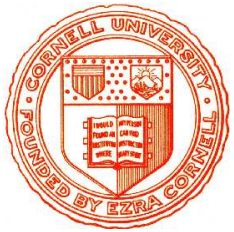
Theoretische Informatik II

Einheit 4.6



Elementare Berechenbarkeitstheorie II:

Unlösbare Probleme

1. Beweistechniken für Unlösbarkeit
2. Wichtige unlösbare Probleme
3. Der Satz von Rice
4. Unentscheidbare Probleme für kontextfreie Grammatiken

Gibt es Probleme, die prinzipiell unlösbar sind?

- **Was bedeutet Unlösbarkeit?**

Gibt es Probleme, die prinzipiell unlösbar sind?

- **Was bedeutet Unlösbarkeit?**
  - Funktionen, die von keinem Computer je berechnet werden können
  - Mengen ($\equiv$ Sprachen $\equiv$ Probleme), die unentscheidbar sind
  - Mengen, die nicht einmal aufzählbar ($\equiv$ semi-entscheidbar) sind

Gibt es Probleme, die prinzipiell unlösbar sind?

- **Was bedeutet Unlösbarkeit?**
  - Funktionen, die von keinem Computer je berechnet werden können
  - Mengen ($\equiv$ Sprachen $\equiv$ Probleme), die unentscheidbar sind
  - Mengen, die nicht einmal aufzählbar ($\equiv$ semi-entscheidbar) sind

  Also prinzipielle Grenzen für die Fähigkeiten von Computern
  unabhängig davon, welche Fortschritte die Informatik je erzielen wird

Gibt es Probleme, die prinzipiell unlösbar sind?

- **Was bedeutet Unlösbarkeit?**
  - Funktionen, die von keinem Computer je berechnet werden können
  - Mengen ($\equiv$ Sprachen $\equiv$ Probleme), die unentscheidbar sind
  - Mengen, die nicht einmal aufzählbar ($\equiv$ semi-entscheidbar) sind

  Also prinzipielle Grenzen für die Fähigkeiten von Computern
  unabhängig davon, welche Fortschritte die Informatik je erzielen wird
- **Warum muß es unlösbare Probleme geben?**

Gibt es Probleme, die prinzipiell unlösbar sind?

- **Was bedeutet Unlösbarkeit?**
  - Funktionen, die von keinem Computer je berechnet werden können
  - Mengen ($\equiv$ Sprachen $\equiv$ Probleme), die unentscheidbar sind
  - Mengen, die nicht einmal aufzählbar ($\equiv$ semi-entscheidbar) sind

  Also prinzipielle Grenzen für die Fähigkeiten von Computern
  unabhängig davon, welche Fortschritte die Informatik je erzielen wird
- **Warum muß es unlösbare Probleme geben?**

  Kardinalitätsargument: Es gibt mehr Funktionen als Programme

Gibt es Probleme, die prinzipiell unlösbar sind?

- **Was bedeutet Unlösbarkeit?**
  - Funktionen, die von keinem Computer je berechnet werden können
  - Mengen ($\equiv$ Sprachen $\equiv$ Probleme), die unentscheidbar sind
  - Mengen, die nicht einmal aufzählbar ($\equiv$ semi-entscheidbar) sind

  Also prinzipielle Grenzen für die Fähigkeiten von Computern
  unabhängig davon, welche Fortschritte die Informatik je erzielen wird
- **Warum muß es unlösbare Probleme geben?**

  Kardinalitätsargument: Es gibt mehr Funktionen als Programme
  - Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ der Funktionen auf $\mathbb{N}$ ist nicht abzählbar (Beweis folgt)
  - Die Menge der Sprachen über Σ^* (oder Funktionen) ist nicht abzählbar

Gibt es Probleme, die prinzipiell unlösbar sind?

- **Was bedeutet Unlösbarkeit?**
  - Funktionen, die von keinem Computer je berechnet werden können
  - Mengen ($\equiv$ Sprachen $\equiv$ Probleme), die unentscheidbar sind
  - Mengen, die nicht einmal aufzählbar ($\equiv$ semi-entscheidbar) sind

  Also prinzipielle Grenzen für die Fähigkeiten von Computern
  unabhängig davon, welche Fortschritte die Informatik je erzielen wird
- **Warum muß es unlösbare Probleme geben?**

  Kardinalitätsargument: Es gibt mehr Funktionen als Programme
  - Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ der Funktionen auf $\mathbb{N}$ ist nicht abzählbar (Beweis folgt)
  - Die Menge der Sprachen über Σ^* (oder Funktionen) ist nicht abzählbar
  - Programme sind durch Textketten beschreibbar – also abzählbar

Gibt es Probleme, die prinzipiell unlösbar sind?

- **Was bedeutet Unlösbarkeit?**
  - Funktionen, die von keinem Computer je berechnet werden können
  - Mengen ($\equiv$ Sprachen $\equiv$ Probleme), die unentscheidbar sind
  - Mengen, die nicht einmal aufzählbar ($\equiv$ semi-entscheidbar) sind

  Also prinzipielle Grenzen für die Fähigkeiten von Computern
  unabhängig davon, welche Fortschritte die Informatik je erzielen wird

- **Warum muß es unlösbare Probleme geben?**

  Kardinalitätsargument: Es gibt mehr Funktionen als Programme
  - Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ der Funktionen auf $\mathbb{N}$ ist nicht abzählbar (Beweis folgt)
  - Die Menge der Sprachen über Σ^* (oder Funktionen) ist nicht abzählbar
  - Programme sind durch Textketten beschreibbar – also abzählbar

  $\Downarrow$

  Nicht jede Funktion kann berechenbar sein

Cantors Beweis für Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist "überabzählbar" unendlich

Es ist nicht möglich, alle Funktionen über $\mathbb{N}$ durchzuzählen

Cantors Beweis für Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist "überabzählbar" unendlich

Es ist nicht möglich, alle Funktionen über $\mathbb{N}$ durchzuzählen

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sei abzählbar

Cantors Beweis für Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist "überabzählbar" unendlich

Es ist nicht möglich, alle Funktionen über $\mathbb{N}$ durchzuzählen

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sei abzählbar

– Dann kann man alle Funktionen über $\mathbb{N}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	$f_3(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Cantors Beweis für Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist "überabzählbar" unendlich

Es ist nicht möglich, alle Funktionen über $\mathbb{N}$ durchzuzählen

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sei abzählbar

– Dann kann man alle Funktionen über $\mathbb{N}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
f_0	$f_0(0)+1$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	$f_3(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $f(x) = f_x(x)+1$

Cantors Beweis für Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist "überabzählbar" unendlich

Es ist nicht möglich, alle Funktionen über $\mathbb{N}$ durchzuzählen

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sei abzählbar

– Dann kann man alle Funktionen über $\mathbb{N}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
f_0	$f_0(0)+1$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)+1$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	$f_3(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $f(x) = f_x(x)+1$

Cantors Beweis für Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist "überabzählbar" unendlich

Es ist nicht möglich, alle Funktionen über $\mathbb{N}$ durchzuzählen

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sei abzählbar

– Dann kann man alle Funktionen über $\mathbb{N}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
f_0	$f_0(0)+1$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)+1$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)+1$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	$f_3(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $f(x) = f_x(x)+1$

Cantors Beweis für Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist "überabzählbar" unendlich

Es ist nicht möglich, alle Funktionen über $\mathbb{N}$ durchzuzählen

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sei abzählbar

– Dann kann man alle Funktionen über $\mathbb{N}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
f_0	$f_0(0)+1$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)+1$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)+1$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)+1$	$f_3(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $f(x) = f_x(x)+1$

Cantors Beweis für Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist "überabzählbar" unendlich

Es ist nicht möglich, alle Funktionen über $\mathbb{N}$ durchzuzählen

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sei abzählbar

– Dann kann man alle Funktionen über $\mathbb{N}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
f_0	$f_0(0)+1$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)+1$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)+1$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)+1$	$f_3(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion $f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $f(x) = f_x(x)+1$

– f ist offensichtlich total, kann aber in der Tabelle nicht vorkommen

Cantors Beweis für Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ist "überabzählbar" unendlich

Es ist nicht möglich, alle Funktionen über $\mathbb{N}$ durchzuzählen

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ sei abzählbar

– Dann kann man alle Funktionen über $\mathbb{N}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
f_0	$f_0(0)+1$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	...
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)+1$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)+1$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)+1$	$f_3(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion $f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $f(x) = f_x(x)+1$

– f ist offensichtlich total, kann aber in der Tabelle nicht vorkommen

– Ansonsten wäre $f{=}f_i$ für ein i und $f_i(i) = f(i) = f_i(i)+1$ ✓

Wie beweist man Unlösbarkeit konkret?

- **Ein Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_0$ kann es nicht geben**
  - Jede endlich beschreibbare syntaktische Struktur ist entscheidbar

Wie beweist man Unlösbarkeit konkret?

- **Ein Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_0$ kann es nicht geben**
  - Jede endlich beschreibbare syntaktische Struktur ist entscheidbar
  - Unlösbare Probleme müssen komplizierte syntaktische Struktur haben

Wie beweist man Unlösbarkeit konkret?

- **Ein Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_0$ kann es nicht geben**
  - Jede endlich beschreibbare syntaktische Struktur ist entscheidbar
  - Unlösbare Probleme müssen komplizierte syntaktische Struktur haben
- **Beginne mit konstruierten Gegenbeispielen**

Wie beweist man Unlösbarkeit konkret?

- **Ein Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_0$ kann es nicht geben**
  - Jede endlich beschreibbare syntaktische Struktur ist entscheidbar
  - Unlösbare Probleme müssen komplizierte syntaktische Struktur haben
- **Beginne mit konstruierten Gegenbeispielen**
  - Beispiele, in welche die Unlösbarkeit "hineincodiert" ist
    - $S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist unentscheidbar (Selbstanwendbarkeit)

Wie beweist man Unlösbarkeit konkret?

- **Ein Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_0$ kann es nicht geben**
  - Jede endlich beschreibbare syntaktische Struktur ist entscheidbar
  - Unlösbare Probleme müssen komplizierte syntaktische Struktur haben
- **Beginne mit konstruierten Gegenbeispielen**
  - Beispiele, in welche die Unlösbarkeit "hineincodiert" ist
    - $S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist unentscheidbar (Selbstanwendbarkeit)
  - Führe Unlösbarkeit "echter" Probleme auf diese Beispiele zurück

Wie beweist man Unlösbarkeit konkret?

- **Ein Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_0$ kann es nicht geben**
  - Jede endlich beschreibbare syntaktische Struktur ist entscheidbar
  - Unlösbare Probleme müssen komplizierte syntaktische Struktur haben
- **Beginne mit konstruierten Gegenbeispielen**
  - Beispiele, in welche die Unlösbarkeit "hineincodiert" ist
    - $S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist unentscheidbar (Selbstanwendbarkeit)
  - Führe Unlösbarkeit "echter" Probleme auf diese Beispiele zurück
- **Welche Probleme werden unentscheidbar sein?**
  - Halteproblem: Terminiert ein Programm bei einer bestimmten Eingabe?

Wie beweist man Unlösbarkeit konkret?

- **Ein Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_0$ kann es nicht geben**
  - Jede endlich beschreibbare syntaktische Struktur ist entscheidbar
  - Unlösbare Probleme müssen komplizierte syntaktische Struktur haben
- **Beginne mit konstruierten Gegenbeispielen**
  - Beispiele, in welche die Unlösbarkeit "hineincodiert" ist
    - $S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist unentscheidbar (Selbstanwendbarkeit)
  - Führe Unlösbarkeit "echter" Probleme auf diese Beispiele zurück
- **Welche Probleme werden unentscheidbar sein?**
  - Halteproblem: Terminiert ein Programm bei einer bestimmten Eingabe?
    Intuitives Argument: Programme können beliebig kompliziert sein
    - Sie können versteckte Endlosschleifen enthalten
    - Man kann nicht prüfen, ob diese Programme überhaupt anhalten

Wie beweist man Unlösbarkeit konkret?

- **Ein Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_0$ kann es nicht geben**
  - Jede endlich beschreibbare syntaktische Struktur ist entscheidbar
  - Unlösbare Probleme müssen komplizierte syntaktische Struktur haben
- **Beginne mit konstruierten Gegenbeispielen**
  - Beispiele, in welche die Unlösbarkeit "hineincodiert" ist
    - $S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist unentscheidbar (Selbstanwendbarkeit)
  - Führe Unlösbarkeit "echter" Probleme auf diese Beispiele zurück
- **Welche Probleme werden unentscheidbar sein?**
  - Halteproblem: Terminiert ein Programm bei einer bestimmten Eingabe?
    Intuitives Argument: Programme können beliebig kompliziert sein
    - Sie können versteckte Endlosschleifen enthalten
    - Man kann nicht prüfen, ob diese Programme überhaupt anhalten
  - Korrektheitsproblem: Erfüllt ein Programm eine gegebene Spezifikation?
  - Äquivalenzproblem: Berechnen zwei Programme die gleiche Funktion ?

Wie beweist man Unlösbarkeit konkret?

- **Ein Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_0$ kann es nicht geben**
  - Jede endlich beschreibbare syntaktische Struktur ist entscheidbar
  - Unlösbare Probleme müssen komplizierte syntaktische Struktur haben
- **Beginne mit konstruierten Gegenbeispielen**
  - Beispiele, in welche die Unlösbarkeit "hineincodiert" ist
    - $S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist unentscheidbar (Selbstanwendbarkeit)
  - Führe Unlösbarkeit "echter" Probleme auf diese Beispiele zurück
- **Welche Probleme werden unentscheidbar sein?**
  - Halteproblem: Terminiert ein Programm bei einer bestimmten Eingabe?
    Intuitives Argument: Programme können beliebig kompliziert sein
    - Sie können versteckte Endlosschleifen enthalten
    - Man kann nicht prüfen, ob diese Programme überhaupt anhalten
  - Korrektheitsproblem: Erfüllt ein Programm eine gegebene Spezifikation?
  - Äquivalenzproblem: Berechnen zwei Programme die gleiche Funktion ?
    Argument: Man kann ja nicht einmal die Terminierung überprüfen

Techniken zum Nachweis von Unlösbarkeit

- **Diagonalisierung** (Cantors Beweis)
  - Gegenbeispielkonstruktion für Klassen unendlicher Objekte
    z.B. berechenbare Funktionen, entscheidbare & aufzählbare Mengen
  - Konstruiere ein Objekt, das sich von jedem anderen Objekt der Klasse an einer Stelle unterscheidet, und somit nicht zur Klasse gehören kann

Techniken zum Nachweis von Unlösbarkeit

- **Diagonalisierung** (Cantors Beweis)
  - Gegenbeispielkonstruktion für Klassen unendlicher Objekte
    z.B. berechenbare Funktionen, entscheidbare & aufzählbare Mengen
  - Konstruiere ein Objekt, das sich von jedem anderen Objekt der Klasse an einer Stelle unterscheidet, und somit nicht zur Klasse gehören kann
- **Wachstums- und Monotonieargumente**
  - Funktion wächst stärker als jede berechenbare Funktion
    und kann daher nicht selbst berechenbar sein

Techniken zum Nachweis von Unlösbarkeit

- **Diagonalisierung** (Cantors Beweis)
  - Gegenbeispielkonstruktion für Klassen unendlicher Objekte
    z.B. berechenbare Funktionen, entscheidbare & aufzählbare Mengen
  - Konstruiere ein Objekt, das sich von jedem anderen Objekt der Klasse an einer Stelle unterscheidet, und somit nicht zur Klasse gehören kann
- **Wachstums- und Monotonieargumente**
  - Funktion wächst stärker als jede berechenbare Funktion
    und kann daher nicht selbst berechenbar sein
- **Rückführung auf bekanntes unlösbares Problem**
  - Lösung des Problems würde Lösung des unlösbaren Problems liefern

Techniken zum Nachweis von Unlösbarkeit

- **Diagonalisierung** (Cantors Beweis)
  - Gegenbeispielkonstruktion für Klassen unendlicher Objekte
    z.B. berechenbare Funktionen, entscheidbare & aufzählbare Mengen
  - Konstruiere ein Objekt, das sich von jedem anderen Objekt der Klasse an einer Stelle unterscheidet, und somit nicht zur Klasse gehören kann
- **Wachstums- und Monotonieargumente**
  - Funktion wächst stärker als jede berechenbare Funktion
    und kann daher nicht selbst berechenbar sein
- **Rückführung auf bekanntes unlösbares Problem**
  - Lösung des Problems würde Lösung des unlösbaren Problems liefern
- **Anwendung allgemeiner theoretischer Resultate**
  - Unlösbarkeit folgt direkt aus bekannten Sätzen

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

- $\overline{S} = \{i \mid i \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ **ist nicht aufzählbar**

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

- **$\overline{S} = \{i \mid i \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Annahme: $\overline{S}$ ist aufzählbar

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

- **$\overline{S} = \{i \mid i \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Annahme: $\overline{S}$ ist aufzählbar
  - Dann ist $\overline{S} = \mathrm{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

- **$\overline{S} = \{i \mid i \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Annahme: $\overline{S}$ ist aufzählbar
  - Dann ist $\overline{S} = \mathrm{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_j$ und es folgt

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

- **$\overline{S} = \{i \mid i \notin \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Annahme: $\overline{S}$ ist aufzählbar
  - Dann ist $\overline{S} = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_j$ und es folgt

$$j \in \overline{S} \;\Leftrightarrow\; j \notin \text{domain}(\varphi_j)$$

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

- **$\overline{S} = \{i \mid i \notin \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Annahme: $\overline{S}$ ist aufzählbar
  - Dann ist $\overline{S} = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_j$ und es folgt

$$j \in \overline{S} \;\Leftrightarrow\; j \notin \text{domain}(\varphi_j) \;\Leftrightarrow\; j \notin \text{domain}(f)$$

