars Polar Lander (1999), ...
- **Kritische Programme muss man "beweisen"**
  - Erfolgreicher Beweis zeigt genau, wie das Programm arbeitet
  - Erfolgloser Beweisversuch deutet auf mögliche Fehler im Programm
  - Jeder Informatiker sollte die eigenen Programme beweisen
- **Jeder Informatiker muss Beweise verstehen**
  - Deduktive Beweise für sequentielle Verarbeitung
  - Induktionsbeweise für Rekursion / Schleifen
  - Widerlegungsbeweise und Gegenbeispiele für Unmöglichkeitsaussagen

Wie führt man stichhaltige Beweise?

Behauptungen: Ausgangspunkt jedes Beweises

- **Wenn–Dann Aussagen:**
  - Eine Konklusion folgt aus einer oder mehreren Hypothesen (Annahmen)
  - z.B. "*Wenn* $\boldsymbol{x \geq 4}$, *dann* $\boldsymbol{2^x \geq x^2}$"
  - Auch: H *impliziert* K, *aus* H *folgt* K, K *wenn* H, $H \Rightarrow K$
  - Achtung: wenn K gilt, muss H nicht der Grund sein

Behauptungen: Ausgangspunkt jedes Beweises

- **Wenn–Dann Aussagen:**
  - Eine Konklusion folgt aus einer oder mehreren Hypothesen (Annahmen)
  - z.B. "*Wenn* $\boldsymbol{x \geq 4}$, *dann* $\boldsymbol{2^x \geq x^2}$"
  - Auch: H *impliziert* K, *aus* H *folgt* K, K *wenn* H, $H \Rightarrow K$
  - Achtung: wenn K gilt, muss H nicht der Grund sein

  Fast alle Behauptungen haben diese Form
  - Hypothesen sind zuweilen implizit oder ergeben sich aus dem Kontext
  - z.B. "$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$" hat implizite Hypothese "*θ ist ein Winkel*"

Behauptungen: Ausgangspunkt jedes Beweises

- **Wenn–Dann Aussagen:**
  - Eine Konklusion folgt aus einer oder mehreren Hypothesen (Annahmen)
  - z.B. "*Wenn* $\boldsymbol{x \geq 4}$, *dann* $\boldsymbol{2^x \geq x^2}$"
  - Auch: H *impliziert* K, *aus* H *folgt* K, K *wenn* H, $H \Rightarrow K$
  - Achtung: wenn K gilt, muss H nicht der Grund sein

  Fast alle Behauptungen haben diese Form
  - Hypothesen sind zuweilen implizit oder ergeben sich aus dem Kontext
  - z.B. "$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$" hat implizite Hypothese "*θ ist ein Winkel*"

- **Genau dann, wenn Aussagen**
  - Aussagen A und B sind äquivalent ($A \Leftrightarrow B$, $A \equiv B$, A *iff* B (engl.))
  - z.B. "$x^2 = 1$ *genau dann, wenn* $x = 1$"
  - Gleichwertig mit $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1
  - Aus der Annahme folgt damit, dass $x \geq 4$ sein muss

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1
  - Aus der Annahme folgt damit, dass $x \geq 4$ sein muss
  - Wir benutzen den Satz "*Wenn $x \geq 4$, dann $2^x \geq x^2$*" HMU Satz 1.3, Folie 14

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1
  - Aus der Annahme folgt damit, dass $x \geq 4$ sein muss
  - Wir benutzen den Satz "*Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$" HMU Satz 1.3, Folie 14
    und schließen daraus, dass $2^x \geq x^2$ gilt

Beispiel eines deduktiven Beweises

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

- **Informaler Beweis**
  - Es sei x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen
  - Das Quadrat jeder positiven ganzen Zahl ist mindestens 1
  - Aus der Annahme folgt damit, dass $x \geq 4$ sein muss
  - Wir benutzen den Satz "*Wenn $x \geq 4$, dann $2^x \geq x^2$*" HMU Satz 1.3, Folie 14 und schließen daraus, dass $2^x \geq x^2$ gilt
- **Beweis in schematischer Darstellung**

	Aussage	Begründung
1.	$x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	Gegeben
2.	$a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$	Gegeben
3.	$a^2 \geq 1, b^2 \geq 1, c^2 \geq 1, d^2 \geq 1$	(2) und Gesetze der Arithmetik
4.	$x \geq 4$	(1), (3) und Gesetze der Arithmetik
5.	$2^x \geq x^2$	(4) und HMU Satz 1.3, Folie 14

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis** $\hat{=}$ **Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit Menge der Annahmen

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  – Beginne mit Menge der Annahmen
  – Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus vorhergehenden Aussagen

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit Menge der Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  – Beginne mit Menge der Annahmen
  – Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus vorhergehenden Aussagen
  – Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit Menge der Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt
- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluss: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit Menge der Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluss: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze, z.B. aus der Arithmetik

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit Menge der Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluss: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze, z.B. aus der Arithmetik
  - Bereits bewiesene Sätze

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit Menge der Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluss: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze, z.B. aus der Arithmetik
  - Bereits bewiesene Sätze
  - Auflösung von Definitionen

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit Menge der Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluss: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze, z.B. aus der Arithmetik
  - Bereits bewiesene Sätze
  - Auflösung von Definitionen
  - Extensionalität von Mengen: $M{=}M' \quad\Leftrightarrow\quad M{\subseteq}M' \wedge M'{\subseteq}M$

$$M{\subseteq}M' \quad\Leftrightarrow\quad (\forall x)\, x \in M \Rightarrow x \in M'$$