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

- **$\overline{S} = \{i \mid i \notin \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Annahme: $\overline{S}$ ist aufzählbar
  - Dann ist $\overline{S} = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_j$ und es folgt

$$j \in \overline{S} \Leftrightarrow j \notin \text{domain}(\varphi_j) \Leftrightarrow j \notin \text{domain}(f) \Leftrightarrow j \notin \overline{S}$$

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

- **$\overline{S} = \{i \mid i \notin \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Annahme: $\overline{S}$ ist aufzählbar
  - Dann ist $\overline{S} = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_j$ und es folgt

$$j \in \overline{S} \;\Leftrightarrow\; j \notin \text{domain}(\varphi_j) \;\Leftrightarrow\; j \notin \text{domain}(f) \;\Leftrightarrow\; j \notin \overline{S}$$

  - Dies ist ein Widerspruch. Also kann $\overline{S}$ nicht aufzählbar sein ✓

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

- **$\overline{S} = \{i \mid i \notin \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Annahme: $\overline{S}$ ist aufzählbar
  - Dann ist $\overline{S} = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_j$ und es folgt

$$j \in \overline{S} \Leftrightarrow j \notin \text{domain}(\varphi_j) \Leftrightarrow j \notin \text{domain}(f) \Leftrightarrow j \notin \overline{S}$$

  - Dies ist ein Widerspruch. Also kann $\overline{S}$ nicht aufzählbar sein ✓

Kurzer Beweis, da Diagonalisierung bereits in Definition von $\overline{S}$ enthalten

  - $\overline{S}$ wird zuweilen auch **Diagonalisierungssprache L_d** genannt

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

- **$\overline{S} = \{i \mid i \notin \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Annahme: $\overline{S}$ ist aufzählbar
  - Dann ist $\overline{S} = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_j$ und es folgt

$$j \in \overline{S} \;\Leftrightarrow\; j \notin \text{domain}(\varphi_j) \;\Leftrightarrow\; j \notin \text{domain}(f) \;\Leftrightarrow\; j \notin \overline{S}$$

  - Dies ist ein Widerspruch. Also kann $\overline{S}$ nicht aufzählbar sein ✓

  Kurzer Beweis, da Diagonalisierung bereits in Definition von $\overline{S}$ enthalten
  - $\overline{S}$ wird zuweilen auch **Diagonalisierungssprache L_d** genannt

- **$S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht entscheidbar**
  - Wenn S entscheidbar wäre, müsste $\overline{S}$ aufzählbar sein ✓

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i, n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ **ist entscheidbar**

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\times$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
φ_1	$\perp$	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\times$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	×	×	×	$\bot$	×	...
φ_1	$\bot$	$\bot$	×	×	×	...
φ_2	×	×	$\bot$	×	×	...
φ_3	$\bot$	×	$\bot$	×	$\bot$	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H{:}\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f{:}\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H{:}\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f{:}\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\times$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f berechenbar,
da $f(i) = \mu_z[\chi_H(i,i) = 0]$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f berechenbar,
da $f(i) = \mu_z[\chi_H(i,i) = 0]$

– Also gibt es ein j mit $f = \varphi_j$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f berechenbar,
da $f(i) = \mu_z[\chi_H(i,i) = 0]$

– Also gibt es ein j mit $f = \varphi_j$

– Aber für j gilt: $j \in \text{domain}(\varphi_j)$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f berechenbar,
da $f(i) = \mu_z[\chi_H(i,i) = 0]$

– Also gibt es ein j mit $f = \varphi_j$

– Aber für j gilt: $j \in \text{domain}(\varphi_j) \Leftrightarrow j \in \text{domain}(f)$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f berechenbar,
da $f(i) = \mu_z[\chi_H(i,i) = 0]$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Also gibt es ein j mit $f = \varphi_j$

– Aber für j gilt: $j \in \text{domain}(\varphi_j) \Leftrightarrow j \in \text{domain}(f) \Leftrightarrow j \notin \text{domain}(\varphi_j)$

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f berechenbar,
da $f(i) = \mu_z[\chi_H(i,i) = 0]$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Also gibt es ein j mit $f = \varphi_j$

– Aber für j gilt: $j \in \text{domain}(\varphi_j) \Leftrightarrow j \in \text{domain}(f) \Leftrightarrow j \notin \text{domain}(\varphi_j)$

– Dies ist ein Widerspruch, also kann H nicht entscheidbar sein ✓

Das Halteproblem ist unentscheidbar (vgl. TI-1)

Annahme: $H = \{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

– Dann ist $\chi_H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $\chi_H(i,n) = \begin{cases} 1 & n \in \text{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

– Definiere eine neue Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \text{domain}(\varphi_i) \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f berechenbar,
da $f(i) = \mu_z[\chi_H(i,i) = 0]$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\bot$	$\times$	$\times$	$\bot$	$\times$	...
φ_1	$\bot$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\bot$	$\times$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Also gibt es ein j mit $f = \varphi_j$

– Aber für j gilt: $j \in \text{domain}(\varphi_j) \Leftrightarrow j \in \text{domain}(f) \Leftrightarrow j \notin \text{domain}(\varphi_j)$

– Dies ist ein Widerspruch, also kann H nicht entscheidbar sein ✓

Terminierung von Programmen ist nicht testbar

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P
  - Konstruiere ein x, das von allen Elementen in M verschieden ist

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P
  - Konstruiere ein x, das von allen Elementen in M verschieden ist
  - Zeige, daß $x \in M$ aufgrund der Annahme gelten muß

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P
  - Konstruiere ein x, das von allen Elementen in M verschieden ist
  - Zeige, daß $x \in M$ aufgrund der Annahme gelten muß
  - Aus dem Widerspruch folgt, daß die Annahme nicht gelten kann

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P
  - Konstruiere ein x, das von allen Elementen in M verschieden ist
  - Zeige, daß $x \in M$ aufgrund der Annahme gelten muß
  - Aus dem Widerspruch folgt, daß die Annahme nicht gelten kann
- **Konstruktion: Cantorsches Diagonalverfahren**

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P
  - Konstruiere ein x, das von allen Elementen in M verschieden ist
  - Zeige, daß $x \in M$ aufgrund der Annahme gelten muß
  - Aus dem Widerspruch folgt, daß die Annahme nicht gelten kann
- **Konstruktion: Cantorsches Diagonalverfahren**
  - Trage alle Elemente von M als Zeilen einer Tabelle auf

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P
  - Konstruiere ein x, das von allen Elementen in M verschieden ist
  - Zeige, daß $x \in M$ aufgrund der Annahme gelten muß
  - Aus dem Widerspruch folgt, daß die Annahme nicht gelten kann
- **Konstruktion: Cantorsches Diagonalverfahren**
  - Trage alle Elemente von M als Zeilen einer Tabelle auf
  - Konstruiere x als Diagonale mit Abweichung an jedem Punkt

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P
  - Konstruiere ein x, das von allen Elementen in M verschieden ist
  - Zeige, daß $x \in M$ aufgrund der Annahme gelten muß
  - Aus dem Widerspruch folgt, daß die Annahme nicht gelten kann
- **Konstruktion: Cantorsches Diagonalverfahren**
  - Trage alle Elemente von M als Zeilen einer Tabelle auf
  - Konstruiere x als Diagonale mit Abweichung an jedem Punkt
  - Also kann x nicht als Zeile vorkommen

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P
  - Konstruiere ein x, das von allen Elementen in M verschieden ist
  - Zeige, daß $x \in M$ aufgrund der Annahme gelten muß
  - Aus dem Widerspruch folgt, daß die Annahme nicht gelten kann
- **Konstruktion: Cantorsches Diagonalverfahren**
  - Trage alle Elemente von M als Zeilen einer Tabelle auf
  - Konstruiere x als Diagonale mit Abweichung an jedem Punkt
  - Also kann x nicht als Zeile vorkommen

Mächtige, aber komplizierte Beweistechnik

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $\boldsymbol{TR} = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ **ist aufzählbar**

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i$ total$\}$ ist aufzählbar

– Dann gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\text{range}(f) = TR$

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ ist aufzählbar

– Dann gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\text{range}(f) = TR$

– Somit kann man alle Funktionen aus $\mathcal{TR}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ ist aufzählbar

– Dann gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\text{range}(f) = TR$

– Somit kann man alle Funktionen aus $\mathcal{TR}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)+1$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion h:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \varphi_{f(n)}(n)+1$

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ ist aufzählbar

– Dann gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\text{range}(f) = TR$

– Somit kann man alle Funktionen aus $\mathcal{TR}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)+1$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)+1$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion h:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \varphi_{f(n)}(n)+1$

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ ist aufzählbar

– Dann gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\text{range}(f) = TR$

– Somit kann man alle Funktionen aus $\mathcal{TR}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)+1$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)+1$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)+1$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion h:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \varphi_{f(n)}(n)+1$

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ ist aufzählbar

– Dann gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\text{range}(f) = TR$

– Somit kann man alle Funktionen aus $\mathcal{TR}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)+1$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)+1$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)+1$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)+1$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion h:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \varphi_{f(n)}(n)+1$

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ ist aufzählbar

– Dann gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\text{range}(f) = TR$

– Somit kann man alle Funktionen aus $\mathcal{TR}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)+1$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)+1$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)+1$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)+1$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion $h{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \varphi_{f(n)}(n)+1$

– h ist offensichtlich total und berechenbar, denn $h(n) = u(f(n), n)+1$

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ ist aufzählbar

– Dann gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\text{range}(f) = TR$

– Somit kann man alle Funktionen aus $\mathcal{TR}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)+1$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)+1$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)+1$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)+1$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion $h{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \varphi_{f(n)}(n)+1$

– h ist offensichtlich total und berechenbar, denn $h(n) = u(f(n), n)+1$

– Also gibt es ein $i \in TR$ mit $h = \varphi_i$ und damit ein $j \in \mathbb{N}$ mit $i{=}f(j)$

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ ist aufzählbar

– Dann gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\text{range}(f) = TR$

– Somit kann man alle Funktionen aus $\mathcal{TR}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)+1$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)+1$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)+1$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)+1$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion $h{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \varphi_{f(n)}(n)+1$

– h ist offensichtlich total und berechenbar, denn $h(n) = u(f(n), n)+1$

– Also gibt es ein $i \in TR$ mit $h = \varphi_i$ und damit ein $j \in \mathbb{N}$ mit $i{=}f(j)$

– Für dieses j gilt: $\varphi_{f(j)}(j) = h(j) = \varphi_{f(j)}(j)+1$

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$ ist aufzählbar

– Dann gibt es eine total rekursive Funktion f mit $\text{range}(f) = TR$

– Somit kann man alle Funktionen aus $\mathcal{TR}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)+1$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)+1$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)+1$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)+1$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion $h{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \varphi_{f(n)}(n)+1$

– h ist offensichtlich total und berechenbar, denn $h(n) = u(f(n), n)+1$

– Also gibt es ein $i \in TR$ mit $h = \varphi_i$ und damit ein $j \in \mathbb{N}$ mit $i{=}f(j)$

– Für dieses j gilt: $\varphi_{f(j)}(j) = h(j) = \varphi_{f(j)}(j)+1$

– Dies ist ein Widerspruch, also kann TR nicht aufzählbar sein ✓

Monotoniearguments

- **Ziel**
  - Zeige, daß eine Funktion f eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. primitiv rekursiv, berechenbar, maximale Komplexität

Monotoniearguments

- **Ziel**
  - Zeige, daß eine Funktion f eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. primitiv rekursiv, berechenbar, maximale Komplexität
- **Methodik**
  - Zeige daß f stärker wächst als jede Funktion mit Eigenschaft P

Monotoniearguments

- **Ziel**
  - Zeige, daß eine Funktion f eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. primitiv rekursiv, berechenbar, maximale Komplexität
- **Methodik**
  - Zeige daß f stärker wächst als jede Funktion mit Eigenschaft P
    - Induktive Analyse des Wachstumsverhaltens von f
    - Analysiere maximales Wachstum von Funktionen mit Eigenschaft P

Monotoniearguments

- **Ziel**
  - Zeige, daß eine Funktion f eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. primitiv rekursiv, berechenbar, maximale Komplexität
- **Methodik**
  - Zeige daß f stärker wächst als jede Funktion mit Eigenschaft P
    - Induktive Analyse des Wachstumsverhaltens von f
    - Analysiere maximales Wachstum von Funktionen mit Eigenschaft P
  - f kann also nicht selbst Eigenschaft P besitzen

Monotoniearguments

- **Ziel**
  - Zeige, daß eine Funktion f eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. primitiv rekursiv, berechenbar, maximale Komplexität
- **Methodik**
  - Zeige daß f stärker wächst als jede Funktion mit Eigenschaft P
    - Induktive Analyse des Wachstumsverhaltens von f
    - Analysiere maximales Wachstum von Funktionen mit Eigenschaft P
  - f kann also nicht selbst Eigenschaft P besitzen
- **Beispiele**
  - Die Ackermann Funktion ist nicht primitiv-rekursiv
  - Die Busy-Beaver Funktion ist nicht berechenbar (Beweis folgt)
  - Komplexitätsanalysen

Das Busy Beaver Problem

Biber stauen Bäche, indem sie Holzstücke in den Bach tragen. Fleißige Biber tragen mehr Holzstücke zusammen als faule. Größere Biber können mehr leisten als kleine.

Die Busy Beaver Funktion bestimmt die Länge der längsten ununterbrochenen Staumauer, die ein Biber ohne eine bereits vorhandene Teilmauer zusammentragen kann.

Das Busy Beaver Problem

Biber stauen Bäche, indem sie Holzstücke in den Bach tragen. Fleißige Biber tragen mehr Holzstücke zusammen als faule. Größere Biber können mehr leisten als kleine.

Die Busy Beaver Funktion bestimmt die Länge der längsten ununterbrochenen Staumauer, die ein Biber ohne eine bereits vorhandene Teilmauer zusammentragen kann.

- **Beschreibe Biber durch Turingmaschinen**

Das Busy Beaver Problem

Biber stauen Bäche, indem sie Holzstücke in den Bach tragen. Fleißige Biber tragen mehr Holzstücke zusammen als faule. Größere Biber können mehr leisten als kleine.

Die Busy Beaver Funktion bestimmt die Länge der längsten ununterbrochenen Staumauer, die ein Biber ohne eine bereits vorhandene Teilmauer zusammentragen kann.

- **Beschreibe Biber durch Turingmaschinen**
  - Holzstücke werden durch das Symbol | beschrieben
  - $M = (\{1..n\}, \{|\}, \{|, B\}, \delta, 1, B, \emptyset)$ heißt Busy-Beaver TM der Größe n
  - **BBT(n)** sei die Menge aller Busy-Beaver Turingmaschinen der Größe n

Das Busy Beaver Problem

Biber stauen Bäche, indem sie Holzstücke in den Bach tragen. Fleißige Biber tragen mehr Holzstücke zusammen als faule. Größere Biber können mehr leisten als kleine.

Die Busy Beaver Funktion bestimmt die Länge der längsten ununterbrochenen Staumauer, die ein Biber ohne eine bereits vorhandene Teilmauer zusammentragen kann.

- **Beschreibe Biber durch Turingmaschinen**
  - Holzstücke werden durch das Symbol | beschrieben
  - $M = (\{1..n\}, \{|\}, \{|, B\}, \delta, 1, B, \emptyset)$ heißt Busy-Beaver TM der Größe n
  - **BBT(n)** sei die Menge aller Busy-Beaver Turingmaschinen der Größe n
- **Beschreibe Produktivität von Bibern**
  - **Produktivität(M)** $= \begin{cases} n & \text{wenn } f_M(\epsilon) = |^n \\ 0 & \text{wenn } M \text{ bei Eingabe } \epsilon \text{ nicht hält} \end{cases}$

Das Busy Beaver Problem

Biber stauen Bäche, indem sie Holzstücke in den Bach tragen. Fleißige Biber tragen mehr Holzstücke zusammen als faule. Größere Biber können mehr leisten als kleine.

Die Busy Beaver Funktion bestimmt die Länge der längsten ununterbrochenen Staumauer, die ein Biber ohne eine bereits vorhandene Teilmauer zusammentragen kann.

- **Beschreibe Biber durch Turingmaschinen**
  - Holzstücke werden durch das Symbol | beschrieben
  - $M = (\{1..n\}, \{|\}, \{|, B\}, \delta, 1, B, \emptyset)$ heißt Busy-Beaver TM der Größe n
  - **BBT(n)** sei die Menge aller Busy-Beaver Turingmaschinen der Größe n
- **Beschreibe Produktivität von Bibern**
  - $\textbf{Produktivität}(M) = \begin{cases} n & \text{wenn } f_M(\epsilon) = |^n \\ 0 & \text{wenn } M \text{ bei Eingabe } \epsilon \text{ nicht hält} \end{cases}$
- **Beschreibe maximal mögliche Leistung von Bibern**
  - $\textbf{BB}(n) = \max\{\text{Produktivität}(M) \mid M \in \text{BBT}(n)\}$

Das Busy Beaver Problem

Biber stauen Bäche, indem sie Holzstücke in den Bach tragen. Fleißige Biber tragen mehr Holzstücke zusammen als faule. Größere Biber können mehr leisten als kleine.

Die Busy Beaver Funktion bestimmt die Länge der längsten ununterbrochenen Staumauer, die ein Biber ohne eine bereits vorhandene Teilmauer zusammentragen kann.

- **Beschreibe Biber durch Turingmaschinen**
  - Holzstücke werden durch das Symbol | beschrieben
  - $M = (\{1..n\}, \{|\}, \{|, B\}, \delta, 1, B, \emptyset)$ heißt Busy-Beaver TM der Größe n
  - **BBT(n)** sei die Menge aller Busy-Beaver Turingmaschinen der Größe n
- **Beschreibe Produktivität von Bibern**
  - $\textbf{Produktivität}(M) = \begin{cases} n & \text{wenn } f_M(\epsilon) = |^n \\ 0 & \text{wenn } M \text{ bei Eingabe } \epsilon \text{ nicht hält} \end{cases}$
- **Beschreibe maximal mögliche Leistung von Bibern**
  - $\textbf{BB}(n) = \max\{\text{Produktivität}(M) \mid M \in \text{BBT}(n)\}$

Ist die Busy-Beaver Funktion berechenbar?

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	|	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\|,L)$	$(2,\|,R)$
2	—	$(1,\|,L)$

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

	δ	|	B
$\rightarrow$	1	$(2,\|,L)$	$(2,\|,R)$
	2	—	$(1,\|,L)$

Arbeitsweise:

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	$\vert$	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\vert,L)$	$(2,\vert,R)$
2	—	$(1,\vert,L)$

Arbeitsweise: $(\epsilon,1,B)$

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	$\vert$	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\vert,L)$	$(2,\vert,R)$
2	—	$(1,\vert,L)$

Arbeitsweise: $(\epsilon,1,B) \vdash (\vert,2,B)$

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	$\|$	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\|,L)$	$(2,\|,R)$
2	—	$(1,\|,L)$

Arbeitsweise: $(\epsilon,1,B) \vdash (\|,2,B)$
$\vdash (\epsilon,1,\|\|)$

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	$\vert$	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\vert,L)$	$(2,\vert,R)$
2	—	$(1,\vert,L)$

Arbeitsweise:

$$(\epsilon,1,B) \vdash (\vert,2,B)$$
$$\vdash (\epsilon,1,\vert\vert) \vdash (\epsilon,2,B\vert\vert)$$

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	$\|$	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\|,L)$	$(2,\|,R)$
2	—	$(1,\|,L)$

Arbeitsweise:

$$(\epsilon,1,B) \vdash (|,2,B)$$
$$\vdash (\epsilon,1,||) \vdash (\epsilon,2,B||)$$
$$\vdash (\epsilon,1,B|||)$$

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	$\|$	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\|,L)$	$(2,\|,R)$
2	—	$(1,\|,L)$

Arbeitsweise:

$$\begin{aligned}
&(\epsilon,1,B) && \vdash (|,2,B)\\
&\vdash (\epsilon,1,||) && \vdash (\epsilon,2,B||)\\
&\vdash (\epsilon,1,B|||) && \vdash (|,2,|||)
\end{aligned}$$

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	$\vert$	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\vert,L)$	$(2,\vert,R)$
2	—	$(1,\vert,L)$

Arbeitsweise:

$(\epsilon,1,B) \vdash (\vert,2,B)$

$\vdash (\epsilon,1,\vert\vert) \vdash (\epsilon,2,B\vert\vert)$

$\vdash (\epsilon,1,B\vert\vert\vert) \vdash (\vert,2,\vert\vert\vert)$ stop

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	$\vert$	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\vert,L)$	$(2,\vert,R)$
2	—	$(1,\vert,L)$

Arbeitsweise:

$(\epsilon,1,B) \vdash (\vert,2,B)$

$\vdash (\epsilon,1,\vert\vert) \vdash (\epsilon,2,B\vert\vert)$

$\vdash (\epsilon,1,B\vert\vert\vert) \vdash (\vert,2,\vert\vert\vert)$ stop

– Produktivität ist 3 (4, wenn man alle Holzstücke zählt)

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	|	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\|,L)$	$(2,\|,R)$
2	—	$(1,\|,L)$

Arbeitsweise:

$(\epsilon,1,B) \vdash (\|,2,B)$
$\vdash (\epsilon,1,\|\|) \vdash (\epsilon,2,B\|\|)$
$\vdash (\epsilon,1,B\|\|\|) \vdash (\|,2,\|\|\|)$ stop

– Produktivität ist 3 (4, wenn man alle Holzstücke zählt)

- **BB(n) bekannt für kleine n:** (alle Holzstücke auf dem Band gezählt)

n	1	2	3	4	5	6	...
	1	4	6	13	$\geq$4098	$\geq 1.2 * 10^{865}$	

http://www.drb.insel.de/~heiner/BB

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	|	B
$\rightarrow$ 1	$(2,\|,L)$	$(2,\|,R)$
2	—	$(1,\|,L)$

Arbeitsweise:

$(\epsilon,1,B) \vdash (\|,2,B)$
$\vdash (\epsilon,1,\|\|) \vdash (\epsilon,2,B\|\|)$
$\vdash (\epsilon,1,B\|\|\|) \vdash (\|,2,\|\|\|)$ stop

– Produktivität ist 3 (4, wenn man alle Holzstücke zählt)

- **BB(n) bekannt für kleine n:** (alle Holzstücke auf dem Band gezählt)

n	1	2	3	4	5	6	...
	1	4	6	13	$\geq$4098	$\geq 1.2 * 10^{865}$	

http://www.drb.insel.de/~heiner/BB

- **Vollständige Analyse nicht möglich**

– $|\mathrm{BBT}(n)|$ ist etwa $(|Q|*|\Gamma|*|\{R,L\}|)^{(|Q|*|\Gamma|)} = (4n)^{2n}$

$|\mathrm{BBT}(1)|$=16, $|\mathrm{BBT}(2)|$=4096, $|\mathrm{BBT}(3)|$=2985984, ...

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	|	B
$\rightarrow$ 1	(2,|,L)	(2,|,R)
2	—	(1,|,L)

Arbeitsweise:
$(\epsilon,1,B) \vdash (|,2,B)$
$\vdash (\epsilon,1,||) \vdash (\epsilon,2,B||)$
$\vdash (\epsilon,1,B|||) \vdash (|,2,|||)$ stop

– Produktivität ist 3 (4, wenn man alle Holzstücke zählt)

- **BB(n) bekannt für kleine n:** (alle Holzstücke auf dem Band gezählt)

n	1	2	3	4	5	6	...
	1	4	6	13	$\geq$4098	$\geq 1.2*10^{865}$	

http://www.drb.insel.de/~heiner/BB

- **Vollständige Analyse nicht möglich**
  - $|\text{BBT}(n)|$ ist etwa $(|Q|*|\Gamma|*|\{R,L\}|)^{(|Q|*|\Gamma|)} = (4n)^{2n}$
    $|\text{BBT}(1)|=16,\ |\text{BBT}(2)|=4096,\ |\text{BBT}(3)|=2985984,\ \ldots$
  - Anzahl möglicher Bandkonfigurationen einer TM ist unbegrenzt

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $\boldsymbol{i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)}$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt:** $\mathrm{BB}(n+5)\geq 2n$

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt:** $\mathrm{BB}(n+5)\geq 2n$
  - Mit n Zuständen kann man n Striche generieren

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt:** $\mathrm{BB}(n+5)\geq 2n$
  - Mit n Zuständen kann man n Striche generieren
  - Mit 5 Zuständen kann man Striche verdoppeln (vgl M_4 aus Einheit 4.2)

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt:** $\mathrm{BB}(n+5)\geq 2n$
  - Mit n Zuständen kann man n Striche generieren
  - Mit 5 Zuständen kann man Striche verdoppeln (vgl M_4 aus Einheit 4.2)
- **BB berechenbar** $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}.\ \mathrm{BB}(n+2k)\geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $\boldsymbol{i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)}$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt:** $\boldsymbol{\mathrm{BB}(n+5)\geq 2n}$
  - Mit n Zuständen kann man n Striche generieren
  - Mit 5 Zuständen kann man Striche verdoppeln (vgl M_4 aus Einheit 4.2)
- $\boldsymbol{\mathrm{BB}\text{ berechenbar } \Rightarrow\ \exists k\in\mathbb{N}.\ \mathrm{BB}(n+2k)\geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))}$
  - Wähle $k=$ Zahl der Zustände der TM über $\Gamma=\{|, B\}$, die BB berechnet

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt:** $\mathrm{BB}(n+5)\geq 2n$
  - Mit n Zuständen kann man n Striche generieren
  - Mit 5 Zuständen kann man Striche verdoppeln (vgl M_4 aus Einheit 4.2)
- **BB berechenbar** $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}.\ \mathrm{BB}(n+2k)\geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$
  - Wähle k = Zahl der Zustände der TM über $\Gamma=\{|, B\}$, die BB berechnet
  - Mit n Zuständen generiere n Striche
  - Mit k Zuständen berechne jetzt $\mathrm{BB}(n)$
  - Mit weiteren k Zuständen berechne $\mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt:** $\mathrm{BB}(n+5)\geq 2n$
  - Mit n Zuständen kann man n Striche generieren
  - Mit 5 Zuständen kann man Striche verdoppeln (vgl M_4 aus Einheit 4.2)
- **BB berechenbar** $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}.\ \mathrm{BB}(n+2k)\geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$
  - Wähle k = Zahl der Zustände der TM über $\Gamma=\{|, B\}$, die BB berechnet
  - Mit n Zuständen generiere n Striche
  - Mit k Zuständen berechne jetzt $\mathrm{BB}(n)$
  - Mit weiteren k Zuständen berechne $\mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$
- **BB kann nicht berechenbar sein**

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt:** $\mathrm{BB}(n+5)\geq 2n$
  - Mit n Zuständen kann man n Striche generieren
  - Mit 5 Zuständen kann man Striche verdoppeln (vgl M_4 aus Einheit 4.2)
- **BB berechenbar** $\Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}.\ \mathrm{BB}(n+2k)\geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$
  - Wähle k = Zahl der Zustände der TM über $\Gamma=\{|, B\}$, die BB berechnet
  - Mit n Zuständen generiere n Striche
  - Mit k Zuständen berechne jetzt $\mathrm{BB}(n)$
  - Mit weiteren k Zuständen berechne $\mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$
- **BB kann nicht berechenbar sein**
  - Sonst $\mathrm{BB}(n+5+2k) \geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n+5)) \geq \mathrm{BB}(2n)$ für ein k und alle n

Das Busy Beaver Problem ist unlösbar

- **BB ist streng monoton:** $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - Beginne mit der BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand $n+1$
    - Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe ein |
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt:** $\mathrm{BB}(n+5)\geq 2n$
  - Mit n Zuständen kann man n Striche generieren
  - Mit 5 Zuständen kann man Striche verdoppeln (vgl M_4 aus Einheit 4.2)
- **BB berechenbar** $\Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}.\ \mathrm{BB}(n+2k)\geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$
  - Wähle k = Zahl der Zustände der TM über $\Gamma=\{|, B\}$, die BB berechnet
  - Mit n Zuständen generiere n Striche
  - Mit k Zuständen berechne jetzt $\mathrm{BB}(n)$
  - Mit weiteren k Zuständen berechne $\mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))$
- **BB kann nicht berechenbar sein**
  - Sonst $\mathrm{BB}(n+5+2k) \geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n+5)) \geq \mathrm{BB}(2n)$ für ein k und alle n
  - Für $n=2k+6$ widerspräche $\mathrm{BB}(4k+11) \geq \mathrm{BB}(4k+12)$ der Monotonie ✓

Beweisführung durch Reduktion

- **Das Halteproblem braucht keinen Diagonalbeweis**

Beweisführung durch Reduktion

- **Das Halteproblem braucht keinen Diagonalbeweis**

  Die Unentscheidbarkeit von $\boldsymbol{H = \{(i,n) \mid n \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}}$ läßt sich auf die Unentscheidbarkeit von $S = \{i \mid i \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ zurückführen

Beweisführung durch Reduktion

- **Das Halteproblem braucht keinen Diagonalbeweis**

  Die Unentscheidbarkeit von $\boldsymbol{H = \{(i,n) \mid n \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}}$ läßt sich auf die Unentscheidbarkeit von $S = \{i \mid i \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ zurückführen

  – Annahme: H ist entscheidbar, d.h. χ_H ist berechenbar

Beweisführung durch Reduktion

- **Das Halteproblem braucht keinen Diagonalbeweis**

  Die Unentscheidbarkeit von $\boldsymbol{H = \{(i,n) \mid n \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}}$ läßt sich auf die Unentscheidbarkeit von $S = \{i \mid i \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ zurückführen

  – Annahme: H ist entscheidbar, d.h. χ_H ist berechenbar

  – Wir zeigen, daß die charakteristische Funktion von S berechenbar ist

Beweisführung durch Reduktion

- **Das Halteproblem braucht keinen Diagonalbeweis**

  Die Unentscheidbarkeit von $\boldsymbol{H = \{(i,n) \mid n \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}}$ läßt sich auf die Unentscheidbarkeit von $S = \{i \mid i \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ zurückführen

  – Annahme: H ist entscheidbar, d.h. χ_H ist berechenbar

  – Wir zeigen, daß die charakteristische Funktion von S berechenbar ist

  · Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$

Beweisführung durch Reduktion

- **Das Halteproblem braucht keinen Diagonalbeweis**

  Die Unentscheidbarkeit von $\boldsymbol{H = \{(i,n) \mid n \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}}$ läßt sich auf die Unentscheidbarkeit von $S = \{i \mid i \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ zurückführen

  – Annahme: H ist entscheidbar, d.h. χ_H ist berechenbar

  – Wir zeigen, daß die charakteristische Funktion von S berechenbar ist

  · Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$

  · Damit ist $\chi_S(i) = \chi_H(i,i)$

  · Da χ_H berechenbar ist, gilt dies auch für χ_S

Beweisführung durch Reduktion

- **Das Halteproblem braucht keinen Diagonalbeweis**

  Die Unentscheidbarkeit von $\boldsymbol{H = \{(i,n) \mid n \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}}$ läßt sich auf die Unentscheidbarkeit von $S = \{i \mid i \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ zurückführen

  – Annahme: H ist entscheidbar, d.h. χ_H ist berechenbar

  – Wir zeigen, daß die charakteristische Funktion von S berechenbar ist

  · Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$

  · Damit ist $\chi_S(i) = \chi_H(i,i)$

  · Da χ_H berechenbar ist, gilt dies auch für χ_S

  – Da S aber unentscheidbar ist, ergibt sich ein Widerspruch ✓

Beweisführung durch Reduktion

- **Das Halteproblem braucht keinen Diagonalbeweis**

  Die Unentscheidbarkeit von $\boldsymbol{H = \{(i,n) \mid n \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}}$ läßt sich auf die Unentscheidbarkeit von $S = \{i \mid i \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ zurückführen

  - Annahme: H ist entscheidbar, d.h. χ_H ist berechenbar
  - Wir zeigen, daß die charakteristische Funktion von S berechenbar ist
    - Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$
    - Damit ist $\chi_S(i) = \chi_H(i,i)$
    - Da χ_H berechenbar ist, gilt dies auch für χ_S
  - Da S aber unentscheidbar ist, ergibt sich ein Widerspruch ✓

- **Beweis "reduziert" $\boldsymbol{S}$ auf $\boldsymbol{H}$**
  - Eine Funktion f transformiert Eingaben für S in Eingaben für H
  - Die Transformation f ist berechenbar und es gilt $x \in S \Leftrightarrow f(x) \in H$

Beweisführung durch Reduktion

- **Das Halteproblem braucht keinen Diagonalbeweis**

  Die Unentscheidbarkeit von $\boldsymbol{H = \{(i,n) \mid n \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}}$ läßt sich auf die Unentscheidbarkeit von $S = \{i \mid i \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ zurückführen

  - Annahme: H ist entscheidbar, d.h. χ_H ist berechenbar
  - Wir zeigen, daß die charakteristische Funktion von S berechenbar ist
    - Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$
    - Damit ist $\chi_S(i) = \chi_H(i,i)$
    - Da χ_H berechenbar ist, gilt dies auch für χ_S
  - Da S aber unentscheidbar ist, ergibt sich ein Widerspruch ✓

- **Beweis "reduziert" $\boldsymbol{S}$ auf $\boldsymbol{H}$**
  - Eine Funktion f transformiert Eingaben für S in Eingaben für H
  - Die Transformation f ist berechenbar und es gilt $x \in S \Leftrightarrow f(x) \in H$
  - Damit transformiert f jede Lösung für H in eine für S

Problemreduktion

- **Ziel: Wiederverwendung bekannter Ergebnisse**
  - Zur Lösung eines Problems P bzw. zum Nachweis seiner Unlösbarkeit

Problemreduktion

- **Ziel: Wiederverwendung bekannter Ergebnisse**
  - Zur Lösung eines Problems P bzw. zum Nachweis seiner Unlösbarkeit
  - Lösbar $\hat{=}$ entscheidbar, aufzählbar, berechenbar, in Zeit t lösbar, ...