Deduktive Beweisführung

Logische Schritte von Annahmen zur Konklusion

- **Beweis $\hat{=}$ Folge von Zwischenaussagen**
  - Beginne mit Menge der Annahmen
  - Jede Zwischenaussage folgt schlüssig aus vorhergehenden Aussagen
  - Konklusion ergibt sich als letzter Beweisschritt

- **Zulässige Argumente in Beweisschritten**
  - Logischer Schluss: Sind A und $A \Rightarrow B$ bekannt, kann B gefolgert werden
  - Bekannte mathematische Grundgesetze, z.B. aus der Arithmetik
  - Bereits bewiesene Sätze
  - Auflösung von Definitionen
  - Extensionalität von Mengen: $M{=}M' \quad\Leftrightarrow\quad M{\subseteq}M' \wedge M'{\subseteq}M$
    $M{\subseteq}M' \quad\Leftrightarrow\quad (\forall x)\, x \in M \;\Rightarrow\; x \in M'$
  - Gleichheit von Zahlen: $x{=}y \quad\Leftrightarrow\quad$ weder $x{<}y$ noch $x{>}y$

Beispiel für Auflösung von Definitionen

Wenn S endliche Teilmenge einer Menge U ist und das Komplement von S bezüglich U endlich ist, dann ist U endlich

Beispiel für Auflösung von Definitionen

Wenn S endliche Teilmenge einer Menge U ist und das Komplement von S bezüglich U endlich ist, dann ist U endlich

- **Definitionen**

S endlich	$\equiv$	Es gibt eine ganze Zahl n mit $\|\|S\|\| = n$
T Komplement von S	$\equiv$	$T \cup S = U$ und $T \cap S = \emptyset$

Beispiel für Auflösung von Definitionen

Wenn S endliche Teilmenge einer Menge U ist und das Komplement von S bezüglich U endlich ist, dann ist U endlich

• Definitionen

S endlich $\equiv$ Es gibt eine ganze Zahl n mit $||S|| = n$

T Komplement von S $\equiv$ $T \cup S = U$ und $T \cap S = \emptyset$

• Beweis

	Aussage	Begründung
1.	S endlich	Gegeben
2.	T Komplement von S	Gegeben
3.	T endlich	Gegeben
4.	$\|\|S\|\| = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$	Auflösen der Definition in (1)
5.	$\|\|T\|\| = m$ für ein $m \in \mathbb{N}$	Auflösen der Definition in (3)
6.	$T \cup S = U$	Auflösen der Definition in (2)
7.	$T \cap S = \emptyset$	Auflösen der Definition in (2)
8.	$\|\|U\|\| = m + n$ für $n, m \in \mathbb{N}$	(4),(5),(6), (7) und Gesetze der Kardinalität
9.	U endlich	Einsetzen der Definition in (8)

Beweis einer Mengenäquivalenz

Für beliebige Mengen $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{S}$ gilt $\boldsymbol{R \cup S = S \cup R}$

Beweis einer Mengenäquivalenz

Für beliebige Mengen $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{S}$ gilt $\boldsymbol{R \cup S = S \cup R}$

- **Definitionen**

  $x \in R \cup S \quad \equiv \quad x \in R$ oder $x \in S$

Beweis einer Mengenäquivalenz

Für beliebige Mengen R und S gilt $R \cup S = S \cup R$

- **Definitionen**

  $x \in R \cup S \quad \equiv \quad x \in R$ oder $x \in S$

- **Zu zeigen:**
  - $R \cup S = S \cup R$ also

Beweis einer Mengenäquivalenz

Für beliebige Mengen R und S gilt $R \cup S = S \cup R$

- **Definitionen**

  $x \in R \cup S \quad \equiv \quad x \in R$ oder $x \in S$

- **Zu zeigen:**
  - $R \cup S = S \cup R$ also
  - $R \cup S \subseteq S \cup R$ und $S \cup R \subseteq R \cup S$ also

Beweis einer Mengenäquivalenz

Für beliebige Mengen R und S gilt $R \cup S = S \cup R$

- **Definitionen**

  $x \in R \cup S \quad \equiv \quad x \in R$ oder $x \in S$

- **Zu zeigen:**
  - $R \cup S = S \cup R$ also
  - $R \cup S \subseteq S \cup R$ und $S \cup R \subseteq R \cup S$ also
  - *Wenn* $x \in R \cup S$, *dann* $x \in S \cup R$ und *wenn* $x \in S \cup R$, *dann* $x \in R \cup S$

Beweis einer Mengenäquivalenz

Für beliebige Mengen R und S gilt $R \cup S = S \cup R$

- **Definitionen**

  $x \in R \cup S \quad \equiv \quad x \in R$ oder $x \in S$

- **Zu zeigen:**
  - $R \cup S = S \cup R$ also
  - $R \cup S \subseteq S \cup R$ und $S \cup R \subseteq R \cup S$ also
  - *Wenn* $x \in R \cup S$, *dann* $x \in S \cup R$ und *wenn* $x \in S \cup R$, *dann* $x \in R \cup S$

- **Beweis der ersten Implikation**

	Aussage	Begründung
1.	$x \in R \cup S$	Gegeben
2.	$x \in R$ oder $x \in S$	Auflösen der Definition in (1)
3.	$x \in S$ oder $x \in R$	Logische Umstellung von (2)
4.	$x \in S \cup R$	Einsetzen der Definition in (3)

Beweis einer Mengenäquivalenz

Für beliebige Mengen R und S gilt $R \cup S = S \cup R$

- **Definitionen**

  $x \in R \cup S \quad \equiv \quad x \in R$ oder $x \in S$

- **Zu zeigen:**
  - $R \cup S = S \cup R$ also
  - $R \cup S \subseteq S \cup R$ und $S \cup R \subseteq R \cup S$ also
  - *Wenn* $x \in R \cup S$, *dann* $x \in S \cup R$ und *wenn* $x \in S \cup R$, *dann* $x \in R \cup S$

- **Beweis der ersten Implikation**

	Aussage	Begründung
1.	$x \in R \cup S$	Gegeben
2.	$x \in R$ oder $x \in S$	Auflösen der Definition in (1)
3.	$x \in S$ oder $x \in R$	Logische Umstellung von (2)
4.	$x \in S \cup R$	Einsetzen der Definition in (3)

Beweis der zweiten Implikation genauso

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit “üblichen” Vorkenntnissen erklärbar sein

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit "üblichen" Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit “üblichen” Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, dass Sie nichts mehr falsch machen können

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit “üblichen” Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, dass Sie nichts mehr falsch machen können
  … es reicht nicht, dass Sie es einmal richtig gemacht haben

---

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit “üblichen” Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, dass Sie nichts mehr falsch machen können
  … es reicht nicht, dass Sie es einmal richtig gemacht haben

---

- Tip: ausführliche Lösungen entwickeln, bis Sie genug Erfahrung haben.
  Bei Präsentation für Andere zentrale Gedanken aus Lösung extrahieren

Wie genau/formal muss ein Beweis sein?

Ein Beweis ist ein Argument, das den Leser überzeugt

- Präzise genug, um Details rekonstruieren zu können
- Knapp genug, um übersichtlich und merkbar zu sein
- Zwischenschritte müssen mit “üblichen” Vorkenntnissen erklärbar sein
- Also nicht notwendig formal oder mit allen Details
- Gedankensprünge sind erlaubt, wenn Sie die Materie gut genug verstehen, dass Sie nichts mehr falsch machen können
  … es reicht nicht, dass Sie es einmal richtig gemacht haben

---

- Tip: ausführliche Lösungen entwickeln, bis Sie genug Erfahrung haben.
  Bei Präsentation für Andere zentrale Gedanken aus Lösung extrahieren
- Test: verstehen Ihre Kommilitonen Ihre Lösung und warum sie funktioniert?

Widerlegungsbeweise I

Zeige, dass eine Aussage A nicht gilt

- **Beweis durch Widerspruch**

Widerlegungsbeweise I

Zeige, dass eine Aussage A nicht gilt

- **Beweis durch Widerspruch**
  - A gilt nicht, wenn aus der Annahme von A ein Widerspruch folgt

Widerlegungsbeweise I

Zeige, dass eine Aussage *A* nicht gilt

- **Beweis durch Widerspruch**
  - A gilt nicht, wenn aus der Annahme von A ein Widerspruch folgt
  - z.B. *Wenn S endliche Teilmenge einer unendlichen Menge U ist, dann ist das Komplement von S (bezüglich U) nicht endlich*

Zeige, dass eine Aussage A nicht gilt

- **Beweis durch Widerspruch**
  - A gilt nicht, wenn aus der Annahme von A ein Widerspruch folgt
  - z.B. *Wenn S endliche Teilmenge einer unendlichen Menge U ist, dann ist das Komplement von S (bezüglich U) nicht endlich*
  - Beweis

Aussage	Begründung
1. S endlich	Gegeben
2. T Komplement von S	Gegeben
3. U unendlich	Gegeben
4. T endlich	Annahme
5. U endlich	(1), (4) mit Satz auf Folie 7
6. Widerspruch	(3), (5)
7. T nicht endlich	Annahme (4) muss falsch sein

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  – A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H, dann K* zeige *wenn nicht K, dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H, dann K* zeige *wenn nicht K, dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, dass aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt

    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H, dann K*

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H, dann K* zeige *wenn nicht K, dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, dass aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt

    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H, dann K*
  - z.B. *Wenn für eine natürliche Zahl x gilt $x^2>1$, dann ist $x\geq 2$*

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H, dann K* zeige *wenn nicht K, dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, dass aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt

    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H, dann K*
  - z.B. *Wenn für eine natürliche Zahl x gilt $x^2>1$, dann ist $x\geq 2$*
  - Beweis: *Sei $x^2>1$. Wenn $x\geq 2$ nicht gilt, dann ist $x=1$ oder $x=0$.*

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H, dann K* zeige *wenn nicht K, dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, dass aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt

    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H, dann K*
  - z.B. *Wenn für eine natürliche Zahl x gilt $x^2>1$, dann ist $x \geq 2$*
  - Beweis: *Sei $x^2>1$. Wenn $x \geq 2$ nicht gilt, dann ist $x=1$ oder $x=0$.*

    Wegen $1^2=1$ und $0^2=0$ ist $x^2>1$ in beiden Fällen falsch.