Problemreduktion

- **Ziel: Wiederverwendung bekannter Ergebnisse**
  - Zur Lösung eines Problems P bzw. zum Nachweis seiner Unlösbarkeit
  - Lösbar $\hat{=}$ entscheidbar, aufzählbar, berechenbar, in Zeit t lösbar, ...
- **Methodik zum Nachweis der Unlösbarkeit**
  - Transformiere ein bekannt unlösbares Problem P_1 in Spezialfälle von P

Problemreduktion

- **Ziel: Wiederverwendung bekannter Ergebnisse**
  - Zur Lösung eines Problems P bzw. zum Nachweis seiner Unlösbarkeit
  - Lösbar $\hat{=}$ entscheidbar, aufzählbar, berechenbar, in Zeit t lösbar, ...
- **Methodik zum Nachweis der Unlösbarkeit**
  - Transformiere ein bekannt unlösbares Problem P_1 in Spezialfälle von P
  - Zeige, daß jede Lösung für P in eine Lösung für P_1 transformiert würde

Problemreduktion

- **Ziel: Wiederverwendung bekannter Ergebnisse**
  - Zur Lösung eines Problems P bzw. zum Nachweis seiner Unlösbarkeit
  - Lösbar $\hat{=}$ entscheidbar, aufzählbar, berechenbar, in Zeit t lösbar, ...
- **Methodik zum Nachweis der Unlösbarkeit**
  - Transformiere ein bekannt unlösbares Problem P_1 in Spezialfälle von P
  - Zeige, daß jede Lösung für P in eine Lösung für P_1 transformiert würde
  - P kann also nicht lösbar sein

Problemreduktion

- **Ziel: Wiederverwendung bekannter Ergebnisse**
  - Zur Lösung eines Problems P bzw. zum Nachweis seiner Unlösbarkeit
  - Lösbar $\hat{=}$ entscheidbar, aufzählbar, berechenbar, in Zeit t lösbar, ...
- **Methodik zum Nachweis der Unlösbarkeit**
  - Transformiere ein bekannt unlösbares Problem P_1 in Spezialfälle von P
  - Zeige, daß jede Lösung für P in eine Lösung für P_1 transformiert würde
  - P kann also nicht lösbar sein
- **Methodik zur Konstruktion einer Lösung**
  - Transformiere P in Spezialfälle eines als lösbar bekannten Problems P_2

Problemreduktion

- **Ziel: Wiederverwendung bekannter Ergebnisse**
  - Zur Lösung eines Problems P bzw. zum Nachweis seiner Unlösbarkeit
  - Lösbar $\hat{=}$ entscheidbar, aufzählbar, berechenbar, in Zeit t lösbar, ...
- **Methodik zum Nachweis der Unlösbarkeit**
  - Transformiere ein bekannt unlösbares Problem P_1 in Spezialfälle von P
  - Zeige, daß jede Lösung für P in eine Lösung für P_1 transformiert würde
  - P kann also nicht lösbar sein
- **Methodik zur Konstruktion einer Lösung**
  - Transformiere P in Spezialfälle eines als lösbar bekannten Problems P_2
  - Zeige, wie eine Lösung für P_2 in eine Lösung für P transformiert wird

Problemreduktion

- **Ziel: Wiederverwendung bekannter Ergebnisse**
  - Zur Lösung eines Problems P bzw. zum Nachweis seiner Unlösbarkeit
  - Lösbar $\hat{=}$ entscheidbar, aufzählbar, berechenbar, in Zeit t lösbar, ...
- **Methodik zum Nachweis der Unlösbarkeit**
  - Transformiere ein bekannt unlösbares Problem P_1 in Spezialfälle von P
  - Zeige, daß jede Lösung für P in eine Lösung für P_1 transformiert würde
  - P kann also nicht lösbar sein
- **Methodik zur Konstruktion einer Lösung**
  - Transformiere P in Spezialfälle eines als lösbar bekannten Problems P_2
  - Zeige, wie eine Lösung für P_2 in eine Lösung für P transformiert wird
- **Theoretisches Konzept: Reduzierbarkeit**
  - $\boldsymbol{P' \leq P}$, falls $P' = f^{-1}(P) = \{x \mid f(x) \in P\}$ für ein total berechenbares f

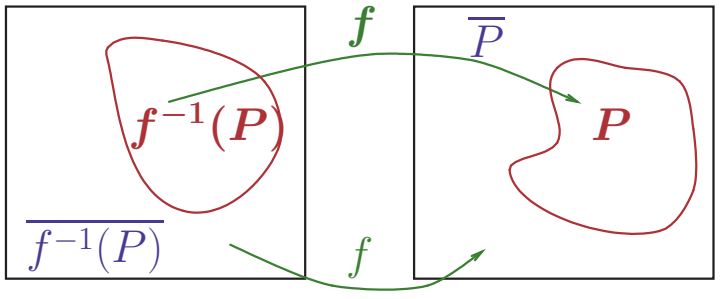
    "**P' ist reduzierbar auf P**"

Achtung: umgangssprachlich wird zuweilen die Problemstellung P auf P' "reduziert"

Beweisführung durch Reduktion

- **Ähnlich zu inversen Homomorphismen in $\mathcal{L}_3$**
  - Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$
  - Aber: keine syntaktische Restriktion an f

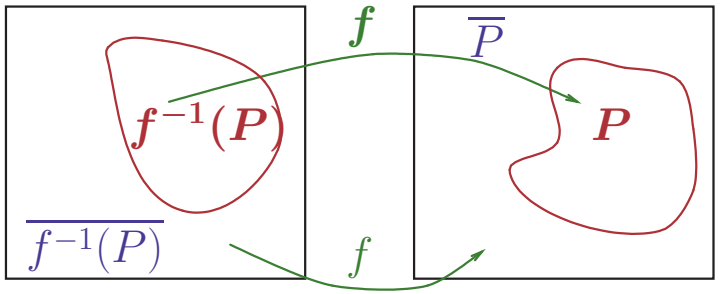
    f muß nur total berechenbar sein



Beweisführung durch Reduktion

- **Ähnlich zu inversen Homomorphismen in $\mathcal{L}_3$**
  - Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$
  - Aber: keine syntaktische Restriktion an f

    f muß nur total berechenbar sein

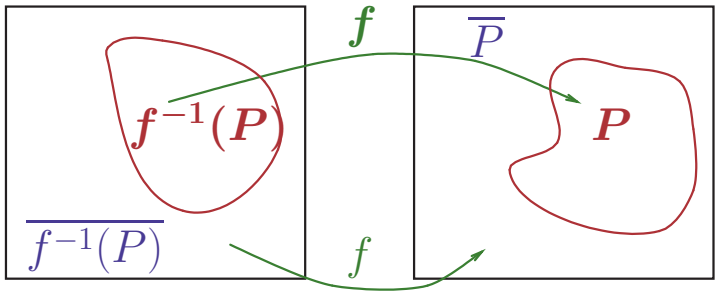


- **$P' \leq P$ bedeutet "P' ist nicht schwerer als P"**

Beweisführung durch Reduktion

- **Ähnlich zu inversen Homomorphismen in $\mathcal{L}_3$**
  - Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$
  - Aber: keine syntaktische Restriktion an f

    f muß nur total berechenbar sein

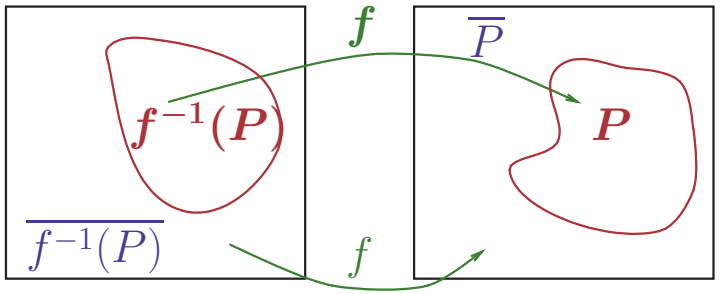


- **$P' \leq P$ bedeutet "P' ist nicht schwerer als P"**
  - Ist P lösbar, dann kann P' wie folgt gelöst werden

Beweisführung durch Reduktion

- **Ähnlich zu inversen Homomorphismen in $\mathcal{L}_3$**
  - Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$
  - Aber: keine syntaktische Restriktion an f

    f muß nur total berechenbar sein

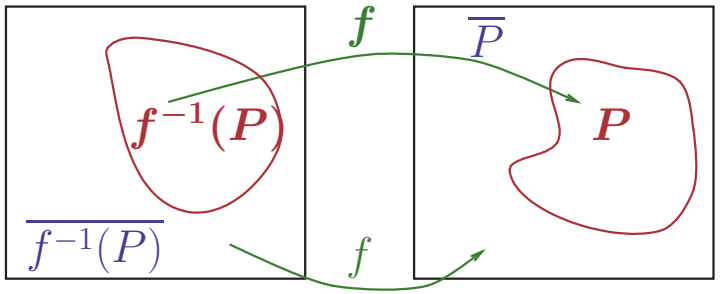


- **$P' \leq P$ bedeutet "P' ist nicht schwerer als P"**
  - Ist P lösbar, dann kann P' wie folgt gelöst werden
    - Bei Eingabe x bestimme $f(x)$ (f ist die Reduktionsfunktion)

Beweisführung durch Reduktion

- **Ähnlich zu inversen Homomorphismen in $\mathcal{L}_3$**
  - Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$
  - Aber: keine syntaktische Restriktion an f

    f muß nur total berechenbar sein

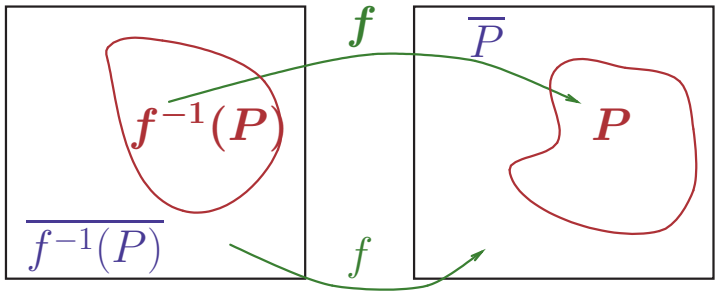


- **$P' \leq P$ bedeutet "P' ist nicht schwerer als P"**
  - Ist P lösbar, dann kann P' wie folgt gelöst werden
    - Bei Eingabe x bestimme $f(x)$ (f ist die Reduktionsfunktion)
    - Löse $f(x)$ mit der Lösungsmethode für P

Beweisführung durch Reduktion

- **Ähnlich zu inversen Homomorphismen in $\mathcal{L}_3$**
  - Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$
  - Aber: keine syntaktische Restriktion an f

    f muß nur total berechenbar sein

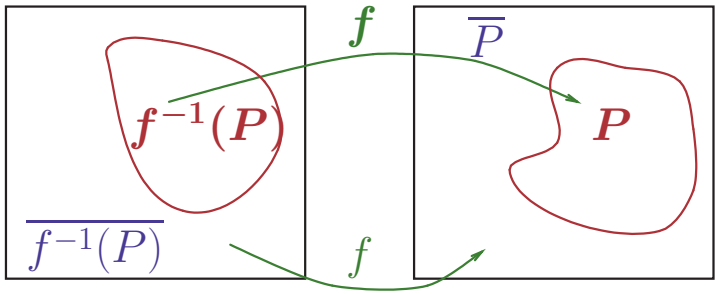


- **$P' \leq P$ bedeutet "P' ist nicht schwerer als P"**
  - Ist P lösbar, dann kann P' wie folgt gelöst werden
    - Bei Eingabe x bestimme $f(x)$ (f ist die Reduktionsfunktion)
    - Löse $f(x)$ mit der Lösungsmethode für P
    - Wegen $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$ überträgt sich das Ergebnis

Beweisführung durch Reduktion

- **Ähnlich zu inversen Homomorphismen in $\mathcal{L}_3$**
  - Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$
  - Aber: keine syntaktische Restriktion an f

    f muß nur total berechenbar sein

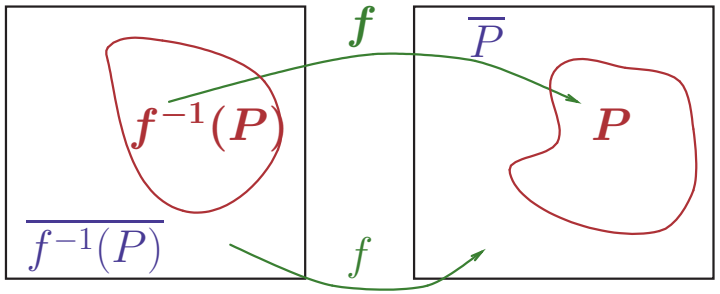


- **$P' \leq P$ bedeutet "P' ist nicht schwerer als P"**
  - Ist P lösbar, dann kann P' wie folgt gelöst werden
    - Bei Eingabe x bestimme $f(x)$ (f ist die Reduktionsfunktion)
    - Löse $f(x)$ mit der Lösungsmethode für P
    - Wegen $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$ überträgt sich das Ergebnis
- **Konsequenzen von Reduzierbarkeit $P' \leq P$**
  - Aus P entscheidbar folgt P' entscheidbar: $\chi_{P'}(x) = \chi_{f^{-1}(P)}(x) = \chi_P(f(x))$

Beweisführung durch Reduktion

- **Ähnlich zu inversen Homomorphismen in $\mathcal{L}_3$**
  - Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$
  - Aber: keine syntaktische Restriktion an f

    f muß nur total berechenbar sein

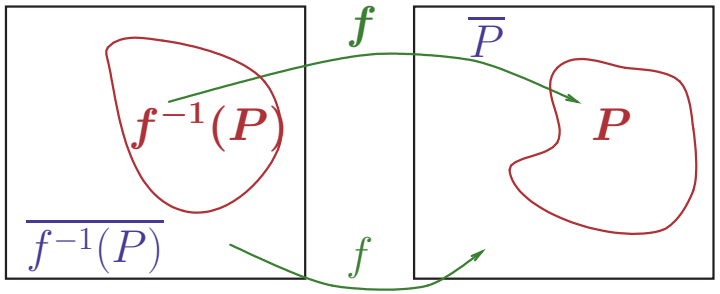


- **$P' \leq P$ bedeutet "P' ist nicht schwerer als P"**
  - Ist P lösbar, dann kann P' wie folgt gelöst werden
    - Bei Eingabe x bestimme $f(x)$ (f ist die Reduktionsfunktion)
    - Löse $f(x)$ mit der Lösungsmethode für P
    - Wegen $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$ überträgt sich das Ergebnis
- **Konsequenzen von Reduzierbarkeit $P' \leq P$**
  - Aus P entscheidbar folgt P' entscheidbar: $\chi_{P'}(x) = \chi_{f^{-1}(P)}(x) = \chi_P(f(x))$
  - **Aus P' unentscheidbar folgt P unentscheidbar**

Beweisführung durch Reduktion

- **Ähnlich zu inversen Homomorphismen in $\mathcal{L}_3$**
  - Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$
  - Aber: keine syntaktische Restriktion an f

    f muß nur total berechenbar sein



- **$P' \leq P$ bedeutet "P' ist nicht schwerer als P"**
  - Ist P lösbar, dann kann P' wie folgt gelöst werden
    - Bei Eingabe x bestimme $f(x)$ (f ist die Reduktionsfunktion)
    - Löse $f(x)$ mit der Lösungsmethode für P
    - Wegen $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$ überträgt sich das Ergebnis
- **Konsequenzen von Reduzierbarkeit $P' \leq P$**
  - Aus P entscheidbar folgt P' entscheidbar: $\chi_{P'}(x) = \chi_{f^{-1}(P)}(x) = \chi_P(f(x))$
  - **Aus P' unentscheidbar folgt P unentscheidbar**
  - Aus P aufzählbar folgt P' aufzählbar: $\psi_{P'}(x) = \psi_{f^{-1}(P)}(x) = \psi_P(f(x))$
  - **Aus P' nicht aufzählbar folgt P nicht aufzählbar**

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$
- $\overline{\boldsymbol{H}}=\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{PROG_z}=\{i \mid \varphi_i = z\}$

  $(z = c_0^1)$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$
- $\overline{\boldsymbol{H}}=\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{PROG_z}=\{i \mid \varphi_i = z\}$ $(z = c_0^1)$
  - Es gilt $(i,n) \in \overline{H} \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$.

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$
- $\overline{\boldsymbol{H}}=\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{PROG_z}=\{i \mid \varphi_i = z\}$ $(z = c_0^1)$
  - Es gilt $(i,n) \in \overline{H} \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$.
  - Da $\Phi = \{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ entscheidbar ist, gibt es ein j mit

$$\varphi_j(i,n,t) = \chi_\Phi(i,n,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,n,t) \in \Phi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$
- $\overline{\boldsymbol{H}}=\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{PROG_z}=\{i \mid \varphi_i = z\}$ $(z = c_0^1)$
  - Es gilt $(i,n) \in \overline{H} \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$.
  - Da $\Phi = \{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ entscheidbar ist, gibt es ein j mit
    $$\varphi_j(i,n,t) = \chi_\Phi(i,n,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,n,t) \in \Phi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  - Nach dem SMN Theorem gibt es eine total-berechenbare Funktion f mit $\varphi_{f(i,n)}(t) = \varphi_j(i,n,t)$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$
- $\overline{\boldsymbol{H}}=\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{PROG_z}=\{i \mid \varphi_i = z\}$ $(z = c_0^1)$
  - Es gilt $(i,n) \in \overline{H} \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$.
  - Da $\Phi = \{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ entscheidbar ist, gibt es ein j mit
    $$\varphi_j(i,n,t) = \chi_\Phi(i,n,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,n,t) \in \Phi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  - Nach dem SMN Theorem gibt es eine total-berechenbare Funktion f mit $\varphi_{f(i,n)}(t) = \varphi_j(i,n,t)$
  - Es folgt $(i,n) \in \overline{H}$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$
- $\boldsymbol{\overline{H}}=\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{PROG_z}=\{i \mid \varphi_i = z\}$ $(z = c_0^1)$
  - Es gilt $(i,n) \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$.
  - Da $\Phi = \{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ entscheidbar ist, gibt es ein j mit
    $$\varphi_j(i,n,t) = \chi_\Phi(i,n,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,n,t) \in \Phi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  - Nach dem SMN Theorem gibt es eine total-berechenbare Funktion f mit $\varphi_{f(i,n)}(t) = \varphi_j(i,n,t)$
  - Es folgt $(i,n) \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$
- $\boldsymbol{\overline{H}}=\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{PROG_z}=\{i \mid \varphi_i = z\}$ $(z = c_0^1)$
  - Es gilt $(i,n) \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$.
  - Da $\Phi = \{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ entscheidbar ist, gibt es ein j mit
    $$\varphi_j(i,n,t) = \chi_\Phi(i,n,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,n,t) \in \Phi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  - Nach dem SMN Theorem gibt es eine total-berechenbare Funktion f mit $\varphi_{f(i,n)}(t) = \varphi_j(i,n,t)$
  - Es folgt $(i,n) \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\varphi_{f(i,n)}(t) = 0$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$
- $\overline{\boldsymbol{H}}=\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{PROG_z}=\{i \mid \varphi_i = z\}$ $(z = c_0^1)$
  - Es gilt $(i,n) \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$.
  - Da $\Phi = \{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ entscheidbar ist, gibt es ein j mit
    $$\varphi_j(i,n,t) = \chi_\Phi(i,n,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,n,t) \in \Phi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  - Nach dem SMN Theorem gibt es eine total-berechenbare Funktion f mit $\varphi_{f(i,n)}(t) = \varphi_j(i,n,t)$
  - Es folgt $(i,n) \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\varphi_{f(i,n)}(t) = 0$
    $$\Leftrightarrow \varphi_{f(i,n)} = z$$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$
- $\boldsymbol{\overline{H}}=\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{PROG_z}=\{i \mid \varphi_i = z\}$ $(z = c_0^1)$
  - Es gilt $(i,n) \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$.
  - Da $\Phi = \{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ entscheidbar ist, gibt es ein j mit
    $$\varphi_j(i,n,t) = \chi_\Phi(i,n,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,n,t) \in \Phi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  - Nach dem SMN Theorem gibt es eine total-berechenbare Funktion f mit $\varphi_{f(i,n)}(t) = \varphi_j(i,n,t)$
  - Es folgt $(i,n) \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\varphi_{f(i,n)}(t) = 0$
    $\Leftrightarrow \varphi_{f(i,n)} = z \Leftrightarrow f(i,n) \in PROG_z$