Widerlegungsbeweise II

- **Beweis durch Gegenbeispiel**
  - A ist nicht allgemeingültig, wenn es ein einziges Gegenbeispiel gibt
  - z.B. *Wenn x eine Primzahl ist, dann ist x ungerade* ist falsch
  - Beweis: 2 ist eine gerade Zahl, die eine Primzahl ist
- **Beweis durch Kontraposition**
  - Statt *wenn H, dann K* zeige *wenn nicht K, dann nicht H*
  - Behauptungen sind aussagenlogisch äquivalent
- **Spezielle Anwendung: Indirekte Beweisführung**
  - Zeige, dass aus *H und nicht K* ein Widerspruch folgt
    Aussagenlogisch äquivalent zu *wenn H, dann K*
  - z.B. *Wenn für eine natürliche Zahl x gilt $x^2>1$, dann ist $x \geq 2$*
  - Beweis: *Sei $x^2>1$. Wenn $x \geq 2$ nicht gilt, dann ist $x=1$ oder $x=0$.
    Wegen $1^2=1$ und $0^2=0$ ist $x^2>1$ in beiden Fällen falsch.
    Also muss $x \geq 2$ sein*

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

Diagonalisierungsbeweise

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist unentscheidbar**
  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob ein beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist unentscheidbar**
  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob ein beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

- **Beweis stützt sich auf wenige Grundannahmen**

Diagonalisierungsbeweise

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist unentscheidbar**

  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob ein beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

- **Beweis stützt sich auf wenige Grundannahmen**

  1. Programme und ihre Daten sind als Zahlen codierbar

Diagonalisierungsbeweise

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist unentscheidbar**

  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob ein beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

- **Beweis stützt sich auf wenige Grundannahmen**
  1. Programme und ihre Daten sind als Zahlen codierbar
  2. Computer sind universelle Maschinen
     - Bei Eingabe von Programm und Daten berechnen sie das Ergebnis
     - Schreibweise: $p_i(j) \hat{=}$ Anwendung des i-ten Programms auf die Zahl j

Gegenbeispielkonstruktion für unendliche Objekte

- **Terminierung von Programmen ist unentscheidbar**
  Es gibt kein Programm, das testen kann, ob ein beliebiges Programm bei einer bestimmten Eingabe überhaupt anhält

- **Beweis stützt sich auf wenige Grundannahmen**
  1. Programme und ihre Daten sind als Zahlen codierbar
  2. Computer sind universelle Maschinen
     · Bei Eingabe von Programm und Daten berechnen sie das Ergebnis
     · Schreibweise: $p_i(j) \hat{=}$ Anwendung des i-ten Programms auf die Zahl j
  3. Man kann Programme beliebig zu neuen Programmen zusammensetzen
     ... und die Nummer des neuen Programms berechnen

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\times$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
p_1	$\perp$	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times$ $\hat{=}$ Terminierung, $\perp$ $\hat{=}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)
- **Konstruiere ein neues Programm**

`Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\times$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
p_1	$\perp$	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times$ $\hat{=}$ Terminierung, $\perp$ $\hat{=}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - $\texttt{Term}(i,j)=1$ falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)
- **Konstruiere ein neues Programm**

  `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	…
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	…
p_1	$\perp$	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_2	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\times$	…
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\perp$	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…

$\times \mathrel{\hat=}$ Terminierung, $\perp \mathrel{\hat=}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - $\texttt{Term}(i,j)=1$ falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)
- **Konstruiere ein neues Programm**

Unsinn wie folgt:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	…
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	…
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_2	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\times$	…
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\perp$	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…

$\times \;\hat{=}$ Terminierung, $\perp \;\hat{=}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)
- **Konstruiere ein neues Programm**
  `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\perp \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)
- **Konstruiere ein neues Programm**

  `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	...
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

$\times$ $\hat{=}$ Terminierung, $\perp$ $\hat{=}$ hält nicht

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)
- **Konstruiere ein neues Programm**
  `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	…
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	…
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…

$\times$ $\hat{=}$ Terminierung, $\perp$ $\hat{=}$ hält nicht

- `Unsinn` **ist ein Programm**
  Also muss `Unsinn` **eine Nummer** k **haben**

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - $\mathtt{Term}(i,j)=1$ falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	…
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	…
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\perp \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

- **Konstruiere ein neues Programm**
  Unsinn wie folgt:

$$\mathtt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \mathtt{Term}(i,i){=}0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Unsinn ist ein Programm**
  Also muss Unsinn eine Nummer k haben

- **Was macht p_k=Unsinn auf seiner eigenen Nummer?**

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  – `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)
- **Konstruiere ein neues Programm** `Unsinn` **wie folgt**:

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	…
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	…
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\cancel{\perp}$ $\times$	$\perp$	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…

$\times$ $\hat{=}$ Terminierung, $\perp$ $\hat{=}$ hält nicht

- `Unsinn` **ist ein Programm**
  Also muss `Unsinn` **eine Nummer** $\boldsymbol{k}$ **haben**
- **Was macht** p_k=`Unsinn` **auf seiner eigenen Nummer?**
  – Wenn $p_k(k)$ hält, dann `Term`(k,k)=1, also hält `Unsinn`(k) nicht an ???

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)
- **Konstruiere ein neues Programm `Unsinn` wie folgt:**

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	…
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	…
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\perp$ $\times$	$\perp$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…

$\times$ $\widehat{=}$ Terminierung, $\perp$ $\widehat{=}$ hält nicht

- **`Unsinn` ist ein Programm**
  Also muss `Unsinn` eine Nummer k haben
- **Was macht p_k=`Unsinn` auf seiner eigenen Nummer?**
  - Wenn $p_k(k)$ hält, dann `Term`(k,k)=1, also hält `Unsinn`(k) nicht an ???
  - Wenn $p_k(k)$ nicht hält, dann `Term`(k,k)=0, also hält `Unsinn`(k) an ???

Terminierung von Programmen ist unentscheidbar

- **Annahme: es gibt ein Programm für den Terminierungstest**
  - `Term`(i,j)=1 falls $p_i(j)$ hält (sonst 0)

- **Konstruiere ein neues Programm `Unsinn` wie folgt:**

$$\texttt{Unsinn}(i) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \texttt{Term}(i,i)=0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	…
p_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	…
p_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	…
p_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\perp$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…

$\times \mathrel{\hat{=}}$ Terminierung, $\perp \mathrel{\hat{=}}$ hält nicht

- **`Unsinn` ist ein Programm**
  Also muss `Unsinn` eine Nummer k haben

- **Was macht p_k=`Unsinn` auf seiner eigenen Nummer?**
  - Wenn $p_k(k)$ hält, dann `Term`(k,k)=1, also hält `Unsinn`(k) nicht an ???
  - Wenn $p_k(k)$ nicht hält, dann `Term`(k,k)=0, also hält `Unsinn`(k) an ???

- **Dies ist ein Widerspruch,**
  Also kann es den Test auf Terminierung nicht geben

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage *A* für alle natürlichen Zahlen

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  – Gilt A für i und folgt A für $n+1$, wenn A für n gilt, dann gilt A für alle $n\geq i$

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage *A* für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  – Gilt A für i und folgt A für $n+1$, wenn A für n gilt, dann gilt A für alle $n \geq i$

  – z.B. *Wenn* $x \geq 4$*, dann* $2^x \geq x^2$

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für $n+1$, wenn A für n gilt, dann gilt A für alle $n \geq i$
  - z.B. *Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$

    Induktionsanfang $x=4$: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für $n+1$, wenn A für n gilt, dann gilt A für alle $n \geq i$
  - z.B. *Wenn* $x \geq 4$, *dann* $2^x \geq x^2$

    Induktionsanfang $x=4$: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

    Induktionsschritt: Es gelte $2^n \geq n^2$ für ein beliebiges $n \geq 4$

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für n+1, wenn A für n gilt, dann gilt A für alle $n \geq i$
  - z.B. *Wenn* $x \geq 4$*, dann* $2^x \geq x^2$

    Induktionsanfang x=4: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

    Induktionsschritt: Es gelte $2^n \geq n^2$ für ein beliebiges $n \geq 4$

    Dann ist $2^{n+1} = 2*2^n \geq 2n^2$ aufgrund der Induktionsannahme

    und $(n+1)^2 = n^2+2n+1 = n(n+2+1/n) \leq n(n+n) = 2n^2$ wegen $n \geq 4$

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage *A* für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für $n{+}1$, wenn A für n gilt, dann gilt A für alle $n{\geq}i$
  - z.B. *Wenn* $x{\geq}4$, *dann* $2^x{\geq}x^2$

    Induktionsanfang $x{=}4$: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

    Induktionsschritt: Es gelte $2^n{\geq}n^2$ für ein beliebiges $n{\geq}4$

    Dann ist $2^{n+1} = 2{*}2^n \geq 2n^2$ aufgrund der Induktionsannahme

    und $(n{+}1)^2 = n^2{+}2n{+}1 = n(n{+}2{+}1/n) \leq n(n{+}n) = 2n^2$ wegen $n{\geq}4$

    also gilt $2^{n+1} \geq (n{+}1)^2$

Induktive Beweise I

Beweise eine Aussage A für alle natürlichen Zahlen

- **Standardinduktion**
  - Gilt A für i und folgt A für $n{+}1$, wenn A für n gilt, dann gilt A für alle $n{\geq}i$
  - z.B. *Wenn* $x{\geq}4$, *dann* $2^x{\geq}x^2$

    Induktionsanfang $x{=}4$: Es ist $2^x = 16 \geq 16 = x^2$

    Induktionsschritt: Es gelte $2^n{\geq}n^2$ für ein beliebiges $n{\geq}4$

    Dann ist $2^{n+1} = 2{*}2^n \geq 2n^2$ aufgrund der Induktionsannahme

    und $(n{+}1)^2 = n^2{+}2n{+}1 = n(n{+}2{+}1/n) \leq n(n{+}n) = 2n^2$ wegen $n{\geq}4$

    also gilt $2^{n+1} \geq (n{+}1)^2$

- **Vollständige Induktion**
  - Folgt A für n, wenn A für alle $j{<}n$ mit $j{\geq}i$ gilt, dann gilt A für alle $n{\geq}i$
  - Mächtiger, da man nicht den unmittelbaren Vorgänger benutzen muss

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente eines rekursiven Datentyps

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente eines rekursiven Datentyps

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente eines rekursiven Datentyps

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Induktionsanfang L ist leer: Die Summe und die Länge von L sind 0

Zeige A für alle Elemente eines rekursiven Datentyps

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Induktionsanfang L ist leer: Die Summe und die Länge von L sind 0

Induktionsschritt: Es gelte $sum(L) \geq |L|$

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente eines rekursiven Datentyps