Beispiele von Problemreduktion

- $\boldsymbol{S}=\{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{H}=\{(i,n) \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  - Es gilt $i \in S \Leftrightarrow (i,i) \in H$.
  - Wähle $f(i) := (i,i)$.
  - Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$
- $\boldsymbol{\overline{H}}=\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \quad \leq \quad \boldsymbol{PROG_z}=\{i \mid \varphi_i = z\}$ $(z = c_0^1)$
  - Es gilt $(i,n) \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t$.
  - Da $\Phi = \{(i,n,t) \mid \Phi_i(n) = t\}$ entscheidbar ist, gibt es ein j mit
    $$\varphi_j(i,n,t) = \chi_\Phi(i,n,t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,n,t) \in \Phi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
  - Nach dem SMN Theorem gibt es eine total-berechenbare Funktion f mit $\varphi_{f(i,n)}(t) = \varphi_j(i,n,t)$
  - Es folgt $(i,n) \in \overline{H} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\Phi_i(n) \neq t \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{N}.\varphi_{f(i,n)}(t) = 0$
    $\Leftrightarrow \varphi_{f(i,n)} = z \Leftrightarrow f(i,n) \in PROG_z$
    also $\overline{H} = f^{-1}(PROG_z)$

Problemreduktion mit Abschlusseigenschaften

- **Reduktion ist Spezialfall der Abschlußeigenschaften**
  - P, P' entscheidbar, dann auch $P \cup P'$, $P \cap P'$, $P \setminus P'$, $\overline{P}$, $f^{-1}(P)$
  - P, P' aufzählbar, dann auch $P \cup P'$, $P \cap P'$, $g(P)$, $g^{-1}(P)$
  - P entscheidbar $\Leftrightarrow$ P und $\overline{P}$ aufzählbar

Problemreduktion mit Abschlusseigenschaften

- **Reduktion ist Spezialfall der Abschlußeigenschaften**
  - P, P' entscheidbar, dann auch $P \cup P'$, $P \cap P'$, $P \setminus P'$, $\overline{P}$, $f^{-1}(P)$
  - P, P' aufzählbar, dann auch $P \cup P'$, $P \cap P'$, $g(P)$, $g^{-1}(P)$
  - P entscheidbar $\Leftrightarrow$ P und $\overline{P}$ aufzählbar
- **Abschlußeigenschaften lassen sich umkehren**
  - P nicht entscheidbar $\Rightarrow$ $\overline{P}$ nicht entscheidbar
  - P aufzählbar, nicht entscheidbar $\Rightarrow$ $\overline{P}$ weder aufzählbar noch entscheidbar
  - P entscheidbar, $P \cup P'$ nicht entscheidbar $\Rightarrow$ P' nicht entscheidbar
  - P entscheidbar, $P \setminus P'$ nicht entscheidbar $\Rightarrow$ P' nicht entscheidbar

$\vdots$ $\vdots$

Problemreduktion mit Abschlusseigenschaften

- **Reduktion ist Spezialfall der Abschlußeigenschaften**
  - P, P' entscheidbar, dann auch $P \cup P'$, $P \cap P'$, $P \setminus P'$, $\overline{P}$, $f^{-1}(P)$
  - P, P' aufzählbar, dann auch $P \cup P'$, $P \cap P'$, $g(P)$, $g^{-1}(P)$
  - P entscheidbar $\Leftrightarrow$ P und $\overline{P}$ aufzählbar
- **Abschlußeigenschaften lassen sich umkehren**
  - P nicht entscheidbar $\Rightarrow$ $\overline{P}$ nicht entscheidbar
  - P aufzählbar, nicht entscheidbar $\Rightarrow$ $\overline{P}$ weder aufzählbar noch entscheidbar
  - P entscheidbar, $P \cup P'$ nicht entscheidbar $\Rightarrow$ P' nicht entscheidbar
  - P entscheidbar, $P \setminus P'$ nicht entscheidbar $\Rightarrow$ P' nicht entscheidbar

  $\vdots$ $\qquad\qquad$ $\vdots$
- **Gleiche Beweismethodik**
  - Zeige, wie Problem mit bekannten Problemen zusammenhängt

Resultate aus Abschlusseigenschaften

- $\{(i, n) \mid n \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ **ist nicht aufzählbar**

Resultate aus Abschlusseigenschaften

- **$\{(i,n) \mid n \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - $\{(i,n) \mid n \notin \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ ist das Komplement des Halteproblems H
  - H ist aufzählbar aber unentscheidbar

Resultate aus Abschlusseigenschaften

- **$\{(i,n) \mid n \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - $\{(i,n) \mid n \notin \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ ist das Komplement des Halteproblems H
  - H ist aufzählbar aber unentscheidbar
  - Also kann $\overline{H}$ nicht aufzählbar sein

Resultate aus Abschlusseigenschaften

- **$\{(i,n) \mid n \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - $\{(i,n) \mid n \notin \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ ist das Komplement des Halteproblems H
  - H ist aufzählbar aber unentscheidbar
  - Also kann $\overline{H}$ nicht aufzählbar sein
- **$PROG_z = \{i \mid \varphi_i = z\}$ ist nicht aufzählbar**

Resultate aus Abschlusseigenschaften

- **$\{(i,n) \mid n \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - $\{(i,n) \mid n \notin \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ ist das Komplement des Halteproblems H
  - H ist aufzählbar aber unentscheidbar
  - Also kann $\overline{H}$ nicht aufzählbar sein
- **$PROG_z = \{i \mid \varphi_i = z\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Es gilt $\overline{H} \leq PROG_z$ und $\overline{H}$ ist nicht aufzählbar
  - Damit kann $PROG_z$ nicht aufzählbar sein

Resultate aus Abschlusseigenschaften

- **$\{(i,n) \mid n \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - $\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist das Komplement des Halteproblems H
  - H ist aufzählbar aber unentscheidbar
  - Also kann $\overline{H}$ nicht aufzählbar sein
- **$PROG_z = \{i \mid \varphi_i = z\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Es gilt $\overline{H} \leq PROG_z$ und $\overline{H}$ ist nicht aufzählbar
  - Damit kann $PROG_z$ nicht aufzählbar sein

  Die Menge der Turingmaschinen M mit $L(M)=\emptyset$ ist nicht aufzählbar
  - Beweis ist minimale Modifikation von $\overline{H} \leq PROG_z$

Resultate aus Abschlusseigenschaften

- **$\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - $\{(i,n) \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist das Komplement des Halteproblems H
  - H ist aufzählbar aber unentscheidbar
  - Also kann $\overline{H}$ nicht aufzählbar sein
- **$PROG_z = \{i \mid \varphi_i = z\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Es gilt $\overline{H} \leq PROG_z$ und $\overline{H}$ ist nicht aufzählbar
  - Damit kann $PROG_z$ nicht aufzählbar sein

  Die Menge der Turingmaschinen M mit $L(M)=\emptyset$ ist nicht aufzählbar
  - Beweis ist minimale Modifikation von $\overline{H} \leq PROG_z$
- **$PF = \{i \mid \varphi_i$ partiell$\}$ ist unentscheidbar**

Resultate aus Abschlusseigenschaften

- **$\{(i,n) \mid n \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - $\{(i,n) \mid n \notin \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ ist das Komplement des Halteproblems H
  - H ist aufzählbar aber unentscheidbar
  - Also kann $\overline{H}$ nicht aufzählbar sein
- **$PROG_z = \{i \mid \varphi_i = z\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Es gilt $\overline{H} \leq PROG_z$ und $\overline{H}$ ist nicht aufzählbar
  - Damit kann $PROG_z$ nicht aufzählbar sein

  Die Menge der Turingmaschinen M mit $L(M)=\emptyset$ ist nicht aufzählbar
  - Beweis ist minimale Modifikation von $\overline{H} \leq PROG_z$
- **$PF = \{i \mid \varphi_i$ partiell$\}$ ist unentscheidbar**
  - PF ist das Komplement von $TR = \{i \mid \varphi_i$ total$\}$
  - TR ist nicht aufzählbar,
  - Also kann $PF = \overline{TR}$ nicht entscheidbar sein

Welche Verifikationsprobleme sind entscheidbar?

- **Halteproblem**
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es bei bestimmten Eingaben hält oder nicht?

Welche Verifikationsprobleme sind entscheidbar?

- **Halteproblem** unentscheidbar
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es bei bestimmten Eingaben hält oder nicht?

Welche Verifikationsprobleme sind entscheidbar?

- **Halteproblem** unentscheidbar
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es bei bestimmten Eingaben hält oder nicht?
- **Korrektheitsproblem**
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine bestimmte Funktion berechnet oder nicht?

Welche Verifikationsprobleme sind entscheidbar?

- **Halteproblem** unentscheidbar
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es bei bestimmten Eingaben hält oder nicht?
- **Korrektheitsproblem** unentscheidbar für Nullfunktion
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine bestimmte Funktion berechnet oder nicht?

Welche Verifikationsprobleme sind entscheidbar?

- **Halteproblem** unentscheidbar
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es bei bestimmten Eingaben hält oder nicht?
- **Korrektheitsproblem** unentscheidbar für Nullfunktion
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine bestimmte Funktion berechnet oder nicht?
- **Spezifikationsproblem**
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine gegebene Spezfikation erfüllt oder nicht?

Welche Verifikationsprobleme sind entscheidbar?

- **Halteproblem** unentscheidbar
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es bei bestimmten Eingaben hält oder nicht?
- **Korrektheitsproblem** unentscheidbar für Nullfunktion
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine bestimmte Funktion berechnet oder nicht?
- **Spezifikationsproblem**
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine gegebene Spezfikation erfüllt oder nicht?
- **Äquivalenzproblem**
  - Kann man entscheiden, ob zwei beliebige Programme die gleiche Funktion berechnen oder nicht?

Welche Verifikationsprobleme sind entscheidbar?

- **Halteproblem** unentscheidbar
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es bei bestimmten Eingaben hält oder nicht?
- **Korrektheitsproblem** unentscheidbar für Nullfunktion
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine bestimmte Funktion berechnet oder nicht?
- **Spezifikationsproblem**
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine gegebene Spezfikation erfüllt oder nicht?
- **Äquivalenzproblem**
  - Kann man entscheiden, ob zwei beliebige Programme die gleiche Funktion berechnen oder nicht?

Gibt es eine allgemeine Antwort?

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S$

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x)$

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P$

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\, f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P \Rightarrow h(i) \in L_P$

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\, f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P \Rightarrow h(i) \in L_P$

$i \notin S$

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P \Rightarrow h(i) \in L_P$

$i \notin S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = \perp$

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P \Rightarrow h(i) \in L_P$

$i \notin S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = \perp \Rightarrow \varphi_{h(i)} = g \notin P$

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit
$$i \in S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P \Rightarrow h(i) \in L_P$$
$$i \notin S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = \perp \Rightarrow \varphi_{h(i)} = g \notin P \Rightarrow h(i) \notin L_P$$

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P \Rightarrow h(i) \in L_P$

$i \notin S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = \perp \Rightarrow \varphi_{h(i)} = g \notin P \Rightarrow h(i) \notin L_P$

– Es folgt: $i \in S \Leftrightarrow h(i) \in L_P$, d.h. $S \leq L_P$.

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x) = \perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P \Rightarrow h(i) \in L_P$

$i \notin S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = \perp \Rightarrow \varphi_{h(i)} = g \notin P \Rightarrow h(i) \notin L_P$

– Es folgt: $i \in S \Leftrightarrow h(i) \in L_P$, d.h. $S \leq L_P$. Also ist L_P unentscheidbar. ✓

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x)=\perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P \Rightarrow h(i) \in L_P$

$i \notin S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = \perp \Rightarrow \varphi_{h(i)} = g \notin P \Rightarrow h(i) \notin L_P$

– Es folgt: $i \in S \Leftrightarrow h(i) \in L_P$, d.h. $S \leq L_P$. Also ist L_P unentscheidbar. ✓

– Falls $g \in P$ wähle ein beliebiges $f \notin P$ und zeige so $S \leq \overline{L_P}$ ✓

Der Satz von Rice

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion ($g(x)=\perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'(i,x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } \varphi_i(i) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Dann ist f' berechenbar und nach dem SMN Theorem gibt es ein total-berechenbares h mit $f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P \Rightarrow h(i) \in L_P$

$i \notin S \Rightarrow \forall x.\ f'(i,x) = \varphi_{h(i)}(x) = \perp \Rightarrow \varphi_{h(i)} = g \notin P \Rightarrow h(i) \notin L_P$

– Es folgt: $i \in S \Leftrightarrow h(i) \in L_P$, d.h. $S \leq L_P$. Also ist L_P unentscheidbar. ✓

– Falls $g \in P$ wähle ein beliebiges $f \notin P$ und zeige so $S \leq \overline{L_P}$ ✓

Keine nichttriviale (extensionale) Eigenschaft berechenbarer Funktionen ist entscheidbar

Anwendungen des Satzes von Rice

- $\boldsymbol{MON} = \{i \mid \forall k.\ \varphi_i(k) < \varphi_i(k+1)\}$
  - Monotone Funktionen sind unentscheidbar

Anwendungen des Satzes von Rice

- $\boldsymbol{MON} = \{i \mid \forall k.\ \varphi_i(k) < \varphi_i(k+1)\}$
  - Monotone Funktionen sind unentscheidbar
- $\boldsymbol{EF} = \{i \mid \forall j.\ \varphi_i(j) \in \{0,1\}\}$
  - Entscheidungsfunktion zu sein ist unentscheidbar

Anwendungen des Satzes von Rice

- $\boldsymbol{MON} = \{i \mid \forall k.\ \varphi_i(k) < \varphi_i(k+1)\}$
  - Monotone Funktionen sind unentscheidbar
- $\boldsymbol{EF} = \{i \mid \forall j.\ \varphi_i(j) \in \{0,1\}\}$
  - Entscheidungsfunktion zu sein ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_{spec}} = \{i \mid \varphi_i \textbf{ erfüllt Spezifikation } \boldsymbol{spec}\}$
  - Allgemeines Spezifikationsproblem ist unentscheidbar

Anwendungen des Satzes von Rice

- $\boldsymbol{MON} = \{i \mid \forall k.\ \varphi_i(k) < \varphi_i(k+1)\}$
  - Monotone Funktionen sind unentscheidbar
- $\boldsymbol{EF} = \{i \mid \forall j.\ \varphi_i(j) \in \{0,1\}\}$
  - Entscheidungsfunktion zu sein ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_{spec}} = \{i \mid \varphi_i$ **erfüllt Spezifikation** $\boldsymbol{spec}\}$
  - Allgemeines Spezifikationsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_f} = \{i \mid \varphi_i = f\}$
  - Korrektheitsproblem ist unentscheidbar

Anwendungen des Satzes von Rice

- $\boldsymbol{MON} = \{i \mid \forall k.\ \varphi_i(k) < \varphi_i(k+1)\}$
  - Monotone Funktionen sind unentscheidbar
- $\boldsymbol{EF} = \{i \mid \forall j.\ \varphi_i(j) \in \{0,1\}\}$
  - Entscheidungsfunktion zu sein ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_{spec}} = \{i \mid \varphi_i$ **erfüllt Spezifikation** $\boldsymbol{spec}\}$
  - Allgemeines Spezifikationsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_f} = \{i \mid \varphi_i = f\}$
  - Korrektheitsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{EQ} = \{(i,j) \mid \varphi_i = \varphi_j\}$
  - Äquivalenzproblem ist unentscheidbar

Anwendungen des Satzes von Rice

- $\boldsymbol{MON} = \{i \mid \forall k.\ \varphi_i(k) < \varphi_i(k+1)\}$
  - Monotone Funktionen sind unentscheidbar
- $\boldsymbol{EF} = \{i \mid \forall j.\ \varphi_i(j) \in \{0,1\}\}$
  - Entscheidungsfunktion zu sein ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_{spec}} = \{i \mid \varphi_i \textbf{ erfüllt Spezifikation } \boldsymbol{spec}\}$
  - Allgemeines Spezifikationsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_f} = \{i \mid \varphi_i = f\}$
  - Korrektheitsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{EQ} = \{(i,j) \mid \varphi_i = \varphi_j\}$
  - Äquivalenzproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{RG} = \{(i,j) \mid j \in \textbf{range}(\varphi_i)\}$
  - Bildbereiche sind unentscheidbar

Anwendungen des Satzes von Rice

- $\boldsymbol{MON} = \{i \mid \forall k.\ \varphi_i(k) < \varphi_i(k+1)\}$
  - Monotone Funktionen sind unentscheidbar
- $\boldsymbol{EF} = \{i \mid \forall j.\ \varphi_i(j) \in \{0,1\}\}$
  - Entscheidungsfunktion zu sein ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_{spec}} = \{i \mid \varphi_i \textbf{ erfüllt Spezifikation } \boldsymbol{spec}\}$
  - Allgemeines Spezifikationsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_f} = \{i \mid \varphi_i = f\}$
  - Korrektheitsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{EQ} = \{(i,j) \mid \varphi_i = \varphi_j\}$
  - Äquivalenzproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{RG} = \{(i,j) \mid j \in \textbf{range}(\varphi_i)\}$
  - Bildbereiche sind unentscheidbar