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Induktionsanfang L ist leer: Die Summe und die Länge von L sind 0

Induktionsschritt: Es gelte $sum(L) \geq |L|$

Betrachte die Liste $L \circ x$, die durch Anhängen von x and L entsteht

Dann gilt $sum(L \circ x) = sum(L) + x \geq sum(L) + 1 \geq |L| + 1 = |L \circ x|$

Strukturelle Induktion

Zeige A für alle Elemente eines rekursiven Datentyps

Gilt A für das Basiselement und folgt A für ein zusammengesetztes Element, wenn A für seine Unterelemente gilt, dann gilt A für alle Elemente

– z.B. *Die Summe einer Liste L von positiven ganzen Zahlen ist mindestens so groß wie ihre Länge*

Induktionsanfang L ist leer: Die Summe und die Länge von L sind 0

Induktionsschritt: Es gelte $sum(L) \geq |L|$

Betrachte die Liste $L \circ x$, die durch Anhängen von x and L entsteht

Dann gilt $sum(L \circ x) = sum(L) + x \geq sum(L) + 1 \geq |L| + 1 = |L \circ x|$

Häufig eingesetzt für Analyse von

- **Baumstrukturen** (Suchen, Sortieren, . . .)
- **Syntaktische Strukturen** (Formeln, Programmiersprachen, . . .)

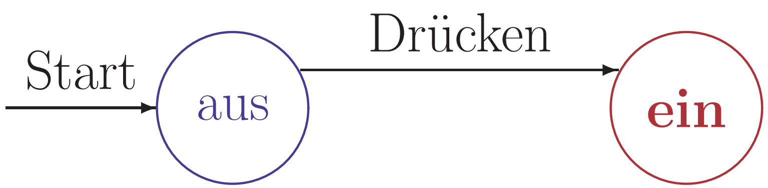
⋮

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan

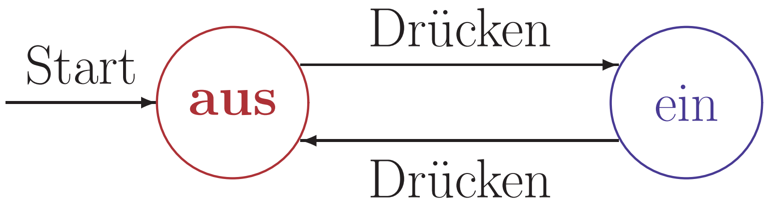
Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



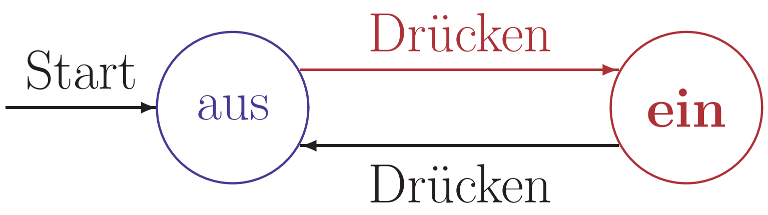
Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



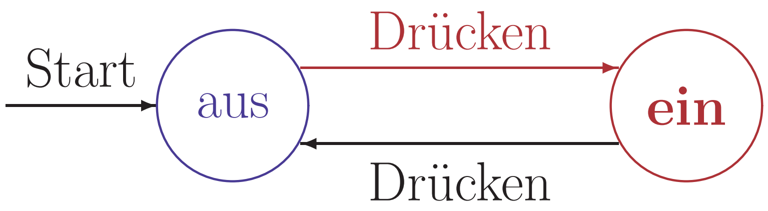
Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Gegenseitige Induktion

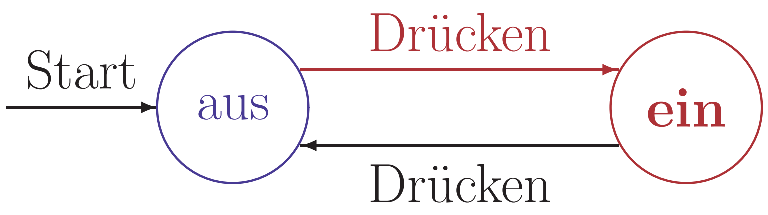
Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



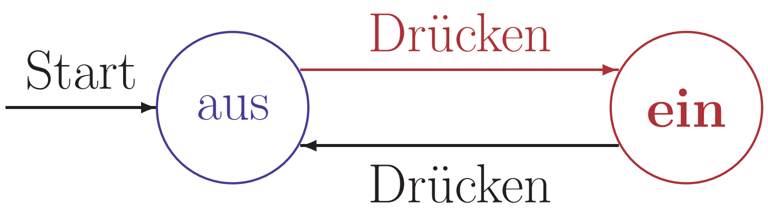
Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

$S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

$S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

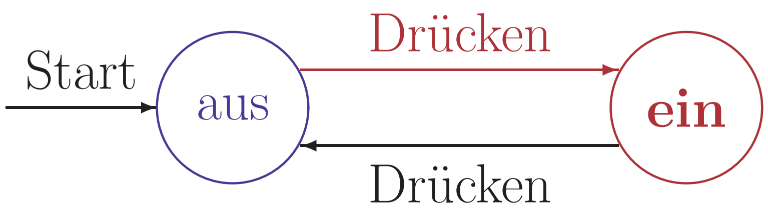
$S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

$S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

Induktionsanfang $n{=}0$: n ist gerade also gilt $S_2(0)$
der Automat ist ausgeschaltet, also gilt $S_1(0)$

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

$S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

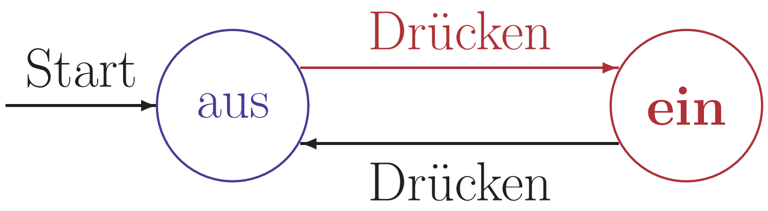
$S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

Induktionsanfang $n{=}0$: n ist gerade also gilt $S_2(0)$
der Automat ist ausgeschaltet, also gilt $S_1(0)$

Induktionsschritt: Es gelte $S_1(n)$ und $S_2(n)$. Betrachte $n{+}1$

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

$S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

$S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

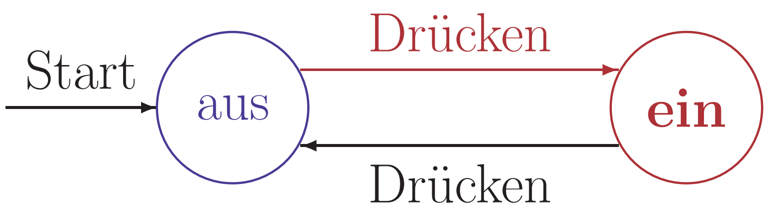
Induktionsanfang $n{=}0$: n ist gerade also gilt $S_2(0)$
der Automat ist ausgeschaltet, also gilt $S_1(0)$

Induktionsschritt: Es gelte $S_1(n)$ und $S_2(n)$. Betrachte $n{+}1$

– Falls $n{+}1$ ungerade, dann gilt $S_1(n{+}1)$ und n ist gerade.
Wegen $S_1(n)$ war der Automat "aus" und wechselt auf "ein". Es gilt $S_2(n{+}1)$

Gegenseitige Induktion

Zeige mehrere zusammengehörige Aussagen simultan



Zeige: Automat ist ein Wechselschalter

$S_1(n)$: Ist n gerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken ausgeschaltet

$S_2(n)$: Ist n ungerade, so ist der Automat nach n-fachem Drücken eingeschaltet

Induktionsanfang $n{=}0$: n ist gerade also gilt $S_2(0)$
der Automat ist ausgeschaltet, also gilt $S_1(0)$

Induktionsschritt: Es gelte $S_1(n)$ und $S_2(n)$. Betrachte $n{+}1$

– Falls $n{+}1$ ungerade, dann gilt $S_1(n{+}1)$ und n ist gerade.
Wegen $S_1(n)$ war der Automat "aus" und wechselt auf "ein". Es gilt $S_2(n{+}1)$

– Falls $n{+}1$ gerade, dann gilt $S_2(n{+}1)$ und n ist ungerade.
Wegen $S_2(n)$ war der Automat "ein" und wechselt auf "aus". Es gilt $S_1(n{+}1)$

Mathematisches Vokabular I: Wörter und Sprachen

– **Alphabet $\mathbf{\Sigma}$**: endliche Menge von Symbolen,
  z.B. $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{0, .., 9\}$, $\Sigma = \{A, .., Z, a, .., z, \quad, ?, !, ..\}$
– **Wörter**: endliche Folge w von Symbolen eines Alphabets
  Auch Zeichenreihen oder Strings genannt

Mathematisches Vokabular I: Wörter und Sprachen

– **Alphabet Σ**: endliche Menge von Symbolen,
  z.B. $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{0, .., 9\}$, $\Sigma = \{A, .., Z, a, .., z, \ \ , ?, !, ..\}$

– **Wörter**: endliche Folge w von Symbolen eines Alphabets
  Auch Zeichenreihen oder Strings genannt

– $\boldsymbol{\epsilon}$: Leeres Wort (ohne jedes Symbol)

– $\boldsymbol{w\ v}$: Konkatenation (Aneinanderhängung) der Wörter w und v

– $\boldsymbol{u^i}$: i-fache Konkatenation des Wortes (oder Symbols) u

– $|\boldsymbol{w}|$: Länge des Wortes w (Anzahl der Symbole)

– $\boldsymbol{v \sqsubseteq w}$: v Präfix von w, wenn $w = v\,u$ für ein Wort u

Mathematisches Vokabular I: Wörter und Sprachen

– **Alphabet Σ**: endliche Menge von Symbolen,
 z.B. $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{0, .., 9\}$, $\Sigma = \{A, .., Z, a, .., z, \ \ , ?, !, ..\}$

– **Wörter**: endliche Folge w von Symbolen eines Alphabets
 Auch Zeichenreihen oder Strings genannt

– $\boldsymbol{\epsilon}$: Leeres Wort (ohne jedes Symbol)

– $\boldsymbol{w\ v}$: Konkatenation (Aneinanderhängung) der Wörter w und v

– $\boldsymbol{u^i}$: i-fache Konkatenation des Wortes (oder Symbols) u

– $\boldsymbol{|w|}$: Länge des Wortes w (Anzahl der Symbole)