Keine Programmeigenschaft kann getestet werden

Beweise müssen von Hand geführt werden

Rechnerunterstützung nur in Spezialfällen möglich

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Menge von Wortpaaren $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ in Σ^+

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Menge von Wortpaaren $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ in Σ^+
  - Eine **Korrespondenz** ist eine Indexfolge $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Menge von Wortpaaren $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ in Σ^+
  - Eine **Korrespondenz** ist eine Indexfolge $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
  - $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ heißt **lösbar**, wenn es eine Korrespondenz gibt

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Menge von Wortpaaren $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ in Σ^+
  - Eine **Korrespondenz** ist eine Indexfolge $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
  - $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ heißt **lösbar**, wenn es eine Korrespondenz gibt
- **Beispiele**
  - $K_1 = \{(1, 101),\ (10, 00),\ (011, 11)\}$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Menge von Wortpaaren $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ in Σ^+
  - Eine **Korrespondenz** ist eine Indexfolge $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
  - $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ heißt **lösbar**, wenn es eine Korrespondenz gibt
- **Beispiele**
  - $K_1 = \{(1, 101),\ (10, 00),\ (011, 11)\}$

    Lösbar mit Korrespondenz 1323, denn $u_1u_3u_2u_3 = v_1v_3v_2v_3 = 101110011$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Menge von Wortpaaren $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ in Σ^+
  - Eine **Korrespondenz** ist eine Indexfolge $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
  - $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ heißt **lösbar**, wenn es eine Korrespondenz gibt
- **Beispiele**
  - $K_1 = \{(1, 101),\ (10, 00),\ (011, 11)\}$
    Lösbar mit Korrespondenz 1323, denn $u_1u_3u_2u_3 = v_1v_3v_2v_3 = 101110011$
  - $K_2 = \{(1, 10),\ (101, 01)\}$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Menge von Wortpaaren $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ in Σ^+
  - Eine **Korrespondenz** ist eine Indexfolge $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
  - $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ heißt **lösbar**, wenn es eine Korrespondenz gibt
- **Beispiele**
  - $K_1 = \{(1, 101),\ (10, 00),\ (011, 11)\}$
    Lösbar mit Korrespondenz 1323, denn $u_1u_3u_2u_3 = v_1v_3v_2v_3 = 101110011$
  - $K_2 = \{(1, 10),\ (101, 01)\}$
    Unlösbar: alle u_i haben mehr Einsen als Nullen, die v_i sind ausgewogen

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Menge von Wortpaaren $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ in Σ^+
  - Eine **Korrespondenz** ist eine Indexfolge $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
  - $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ heißt **lösbar**, wenn es eine Korrespondenz gibt
- **Beispiele**
  - $K_1 = \{(1, 101),\ (10, 00),\ (011, 11)\}$
    Lösbar mit Korrespondenz 1323, denn $u_1u_3u_2u_3 = v_1v_3v_2v_3 = 101110011$
  - $K_2 = \{(1, 10),\ (101, 01)\}$
    Unlösbar: alle u_i haben mehr Einsen als Nullen, die v_i sind ausgewogen
  - $K_3 = \{(001, 0),\ (01, 011),\ (01, 101),\ (10, 001)\}$

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Menge von Wortpaaren $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ in Σ^+
  - Eine **Korrespondenz** ist eine Indexfolge $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
  - $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ heißt **lösbar**, wenn es eine Korrespondenz gibt
- **Beispiele**
  - $K_1 = \{(1, 101),\ (10, 00),\ (011, 11)\}$

    Lösbar mit Korrespondenz 1323, denn $u_1u_3u_2u_3 = v_1v_3v_2v_3 = 101110011$
  - $K_2 = \{(1, 10),\ (101, 01)\}$

    Unlösbar: alle u_i haben mehr Einsen als Nullen, die v_i sind ausgewogen
  - $K_3 = \{(001, 0),\ (01, 011),\ (01, 101),\ (10, 001)\}$

    Lösbar mit 243442124343443442144213411344421211134341214421411341131131214113

Das Post'sche Korrespondenzproblem

Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Menge von Wortpaaren $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ in Σ^+
  - Eine **Korrespondenz** ist eine Indexfolge $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
  - $\{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ heißt **lösbar**, wenn es eine Korrespondenz gibt
- **Beispiele**
  - $K_1 = \{(1, 101),\ (10, 00),\ (011, 11)\}$
    Lösbar mit Korrespondenz 1323, denn $u_1u_3u_2u_3 = v_1v_3v_2v_3 = 101110011$
  - $K_2 = \{(1, 10),\ (101, 01)\}$
    Unlösbar: alle u_i haben mehr Einsen als Nullen, die v_i sind ausgewogen
  - $K_3 = \{(001, 0),\ (01, 011),\ (01, 101),\ (10, 001)\}$
    Lösbar mit 243442124343443442144213411344421211134341214421411341131131214113
- **Post'sches Korrespondenzproblem, präzisiert**
  - $\boldsymbol{PKP} = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \Sigma^+ \wedge \exists i_1, .., i_n.\ u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}\}$

Post'sches Korrespondenzproblem: Aufzählbarkeit

- **Aufzählungsalgorithmus:**

Post'sches Korrespondenzproblem: Aufzählbarkeit

- **Aufzählungsalgorithmus:**
  - **Eingabe**: Wort $w = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\} \in (X \cup \{\texttt{"(", ")", ","}\})^*$

Post'sches Korrespondenzproblem: Aufzählbarkeit

- **Aufzählungsalgorithmus:**
  - **Eingabe**: Wort $w = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\} \in (X \cup \{\texttt{"("}, \texttt{")"}, \texttt{","}\})^*$
  - Durch Klammerzählung bestimme alle u_i und v_i und die Anzahl k

Post'sches Korrespondenzproblem: Aufzählbarkeit

- **Aufzählungsalgorithmus:**
  - **Eingabe**: Wort $w = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\} \in (X \cup \{\texttt{"("}, \texttt{")"}, \texttt{","}\})^*$
  - Durch Klammerzählung bestimme alle u_i und v_i und die Anzahl k
  - Zähle alle möglichen Indexfolgen $i_1, .., i_n$ mit $i_j \leq k$ auf
    (Verwende Umkehrung der Standardtupelfunktion für Listen $\langle i_1, .., i_n \rangle^*$)

Post'sches Korrespondenzproblem: Aufzählbarkeit

- **Aufzählungsalgorithmus:**
  - **Eingabe**: Wort $w = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\} \in (X \cup \{"(", ")", ","\})^*$
  - Durch Klammerzählung bestimme alle u_i und v_i und die Anzahl k
  - Zähle alle möglichen Indexfolgen $i_1, .., i_n$ mit $i_j \leq k$ auf
    (Verwende Umkehrung der Standardtupelfunktion für Listen $\langle i_1, .., i_n \rangle^*$)
    - Falls $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$, so akzeptiere w (Ausgabe 1)
    - Ansonsten generiere die nächste Indexfolge

Post'sches Korrespondenzproblem: Aufzählbarkeit

- **Aufzählungsalgorithmus:**
  - **Eingabe**: Wort $w = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\} \in (X \cup \{"(", ")", ","\})^*$
  - Durch Klammerzählung bestimme alle u_i und v_i und die Anzahl k
  - Zähle alle möglichen Indexfolgen $i_1, .., i_n$ mit $i_j \leq k$ auf
    (Verwende Umkehrung der Standardtupelfunktion für Listen $\langle i_1, .., i_n \rangle^*$)
    - Falls $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$, so akzeptiere w (Ausgabe 1)
    - Ansonsten generiere die nächste Indexfolge
- **Algorithmus berechnet ψ_{PKP}**

Post'sches Korrespondenzproblem: Aufzählbarkeit

- **Aufzählungsalgorithmus:**
  - **Eingabe**: Wort $w = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\} \in (X \cup \{"(", ")", ","\})^*$
  - Durch Klammerzählung bestimme alle u_i und v_i und die Anzahl k
  - Zähle alle möglichen Indexfolgen $i_1, .., i_n$ mit $i_j \leq k$ auf
    (Verwende Umkehrung der Standardtupelfunktion für Listen $\langle i_1, .., i_n \rangle^*$)
    - Falls $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$, so akzeptiere w (Ausgabe 1)
    - Ansonsten generiere die nächste Indexfolge

- **Algorithmus berechnet ψ_{PKP}**
  - $w \in PKP \Rightarrow$ Es gibt $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
    $\Rightarrow$ Aufzählung endet bei $\langle i_1, .., i_n \rangle^*$ mit Ausgabe 1

Post'sches Korrespondenzproblem: Aufzählbarkeit

- **Aufzählungsalgorithmus:**
  - **Eingabe**: Wort $w = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\} \in (X \cup \{"(", ")", ","\})^*$
  - Durch Klammerzählung bestimme alle u_i und v_i und die Anzahl k
  - Zähle alle möglichen Indexfolgen $i_1, .., i_n$ mit $i_j \leq k$ auf
    (Verwende Umkehrung der Standardtupelfunktion für Listen $\langle i_1, .., i_n \rangle^*$)
    - Falls $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$, so akzeptiere w (Ausgabe 1)
    - Ansonsten generiere die nächste Indexfolge

- **Algorithmus berechnet ψ_{PKP}**
  - $w \in PKP \Rightarrow$ Es gibt $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
    $\Rightarrow$ Aufzählung endet bei $\langle i_1, .., i_n \rangle^*$ mit Ausgabe 1
  - $w \notin PKP \Rightarrow$ Es gibt keine Korrespondenz
    $\Rightarrow$ Aufzählung terminiert nicht, da Test niemals erfolgreich

Beweis durch doppelte Reduktion

- **Verwende eingeschränkte Version des Problems**
  - $\boldsymbol{MPKP} = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \Sigma^+ \wedge \exists i_2, .., i_n.\ u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}\}$

Beweis durch doppelte Reduktion

- **Verwende eingeschränkte Version des Problems**
  - $\boldsymbol{MPKP} = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \Sigma^+ \wedge \exists i_2, .., i_n.\ u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}\}$
- **Zeige:** $\boldsymbol{MPKP \leq PKP}$

Unentscheidbarkeit von PKP

Beweis durch doppelte Reduktion

- **Verwende eingeschränkte Version des Problems**
  - $\boldsymbol{MPKP} = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \Sigma^+ \wedge \exists i_2, .., i_n.\ u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}\}$
- **Zeige:** $\boldsymbol{MPKP \leq PKP}$
- **Zeige:** $\boldsymbol{H \leq MPKP}$ (also $MPKP$ unentscheidbar)
  - Zeige, daß jede Turingmaschine M als MPKP beschrieben werden kann

Unentscheidbarkeit von PKP

Beweis durch doppelte Reduktion

- **Verwende eingeschränkte Version des Problems**
  - $\boldsymbol{MPKP} = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \Sigma^+ \wedge \exists i_2, .., i_n.\ u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}\}$
- **Zeige:** $\boldsymbol{MPKP \leq PKP}$
- **Zeige:** $\boldsymbol{H \leq MPKP}$ (also $MPKP$ unentscheidbar)
  - Zeige, daß jede Turingmaschine M als MPKP beschrieben werden kann
    - (u_1, v_1) beschreibt die Erzeugung der Anfangskonfiguration in v_1
    - Weitere Wortpaare entsprechen Konfigurationsübergängen

      (vgl Simulation von Turingmaschinen durch Typ-0 Grammatiken)

Unentscheidbarkeit von PKP

Beweis durch doppelte Reduktion

- **Verwende eingeschränkte Version des Problems**
  - $\boldsymbol{MPKP} = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \Sigma^+ \wedge \exists i_2, .., i_n.\ u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}\}$
- **Zeige: $\boldsymbol{MPKP \leq PKP}$**
- **Zeige: $\boldsymbol{H \leq MPKP}$** (also $MPKP$ unentscheidbar)
  - Zeige, daß jede Turingmaschine M als MPKP beschrieben werden kann
    - (u_1, v_1) beschreibt die Erzeugung der Anfangskonfiguration in v_1
    - Weitere Wortpaare entsprechen Konfigurationsübergängen
      (vgl Simulation von Turingmaschinen durch Typ-0 Grammatiken)
  - M hält, wenn das MPKP eine terminierende Berechnung beschreiben kann

Unentscheidbarkeit von PKP

Beweis durch doppelte Reduktion

- **Verwende eingeschränkte Version des Problems**
  - $\boldsymbol{MPKP} = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \Sigma^+ \wedge \exists i_2, .., i_n.\ u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}\}$
- **Zeige: $\boldsymbol{MPKP \leq PKP}$**
- **Zeige: $\boldsymbol{H \leq MPKP}$** (also $MPKP$ unentscheidbar)
  - Zeige, daß jede Turingmaschine M als MPKP beschrieben werden kann
    - (u_1, v_1) beschreibt die Erzeugung der Anfangskonfiguration in v_1
    - Weitere Wortpaare entsprechen Konfigurationsübergängen
      (vgl Simulation von Turingmaschinen durch Typ-0 Grammatiken)
  - M hält, wenn das MPKP eine terminierende Berechnung beschreiben kann
  - Korrespondenz bedeutet, daß jedes Ergebnis eines Konfigurationsübergangs Anfangspunkt des nächsten Übergangs ist

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu Σ' $= \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

$$f\{(u_1, v_1), ..(u_k, v_k)\} = \{\underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1, v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2, v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1}, v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2}, v'_{k+2})} \}$$

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

    $f\{(u_1, v_1), ..(u_k, v_k)\} = \{\underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1, v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2, v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1}, v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2}, v'_{k+2})} \}$

- **Zeige $K \in MPKP \Leftrightarrow f(K) \in PKP$**

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

    $$f\{(u_1, v_1), ..(u_k, v_k)\} = \{\underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1, v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2, v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1}, v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2}, v'_{k+2})} \}$$

- **Zeige $K \in MPKP \Leftrightarrow f(K) \in PKP$**
  - $K \in MPKP$

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

    $$f\{(u_1, v_1), ..(u_k, v_k)\} = \{\underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1, v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2, v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1}, v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2}, v'_{k+2})} \}$$

- **Zeige $K \in MPKP \Leftrightarrow f(K) \in PKP$**
  - $K \in MPKP \Rightarrow$ Es gibt $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu Σ' $= \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

    $f\{(u_1, v_1), ..(u_k, v_k)\} = \{\underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1, v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2, v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1}, v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2}, v'_{k+2})} \}$

- **Zeige $K \in MPKP \Leftrightarrow f(K) \in PKP$**
  - $K \in MPKP \Rightarrow$ Es gibt $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$

    $\Rightarrow \underbrace{\#\hat{u}_1\#}_{u'_1} \underbrace{\hat{u}_{i_2}\#}_{u'_{i_2+1}} .. \# \underbrace{\hat{u}_{i_n}\#}_{u'_{i_n+1}} \underbrace{\$}_{u'_{k+2}} = \underbrace{\#\hat{v}_1}_{v'_1} \underbrace{\#\hat{v}_{i_2}}_{v'_{i_2+1}} \#.. \underbrace{\#\hat{v}_{i_n}}_{v'_{i_n+1}} \underbrace{\#\$}_{v'_{k+2}}$

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

    $f\{(u_1, v_1), ..(u_k, v_k)\} = \{\underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1, v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2, v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1}, v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2}, v'_{k+2})} \}$

- **Zeige $K \in MPKP \Leftrightarrow f(K) \in PKP$**
  - $K \in MPKP \Rightarrow$ Es gibt $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$

    $\Rightarrow \underbrace{\#\hat{u}_1\#}_{u'_1} \underbrace{\hat{u}_{i_2}\#}_{u'_{i_2+1}} .. \# \underbrace{\hat{u}_{i_n}\#}_{u'_{i_n+1}} \underbrace{\$}_{u'_{k+2}} = \underbrace{\#\hat{v}_1}_{v'_1} \underbrace{\#\hat{v}_{i_2}}_{v'_{i_2+1}} \# .. \underbrace{\#\hat{v}_{i_n}}_{v'_{i_n+1}} \underbrace{\#\$}_{v'_{k+2}}$

    $\Rightarrow 1, i_2{+}1, .., i_n{+}1, k{+}2$ löst $f(K)$ also $f(K) \in PKP$

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

    $$f\{(u_1, v_1), ..(u_k, v_k)\} = \{\underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1, v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2, v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1}, v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2}, v'_{k+2})} \}$$

- **Zeige $K \in MPKP \Leftrightarrow f(K) \in PKP$**
  - $K \in MPKP \Rightarrow$ Es gibt $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$

    $$\Rightarrow \underbrace{\#\hat{u}_1\#}_{u'_1} \underbrace{\hat{u}_{i_2}\#}_{u'_{i_2+1}} .. \# \underbrace{\hat{u}_{i_n}\#}_{u'_{i_n+1}} \underbrace{\$}_{u'_{k+2}} = \underbrace{\#\hat{v}_1}_{v'_1} \underbrace{\#\hat{v}_{i_2}}_{v'_{i_2+1}} \#.. \underbrace{\#\hat{v}_{i_n}}_{v'_{i_n+1}} \underbrace{\#\$}_{v'_{k+2}}$$

    $\Rightarrow 1, i_2{+}1, .., i_n{+}1, k{+}2$ löst $f(K)$ also $f(K) \in PKP$
  - $f(K) \in PKP$

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu Σ' $= \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

    $f\{(u_1, v_1), ..(u_k, v_k)\} = \{\underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1, v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2, v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1}, v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2}, v'_{k+2})} \}$

- **Zeige $K \in MPKP \Leftrightarrow f(K) \in PKP$**
  - $K \in MPKP \Rightarrow$ Es gibt $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$

    $\Rightarrow \underbrace{\#\hat{u}_1\#}_{u'_1} \underbrace{\hat{u}_{i_2}\#}_{u'_{i_2+1}} .. \# \underbrace{\hat{u}_{i_n}\#}_{u'_{i_n+1}} \underbrace{\$}_{u'_{k+2}} = \underbrace{\#\hat{v}_1}_{v'_1} \underbrace{\#\hat{v}_{i_2}}_{v'_{i_2+1}} \# .. \underbrace{\#\hat{v}_{i_n}}_{v'_{i_n+1}} \underbrace{\#\$}_{v'_{k+2}}$

    $\Rightarrow 1, i_2{+}1, .., i_n{+}1, k{+}2$ löst $f(K)$ also $f(K) \in PKP$
  - $f(K) \in PKP \Rightarrow$ Es gibt $i_1, .., i_n$ mit $u'_{i_1} .. u'_{i_n} = v'_{i_1} .. v'_{i_n}$

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

    $f\{(u_1, v_1), ..(u_k, v_k)\} = \{\underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1, v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2, v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1}, v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2}, v'_{k+2})} \}$

- **Zeige $K \in MPKP \Leftrightarrow f(K) \in PKP$**
  - $K \in MPKP \Rightarrow$ Es gibt $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$

    $\Rightarrow \underbrace{\#\hat{u}_1\#}_{u'_1} \underbrace{\hat{u}_{i_2}\#}_{u'_{i_2+1}} .. \# \underbrace{\hat{u}_{i_n}\#}_{u'_{i_n+1}} \underbrace{\$}_{u'_{k+2}} = \underbrace{\#\hat{v}_1}_{v'_1} \underbrace{\#\hat{v}_{i_2}}_{v'_{i_2+1}} \#.. \underbrace{\#\hat{v}_{i_n}}_{v'_{i_n+1}} \underbrace{\#\$}_{v'_{k+2}}$

    $\Rightarrow 1, i_2{+}1, .., i_n{+}1, k{+}2$ löst $f(K)$ also $f(K) \in PKP$
  - $f(K) \in PKP \Rightarrow$ Es gibt $i_1, .., i_n$ mit $u'_{i_1} .. u'_{i_n} = v'_{i_1} .. v'_{i_n}$

    $\Rightarrow i_1{=}1$, da nur u'_1, v'_1 dasselbe Anfangssymbol haben

    $i_n{=}k{+}2$, da nur u'_{k+2}, v'_{k+2} dasselbe Endsymbol haben

Beweise $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu $\Sigma' = \Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1 ... a_n$ zu $\hat{w} = a_1 \# a_2 \# ... \# a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

    $f\{(u_1, v_1), ..(u_k, v_k)\} = \{\underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1, v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2, v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1}, v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2}, v'_{k+2})} \}$

- **Zeige $K \in MPKP \Leftrightarrow f(K) \in PKP$**
  - $K \in MPKP \Rightarrow$ Es gibt $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$

    $\Rightarrow \underbrace{\#\hat{u}_1\#}_{u'_1} \underbrace{\hat{u}_{i_2}\#}_{u'_{i_2+1}} .. \# \underbrace{\hat{u}_{i_n}\#}_{u'_{i_n+1}} \underbrace{\$}_{u'_{k+2}} = \underbrace{\#\hat{v}_1}_{v'_1} \underbrace{\#\hat{v}_{i_2}}_{v'_{i_2+1}} \#.. \underbrace{\#\hat{v}_{i_n}}_{v'_{i_n+1}} \underbrace{\#\$}_{v'_{k+2}}$

    $\Rightarrow 1, i_2{+}1, .., i_n{+}1, k{+}2$ löst $f(K)$ also $f(K) \in PKP$
  - $f(K) \in PKP \Rightarrow$ Es gibt $i_1, .., i_n$ mit $u'_{i_1} .. u'_{i_n} = v'_{i_1} .. v'_{i_n}$

    $\Rightarrow i_1{=}1$, da nur u'_1, v'_1 dasselbe Anfangssymbol haben

    $i_n{=}k{+}2$, da nur u'_{k+2}, v'_{k+2} dasselbe Endsymbol haben

    $\Rightarrow 1, i_2{-}1, .., i_{n-1}{-}1$ löst K also $K \in MPKP$ ✓

$H \leq MPKP$: Transformation

Transformiere M,w in eine Korrespondenz K

(Eingaben (i, n) des Halteproblems werden zunächst in M_i, w_n transformiert)

$H \leq MPKP$: Transformation

Transformiere M,w in eine Korrespondenz K

(Eingaben (i, n) des Halteproblems werden zunächst in M_i, w_n transformiert)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, $w \in \Sigma^*$. Bestimme $K := f(M, w)$ wie folgt

$H \leq MPKP$: Transformation

Transformiere M,w in eine Korrespondenz K

(Eingaben (i, n) des Halteproblems werden zunächst in M_i, w_n transformiert)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, $w \in \Sigma^*$. Bestimme $K := f(M, w)$ wie folgt

– Wähle Alphabet $\Delta := \Gamma \cup S \cup \{\#\}$ für das MPKP

$H \leq MPKP$: Transformation

Transformiere M,w in eine Korrespondenz K

(Eingaben (i, n) des Halteproblems werden zunächst in M_i, w_n transformiert)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, $w \in \Sigma^*$. Bestimme $K := f(M, w)$ wie folgt

– Wähle Alphabet $\Delta := \Gamma \cup S \cup \{\#\}$ für das MPKP

– Erzeuge Anfangskonfiguration in $(u_1, v_1) := (\#, \#q_0w\#)$

$H \leq MPKP$: Transformation

Transformiere M,w in eine Korrespondenz K

(Eingaben (i, n) des Halteproblems werden zunächst in M_i, w_n transformiert)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, $w \in \Sigma^*$. Bestimme $K := f(M, w)$ wie folgt

– Wähle Alphabet $\Delta := \Gamma \cup S \cup \{\#\}$ für das MPKP

– Erzeuge Anfangskonfiguration in $(u_1, v_1) := (\#, \#q_0w\#)$

– Beschreibe Konfigurationsübergänge durch Wortpaare

- $(q\,X, Y\,p)$ für $\delta(q, X) = (p, Y, R)$
- $(q\,\#, Y\,p\#)$ für $\delta(q, B) = (p, Y, R)$
- $(Z\,q\,X, p\,Z\,Y)$ für $Z \in \Gamma$ und $\delta(q, X) = (p, Y, L)$
- $(Z\,q\,\#, p\,Z\,Y\,\#)$ für $Z \in \Gamma$ und $\delta(q, B) = (p, Y, L)$

$H \leq MPKP$: Transformation

Transformiere M,w in eine Korrespondenz K

(Eingaben (i, n) des Halteproblems werden zunächst in M_i, w_n transformiert)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, $w \in \Sigma^*$. Bestimme $K := f(M, w)$ wie folgt

– Wähle Alphabet $\Delta := \Gamma \cup S \cup \{\#\}$ für das MPKP

– Erzeuge Anfangskonfiguration in $(u_1, v_1) := (\#, \#q_0w\#)$

– Beschreibe Konfigurationsübergänge durch Wortpaare

- $(q\,X, Y\,p)$ für $\delta(q, X) = (p, Y, R)$
- $(q\,\#, Y\,p\#)$ für $\delta(q, B) = (p, Y, R)$
- $(Z\,q\,X, p\,Z\,Y)$ für $Z \in \Gamma$ und $\delta(q, X) = (p, Y, L)$
- $(Z\,q\,\#, p\,Z\,Y\,\#)$ für $Z \in \Gamma$ und $\delta(q, B) = (p, Y, L)$

– Ergänze "Kopierregeln" (X, X) für alle $X \in \Gamma \cup \{\#\}$

$H \leq MPKP$: Transformation

Transformiere M,w in eine Korrespondenz K

(Eingaben (i, n) des Halteproblems werden zunächst in M_i, w_n transformiert)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, $w \in \Sigma^*$. Bestimme $K := f(M, w)$ wie folgt

– Wähle Alphabet $\Delta := \Gamma \cup S \cup \{\#\}$ für das MPKP

– Erzeuge Anfangskonfiguration in $(u_1, v_1) := (\#, \#q_0w\#)$

– Beschreibe Konfigurationsübergänge durch Wortpaare

- $(q\,X, Y\,p)$ für $\delta(q, X) = (p, Y, R)$
- $(q\,\#, Y\,p\#)$ für $\delta(q, B) = (p, Y, R)$
- $(Z\,q\,X, p\,Z\,Y)$ für $Z \in \Gamma$ und $\delta(q, X) = (p, Y, L)$
- $(Z\,q\,\#, p\,Z\,Y\,\#)$ für $Z \in \Gamma$ und $\delta(q, B) = (p, Y, L)$

– Ergänze "Kopierregeln" (X, X) für alle $X \in \Gamma \cup \{\#\}$

– Ergänze "Löschregeln" $(X\,q_f, q_f)$, $(q_f\,Y, q_f)$ und $(X\,q_f\,Y, q_f)$

für alle $X, Y \in \Gamma$, $q_f \in F$

$H \leq MPKP$: Transformation

Transformiere M,w in eine Korrespondenz K

(Eingaben (i, n) des Halteproblems werden zunächst in M_i, w_n transformiert)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, $w \in \Sigma^*$. Bestimme $K := f(M, w)$ wie folgt

– Wähle Alphabet $\Delta := \Gamma \cup S \cup \{\#\}$ für das MPKP

– Erzeuge Anfangskonfiguration in $(u_1, v_1) := (\#, \#q_0w\#)$

– Beschreibe Konfigurationsübergänge durch Wortpaare

- $(q\,X, Y\,p)$ für $\delta(q, X) = (p, Y, R)$
- $(q\,\#, Y\,p\#)$ für $\delta(q, B) = (p, Y, R)$
- $(Z\,q\,X, p\,Z\,Y)$ für $Z \in \Gamma$ und $\delta(q, X) = (p, Y, L)$
- $(Z\,q\,\#, p\,Z\,Y\,\#)$ für $Z \in \Gamma$ und $\delta(q, B) = (p, Y, L)$

– Ergänze "Kopierregeln" (X, X) für alle $X \in \Gamma \cup \{\#\}$

– Ergänze "Löschregeln" $(X\,q_f, q_f)$, $(q_f\,Y, q_f)$ und $(X\,q_f\,Y, q_f)$ für alle $X, Y \in \Gamma$, $q_f \in F$

– Ergänze "Abschlußregel" $(q_f\,\#\,\#, \#)$ für alle $q_f \in F$

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(1) Zeige: M hält bei Eingabe $w \Rightarrow f(M,w) \in MPKP$

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(1) Zeige: M hält bei Eingabe $w \Rightarrow f(M,w) \in MPKP$

– Da M bei Eingabe w anhält, gibt es o.B.d.A. eine Konfigurationsfolge $\kappa_0 = (\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t = (x_0..x_m, q_f, y_0..y_n)$ für ein $q_f \in F$

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(1) Zeige: M hält bei Eingabe $w \Rightarrow f(M,w) \in MPKP$

- Da M bei Eingabe w anhält, gibt es o.B.d.A. eine Konfigurationsfolge $\kappa_0 = (\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t = (x_0..x_m, q_f, y_0..y_n)$ für ein $q_f \in F$
- Mit Überführungs- und Kopierregeln bauen wir folgendes Wortpaar auf
  - $u = \#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}$
  - $v = \#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}$

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(1) Zeige: M hält bei Eingabe $w \Rightarrow f(M,w) \in MPKP$

- Da M bei Eingabe w anhält, gibt es o.B.d.A. eine Konfigurationsfolge $\kappa_0 = (\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t = (x_0..x_m, q_f, y_0..y_n)$ für ein $q_f \in F$
- Mit Überführungs- und Kopierregeln bauen wir folgendes Wortpaar auf
  - $u = \#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}$
  - $v = \#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}$
- Mit der Löschregel $(x_m\, q_f, q_f)$ erzeugen wir daraus
  - $\#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f$
  - $\#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}q_f$

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(1) Zeige: M hält bei Eingabe $w \Rightarrow f(M,w) \in MPKP$

- Da M bei Eingabe w anhält, gibt es o.B.d.A. eine Konfigurationsfolge $\kappa_0 = (\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t = (x_0..x_m, q_f, y_0..y_n)$ für ein $q_f \in F$
- Mit Überführungs- und Kopierregeln bauen wir folgendes Wortpaar auf
  - $u = \#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}$
  - $v = \#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}$
- Mit der Löschregel $(x_m\, q_f, q_f)$ erzeugen wir daraus
  - $\#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f$
  - $\#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}q_f$
- Mit den Kopierregeln bekommen wir
  - $\#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#$
  - $\#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}\, q_f\, y_0..y_n\#$

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(1) Zeige: M hält bei Eingabe $w \Rightarrow f(M,w) \in MPKP$

- Da M bei Eingabe w anhält, gibt es o.B.d.A. eine Konfigurationsfolge $\kappa_0 = (\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t = (x_0..x_m, q_f, y_0..y_n)$ für ein $q_f \in F$
- Mit Überführungs- und Kopierregeln bauen wir folgendes Wortpaar auf
  - $u = \#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}$
  - $v = \#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}$
- Mit der Löschregel $(x_m\,q_f, q_f)$ erzeugen wir daraus
  - $\#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\,q_f$
  - $\#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}q_f$
- Mit den Kopierregeln bekommen wir
  - $\#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\,q_f\,y_0..y_n\#$
  - $\#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}\,q_f\,y_0..y_n\#$
- Mit den Lösch- und Kopierregeln ergibt sich
  - $\#q_0w\#\ldots\#x_0..x_{m-1}\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-2}\,q_f\,y_0..y_n\#\ldots\#q_f\,y_n\#$
  - $\#q_0w\#\ldots\#x_0..x_{m-1}\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-2}\,q_f\,y_0..y_n\#\ldots\#q_f\,y_n\#q_f\#$

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(1) Zeige: M hält bei Eingabe $w \Rightarrow f(M,w) \in MPKP$

- Da M bei Eingabe w anhält, gibt es o.B.d.A. eine Konfigurationsfolge $\kappa_0 = (\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t = (x_0..x_m, q_f, y_0..y_n)$ für ein $q_f \in F$
- Mit Überführungs- und Kopierregeln bauen wir folgendes Wortpaar auf
  - $u = \#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}$
  - $v = \#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}$
- Mit der Löschregel $(x_m\,q_f, q_f)$ erzeugen wir daraus
  - $\#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\,q_f$
  - $\#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}q_f$
- Mit den Kopierregeln bekommen wir
  - $\#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\,q_f\,y_0..y_n\#$
  - $\#q_0w\#\kappa_1\#\ldots\#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}\,q_f\,y_0..y_n\#$
- Mit den Lösch- und Kopierregeln ergibt sich
  - $\#q_0w\#\ldots\#x_0..x_{m-1}\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-2}\,q_f\,y_0..y_n\#\ldots\#q_f\,y_n\#$
  - $\#q_0w\#\ldots\#x_0..x_{m-1}\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-2}\,q_f\,y_0..y_n\#\ldots\#q_f\,y_n\#q_f\#$
- Mit der Abschlußregel ergibt sich schließlich
  - $\#q_0w\#\ldots\#x_0..x_{m-1}\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-2}\,q_f\,y_0..y_n\#\ldots\#q_f\,y_n\#q_f\#\#$
  - $\#q_0w\#\ldots\#x_0..x_{m-1}\,q_f\,y_0..y_n\#x_0..x_{m-2}\,q_f\,y_0..y_n\#\ldots\#q_f\,y_n\#q_f\#\#$ ✓

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(2) Zeige: $f(M, w) \in MPKP \Rightarrow M$ hält auf w

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(2) Zeige: $f(M, w) \in MPKP \Rightarrow M$ hält auf w

– Es gelte $f(M, w) \in MPKP$

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(2) Zeige: $f(M,w) \in MPKP \Rightarrow M$ hält auf w

- Es gelte $f(M,w) \in MPKP$
- Also gibt es $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(2) Zeige: $f(M,w) \in MPKP \Rightarrow M$ hält auf w

- Es gelte $f(M,w) \in MPKP$
- Also gibt es $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$
- Wegen der Struktur der Korrespondenzen muß

  $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n}$ mit $\#q_0 w\#$ beginnen und mit $q_f \# \#$ enden

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(2) Zeige: $f(M,w) \in MPKP \Rightarrow M$ hält auf w

- Es gelte $f(M,w) \in MPKP$
- Also gibt es $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$
- Wegen der Struktur der Korrespondenzen muß $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n}$ mit $\#q_0 w\#$ beginnen und mit $q_f \# \#$ enden
- Wegen der Überführungsregeln gilt $\#u_{i_2} \hat{=} v_1$, $\#u_{i_3} \hat{=} v_{i_2}$, ...