– $\boldsymbol{v \sqsubseteq w}$: v Präfix von w, wenn $w = v\,u$ für ein Wort u

– $\boldsymbol{\Sigma^k}$: Menge der Wörter der Länge k mit Symbolen aus Σ

– $\boldsymbol{\Sigma^*}$: Menge aller Wörter über Σ

– $\boldsymbol{\Sigma^+}$: Menge aller nichtleeren Wörter über Σ

Mathematisches Vokabular I: Wörter und Sprachen

– **Alphabet Σ**: endliche Menge von Symbolen,
  z.B. $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma = \{0, .., 9\}$, $\Sigma = \{A, .., Z, a, .., z, \ \ , ?, !, ..\}$
– **Wörter**: endliche Folge w von Symbolen eines Alphabets
  Auch Zeichenreihen oder Strings genannt
– $\boldsymbol{\epsilon}$: Leeres Wort (ohne jedes Symbol)
– $\boldsymbol{w\ v}$: Konkatenation (Aneinanderhängung) der Wörter w und v
– $\boldsymbol{u^i}$: i-fache Konkatenation des Wortes (oder Symbols) u
– $|\boldsymbol{w}|$: Länge des Wortes w (Anzahl der Symbole)
– $\boldsymbol{v \sqsubseteq w}$: v Präfix von w, wenn $w = v\,u$ für ein Wort u
– $\boldsymbol{\Sigma^k}$: Menge der Wörter der Länge k mit Symbolen aus Σ
– $\boldsymbol{\Sigma^*}$: Menge aller Wörter über Σ
– $\boldsymbol{\Sigma^+}$: Menge aller nichtleeren Wörter über Σ
– **Sprache L**: Beliebige Menge von Wörtern über einem Alphabet Σ
  Üblicherweise in abstrakter Mengennotation gegeben
  z.B. $\{w \in \{0, 1\}^* \mid |w| \text{ ist gerade}\}$ $\quad \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
– **Problem P**: Menge von Wörtern über einem Alphabet Σ
  Das “Problem” ist, Zugehörigkeit zur Menge P zu testen

Mathematisches Vokabular II: Funktionen

- **Funktion $f : S \longrightarrow S'$**: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S'
  nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert
- **Domain von f**: $domain(f) = \{x \in S \mid f(x) \text{ definiert}\}$ (Definitionsbereich)
- **Range von f**: $range(f) = \{y \in S' \mid \exists x \in S.\ f(x) = y\}$ (Wertebereich)
- **f total**: $domain(f) = S$ (andernfalls ist **f partiell**)

Mathematisches Vokabular II: Funktionen

- **Funktion $f : S \longrightarrow S'$**: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S'
  nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert
- **Domain von f**: $domain(f) = \{x \in S \mid f(x) \text{ definiert}\}$ (Definitionsbereich)
- **Range von f**: $range(f) = \{y \in S' \mid \exists x \in S.\ f(x) = y\}$ (Wertebereich)
- **f total**: $domain(f) = S$ (andernfalls ist **f partiell**)
- **f injektiv**: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- **f surjektiv**: $range(f) = S'$
- **f bijektiv**: f injektiv und surjektiv
- **Umkehrfunktion $f^{-1}: S' \longrightarrow S$**: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ (f injektiv!)
- **Urbild $f^{-1}(L)$**: Die Menge $\{x \in S \mid f(x) \in L\}$

Mathematisches Vokabular II: Funktionen

- **Funktion $f : S \rightarrow S'$**: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S'
  nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert
- **Domain von f**: $domain(f) = \{x \in S \mid f(x) \text{ definiert}\}$ (Definitionsbereich)
- **Range von f**: $range(f) = \{y \in S' \mid \exists x \in S.\ f(x) = y\}$ (Wertebereich)
- **f total**: $domain(f) = S$ (andernfalls ist **f partiell**)
- **f injektiv**: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- **f surjektiv**: $range(f) = S'$
- **f bijektiv**: f injektiv und surjektiv
- **Umkehrfunktion $f^{-1}: S' \rightarrow S$**: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ (f injektiv!)
- **Urbild $f^{-1}(L)$**: Die Menge $\{x \in S \mid f(x) \in L\}$
- **Charakteristische Funktion χ_L von $L \subseteq S$**: $\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- **Partiell-charakteristische Funktion ψ_L**: $\psi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Mathematisches Vokabular II: Funktionen

- **Funktion $f : S \longrightarrow S'$**: Abbildung zwischen den Grundmengen S und S'
  nicht unbedingt auf allen Elementen von S definiert
- **Domain von f**: $domain(f) = \{x \in S \mid f(x) \text{ definiert}\}$ (Definitionsbereich)
- **Range von f**: $range(f) = \{y \in S' \mid \exists x \in S.\ f(x) = y\}$ (Wertebereich)
- **f total**: $domain(f) = S$ (andernfalls ist **f partiell**)
- **f injektiv**: $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
- **f surjektiv**: $range(f) = S'$
- **f bijektiv**: f injektiv und surjektiv
- **Umkehrfunktion f^{-1}:$S' \longrightarrow S$**: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ (f injektiv!)
- **Urbild $f^{-1}(L)$**: Die Menge $\{x \in S \mid f(x) \in L\}$
- **Charakteristische Funktion χ_L von $L \subseteq S$**: $\chi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- **Partiell-charakteristische Funktion ψ_L**: $\psi_L(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \in L, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Mehr Vokabular wird bei Bedarf vorgestellt