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(2) Zeige: $f(M,w) \in MPKP \Rightarrow M$ hält auf w

- Es gelte $f(M,w) \in MPKP$
- Also gibt es $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$
- Wegen der Struktur der Korrespondenzen muß
  $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n}$ mit $\#q_0 w\#$ beginnen und mit $q_f \# \#$ enden
- Wegen der Überführungsregeln gilt $\#u_{i_2} \hat{=} v_1$, $\#u_{i_3} \hat{=} v_{i_2}$, ...
- Aus der Korrespondenz können wir daher eine Konfigurationsfolge
  $\kappa_0 = (\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t = (x_0 .. x_m, q_f, y_0 .. y_n)$ für ein $q_f \in F$ konstruieren

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(2) Zeige: $f(M,w) \in MPKP \Rightarrow M$ hält auf w

- Es gelte $f(M,w) \in MPKP$
- Also gibt es $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$
- Wegen der Struktur der Korrespondenzen muß
  $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n}$ mit $\#q_0 w\#$ beginnen und mit $q_f \# \#$ enden
- Wegen der Überführungsregeln gilt $\#u_{i_2} \hat{=} v_1$, $\#u_{i_3} \hat{=} v_{i_2}$, ...
- Aus der Korrespondenz können wir daher eine Konfigurationsfolge
  $\kappa_0 = (\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t = (x_0 .. x_m, q_f, y_0 .. y_n)$ für ein $q_f \in F$ konstruieren
- Also hält M bei Eingabe w an ✓

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(2) Zeige: $f(M,w) \in MPKP \Rightarrow M$ hält auf w

- Es gelte $f(M,w) \in MPKP$
- Also gibt es $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n} = v_1 v_{i_2} .. v_{i_n}$
- Wegen der Struktur der Korrespondenzen muß
  $u_1 u_{i_2} .. u_{i_n}$ mit $\#q_0 w\#$ beginnen und mit $q_f \# \#$ enden
- Wegen der Überführungsregeln gilt $\#u_{i_2} \hat{=} v_1$, $\#u_{i_3} \hat{=} v_{i_2}$, ...
- Aus der Korrespondenz können wir daher eine Konfigurationsfolge
  $\kappa_0 = (\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t = (x_0 .. x_m, q_f, y_0 .. y_n)$ für ein $q_f \in F$ konstruieren
- Also hält M bei Eingabe w an ✓

$\Downarrow$

$H \leq MPKP$, also ist $MPKP$ unentscheidbar

Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken (HMU §9.5)

Für kontextfreie Grammatiken G, G' sind die folgende Probleme unentscheidbar

1. $L(G) \cap L(G') = \emptyset$
2. $L(G) \cap L(G')$ unendlich
3. $L(G) \cap L(G')$ kontextfrei
4. $L(G) \subseteq L(G')$
5. $L(G) = L(G')$
6. $L(G) = \Sigma^*$
7. G mehrdeutig
8. $\overline{L(G)}$ kontextfrei
9. $L(G)$ regulär
10. $L(G) \in$ DPDA

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \rightarrow A\$B$,

    $A \rightarrow a_1 A u_1, .., \; A \rightarrow a_k A u_k, \; A \rightarrow a_1 u_1, .., \; A \rightarrow a_k u_k$

    $B \rightarrow v_1^R B a_1, .., \; B \rightarrow v_k^R B a_k, \; B \rightarrow v_1^R a_1, .., \; B \rightarrow v_k^R a_k$

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B$,
    $A \to a_1 A u_1, .., A \to a_k A u_k,\ A \to a_1 u_1, .., A \to a_k u_k$
    $B \to v_1^R B a_1, .., B \to v_k^R B a_k,\ B \to v_1^R a_1, .., B \to v_k^R a_k$
  - Dann gilt $L(G) = \{a_{i_n}..a_{i_1} u_{i_1}..u_{i_n} \$ v_{j_m}^R..v_{j_1}^R a_{j_1}..a_{j_m} \mid i_\nu, j_\mu \leq k\}$

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B,$
    $A \to a_1 A u_1, .., \; A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., \; A \to a_k u_k$
    $B \to v_1^R B a_1, .., \; B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., \; B \to v_k^R a_k$
  - Dann gilt $L(G) = \{a_{i_n}..a_{i_1} u_{i_1}..u_{i_n} \, \$ \, v_{j_m}^R..v_{j_1}^R a_{j_1}..a_{j_m} \mid i_\nu, j_\mu \leq k\}$
  - Konstruiere $G' := S \to a_1 S a_1, .., S \to a_k S a_k, \; S \to T,$
    $T \to 0T0, \; T \to 1T1, \; T \to \$,$

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B,$
    $A \to a_1 A u_1, .., \; A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., \; A \to a_k u_k$
    $B \to v_1^R B a_1, .., \; B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., \; B \to v_k^R a_k$
  - Dann gilt $L(G) = \{a_{i_n}..a_{i_1} u_{i_1}..u_{i_n} \, \$ \, v_{j_m}^R..v_{j_1}^R a_{j_1}..a_{j_m} \mid i_\nu, j_\mu \leq k\}$
  - Konstruiere $G' := S \to a_1 S a_1, .., S \to a_k S a_k, \; S \to T,$
    $T \to 0T0, \; T \to 1T1, \; T \to \$,$
  - Dann gilt $L(G') = \{uv \, \$ \, v^R u^R \mid u \in \{a_1, .., a_k\}^*, v \in \{0, 1\}^*\}$

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B,$
    $A \to a_1 A u_1, .., A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., A \to a_k u_k$
    $B \to v_1^R B a_1, .., B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., B \to v_k^R a_k$
  - Dann gilt $L(G) = \{a_{i_n}..a_{i_1} u_{i_1}..u_{i_n} \, \$ \, v_{j_m}^R..v_{j_1}^R a_{j_1}..a_{j_m} \mid i_\nu, j_\mu \leq k\}$
  - Konstruiere $G' := S \to a_1 S a_1, .., S \to a_k S a_k, \; S \to T,$
    $T \to 0T0, \; T \to 1T1, \; T \to \$,$
  - Dann gilt $L(G') = \{uv \, \$ \, v^R u^R \mid u \in \{a_1, .., a_k\}^*, v \in \{0, 1\}^*\}$
- $\boldsymbol{L(G) \cap L(G') = \emptyset}$ **ist unentscheidbar**

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B,$
    $A \to a_1 A u_1, .., A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., A \to a_k u_k$
    $B \to v_1^R B a_1, .., B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., B \to v_k^R a_k$
  - Dann gilt $L(G) = \{a_{i_n}..a_{i_1} u_{i_1}..u_{i_n} \, \$ \, v_{j_m}^R..v_{j_1}^R a_{j_1}..a_{j_m} \mid i_\nu, j_\mu \leq k\}$
  - Konstruiere $G' := S \to a_1 S a_1, .., S \to a_k S a_k, \; S \to T,$
    $T \to 0T0, \; T \to 1T1, \; T \to \$,$
  - Dann gilt $L(G') = \{uv \, \$ \, v^R u^R \mid u \in \{a_1, .., a_k\}^*, v \in \{0, 1\}^*\}$
- **$L(G) \cap L(G') = \emptyset$ ist unentscheidbar**
  - Folgt direkt aus $K \in PKP \Leftrightarrow i_1..i_n = j_1..j_m$ und $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{j_1}..v_{j_m}$
    $\Leftrightarrow L(G) \cap L(G') \neq \emptyset$ ✓

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B,$
    $A \to a_1 A u_1, .., A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., A \to a_k u_k$
    $B \to v_1^R B a_1, .., B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., B \to v_k^R a_k$
  - Dann gilt $L(G) = \{a_{i_n}..a_{i_1} u_{i_1}..u_{i_n} \$ v_{j_m}^R..v_{j_1}^R a_{j_1}..a_{j_m} \mid i_\nu, j_\mu \leq k\}$
  - Konstruiere $G' := S \to a_1 S a_1, .., S \to a_k S a_k, \; S \to T,$
    $T \to 0T0, \; T \to 1T1, \; T \to \$,$
  - Dann gilt $L(G') = \{uv\,\$\,v^R u^R \mid u \in \{a_1, .., a_k\}^*, v \in \{0, 1\}^*\}$
- **$L(G) \cap L(G') = \emptyset$ ist unentscheidbar**
  - Folgt direkt aus $K \in PKP \Leftrightarrow i_1..i_n = j_1..j_m$ und $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{j_1}..v_{j_m}$
    $\Leftrightarrow L(G) \cap L(G') \neq \emptyset$ ✓
- **$L(G) \cap L(G')$ unendlich ist unentscheidbar**

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B,$
    $A \to a_1 A u_1, .., A \to a_k A u_k,\ A \to a_1 u_1, .., A \to a_k u_k$
    $B \to v_1^R B a_1, .., B \to v_k^R B a_k,\ B \to v_1^R a_1, .., B \to v_k^R a_k$
  - Dann gilt $L(G) = \{a_{i_n}..a_{i_1} u_{i_1}..u_{i_n} \$ v_{j_m}^R..v_{j_1}^R a_{j_1}..a_{j_m} \mid i_\nu, j_\mu \leq k\}$
  - Konstruiere $G' := S \to a_1 S a_1, .., S \to a_k S a_k,\ S \to T,$
    $T \to 0T0,\ T \to 1T1,\ T \to \$,$
  - Dann gilt $L(G') = \{uv\,\$\,v^R u^R \mid u \in \{a_1, .., a_k\}^*, v \in \{0, 1\}^*\}$
- **$L(G) \cap L(G') = \emptyset$ ist unentscheidbar**
  - Folgt direkt aus $K \in PKP \Leftrightarrow i_1..i_n = j_1..j_m$ und $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{j_1}..v_{j_m}$
    $\Leftrightarrow L(G) \cap L(G') \neq \emptyset$ ✓
- **$L(G) \cap L(G')$ unendlich ist unentscheidbar**
  - Es gilt $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n} \Rightarrow u_{i_1}..u_{i_n} u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n} v_{i_1}..v_{i_n} \Rightarrow \ldots$

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B,$
    $A \to a_1 A u_1, .., A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., A \to a_k u_k$
    $B \to v_1^R B a_1, .., B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., B \to v_k^R a_k$
  - Dann gilt $L(G) = \{a_{i_n}..a_{i_1} u_{i_1}..u_{i_n} \$ v_{j_m}^R..v_{j_1}^R a_{j_1}..a_{j_m} \mid i_\nu, j_\mu \leq k\}$
  - Konstruiere $G' := S \to a_1 S a_1, .., S \to a_k S a_k, \; S \to T,$
    $T \to 0T0, \; T \to 1T1, \; T \to \$,$
  - Dann gilt $L(G') = \{uv\,\$\,v^R u^R \mid u \in \{a_1, .., a_k\}^*, v \in \{0, 1\}^*\}$
- **$L(G) \cap L(G') = \emptyset$ ist unentscheidbar**
  - Folgt direkt aus $K \in PKP \Leftrightarrow i_1..i_n = j_1..j_m$ und $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{j_1}..v_{j_m}$
    $\Leftrightarrow L(G) \cap L(G') \neq \emptyset$ ✓
- **$L(G) \cap L(G')$ unendlich ist unentscheidbar**
  - Es gilt $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n} \Rightarrow u_{i_1}..u_{i_n} u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n} v_{i_1}..v_{i_n} \Rightarrow \ldots$
  - Es folgt $K \in PKP \Leftrightarrow L(G) \cap L(G')$ unendlich ✓

Mehrdeutigkeit ist unentscheidbar

- **G mehrdeutig ist unentscheidbar**

Mehrdeutigkeit ist unentscheidbar

- **G mehrdeutig ist unentscheidbar**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$

Mehrdeutigkeit ist unentscheidbar

- **G mehrdeutig ist unentscheidbar**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B$,

    $A \to a_1 A u_1, .., \; A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., \; A \to a_k u_k$

    $B \to v_1^R B a_1, .., \; B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., \; B \to v_k^R a_k$

Mehrdeutigkeit ist unentscheidbar

- **G mehrdeutig ist unentscheidbar**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B$,

    $A \to a_1 A u_1, .., \; A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., \; A \to a_k u_k$

    $B \to v_1^R B a_1, .., \; B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., \; B \to v_k^R a_k$
  - Wir zeigen $\boldsymbol{K \in PKP \Leftrightarrow G}$ **mehrdeutig**

Mehrdeutigkeit ist unentscheidbar

- **G mehrdeutig ist unentscheidbar**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B$,

    $A \to a_1 A u_1, .., \; A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., \; A \to a_k u_k$

    $B \to v_1^R B a_1, .., \; B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., \; B \to v_k^R a_k$
  - Wir zeigen $\boldsymbol{K \in PKP \Leftrightarrow G}$ **mehrdeutig**

    $\Rightarrow$: Es gelte $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$. Dann sind

    $S \longrightarrow A \longrightarrow a_{i_1} A u_{i_1} \longrightarrow a_{i_2} a_{i_1} A u_{i_1} u_{i_2} \ldots \longrightarrow a_{i_n}..a_{i_2} a_{i_1} u_{i_1} u_{i_2}..u_{i_n}$

    $S \longrightarrow B \longrightarrow a_{i_1} B v_{i_1} \longrightarrow a_{i_2} a_{i_1} B v_{i_1} v_{i_2} \ldots \longrightarrow a_{i_n}..a_{i_2} a_{i_1} v_{i_1} v_{i_2}..v_{i_n}$

    verschiedene (Links-)Ableitungen desselben Wortes in G ✓

Mehrdeutigkeit ist unentscheidbar

- **G mehrdeutig ist unentscheidbar**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B$,

    $A \to a_1 A u_1, .., \; A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., \; A \to a_k u_k$

    $B \to v_1^R B a_1, .., \; B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., \; B \to v_k^R a_k$
  - Wir zeigen $\boldsymbol{K \in PKP \Leftrightarrow G}$ **mehrdeutig**

    $\Rightarrow$: Es gelte $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$. Dann sind

    $S \longrightarrow A \longrightarrow a_{i_1} A u_{i_1} \longrightarrow a_{i_2} a_{i_1} A u_{i_1} u_{i_2} \ldots \longrightarrow a_{i_n}..a_{i_2} a_{i_1} u_{i_1} u_{i_2}..u_{i_n}$

    $S \longrightarrow B \longrightarrow a_{i_1} B v_{i_1} \longrightarrow a_{i_2} a_{i_1} B v_{i_1} v_{i_2} \ldots \longrightarrow a_{i_n}..a_{i_2} a_{i_1} v_{i_1} v_{i_2}..v_{i_n}$

    verschiedene (Links-)Ableitungen desselben Wortes in G ✓

    $\Leftarrow$: Jedes $w \in L(G)$ besitzt nur eine Ableitung aus A bzw. aus B.

Mehrdeutigkeit ist unentscheidbar

- **G mehrdeutig ist unentscheidbar**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B$,

    $A \to a_1 A u_1, .., \; A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., \; A \to a_k u_k$

    $B \to v_1^R B a_1, .., \; B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., \; B \to v_k^R a_k$
  - Wir zeigen $\boldsymbol{K \in PKP \Leftrightarrow G}$ **mehrdeutig**

    $\Rightarrow$: Es gelte $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$. Dann sind

    $S \longrightarrow A \longrightarrow a_{i_1} A u_{i_1} \longrightarrow a_{i_2} a_{i_1} A u_{i_1} u_{i_2} \ldots \longrightarrow a_{i_n}..a_{i_2} a_{i_1} u_{i_1} u_{i_2}..u_{i_n}$

    $S \longrightarrow B \longrightarrow a_{i_1} B v_{i_1} \longrightarrow a_{i_2} a_{i_1} B v_{i_1} v_{i_2} \ldots \longrightarrow a_{i_n}..a_{i_2} a_{i_1} v_{i_1} v_{i_2}..v_{i_n}$

    verschiedene (Links-)Ableitungen desselben Wortes in G ✓

    $\Leftarrow$: Jedes $w \in L(G)$ besitzt nur eine Ableitung aus A bzw. aus B.

    Hat w zwei (Links-)Ableitungen in G, so muß die erste mit $S \longrightarrow A$ und die zweite mit $S \longrightarrow B$ beginnen.

Mehrdeutigkeit ist unentscheidbar

- **G mehrdeutig ist unentscheidbar**
  - Gegeben $K = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G := S \to A\$B$,

    $A \to a_1 A u_1, .., \; A \to a_k A u_k, \; A \to a_1 u_1, .., \; A \to a_k u_k$

    $B \to v_1^R B a_1, .., \; B \to v_k^R B a_k, \; B \to v_1^R a_1, .., \; B \to v_k^R a_k$
  - Wir zeigen $\boldsymbol{K \in PKP \Leftrightarrow G}$ **mehrdeutig**

    $\Rightarrow$: Es gelte $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$. Dann sind

    $S \longrightarrow A \longrightarrow a_{i_1} A u_{i_1} \longrightarrow a_{i_2} a_{i_1} A u_{i_1} u_{i_2} \ldots \longrightarrow a_{i_n}..a_{i_2} a_{i_1} u_{i_1} u_{i_2}..u_{i_n}$

    $S \longrightarrow B \longrightarrow a_{i_1} B v_{i_1} \longrightarrow a_{i_2} a_{i_1} B v_{i_1} v_{i_2} \ldots \longrightarrow a_{i_n}..a_{i_2} a_{i_1} v_{i_1} v_{i_2}..v_{i_n}$

    verschiedene (Links-)Ableitungen desselben Wortes in G ✓

    $\Leftarrow$: Jedes $w \in L(G)$ besitzt nur eine Ableitung aus A bzw. aus B.

    Hat w zwei (Links-)Ableitungen in G, so muß die erste mit $S \longrightarrow A$ und die zweite mit $S \longrightarrow B$ beginnen.

    Es folgt $a_{i_n}..a_{i_2} a_{i_1} u_{i_1} u_{i_2}..u_{i_n} = w = a_{i_n}..a_{i_2} a_{i_1} v_{i_1} v_{i_2}..v_{i_n}$

    Also $K \in PKP$ ✓

Rückblick: Beweismethoden für Unlösbarkeit

- **Diagonalisierung**
  - Nur für maschinennah formulierte Probleme

Rückblick: Beweismethoden für Unlösbarkeit

- **Diagonalisierung**
  - Nur für maschinennah formulierte Probleme
- **Wachstums- und Monotonieargumente**
  - Aufwendig: Busy Beaver Problem / Ackermannfunktion

Rückblick: Beweismethoden für Unlösbarkeit

- **Diagonalisierung**
  - Nur für maschinennah formulierte Probleme
- **Wachstums- und Monotonieargumente**
  - Aufwendig: Busy Beaver Problem / Ackermannfunktion
- **Eigenschaften des Komplements**
  - Ist $\overline{P}$ nicht entscheidbar, dann ist auch P nicht entscheidbar
  - Ist $\overline{P}$ nicht entscheidbar aber aufzählbar, dann ist P nicht aufzählbar

Rückblick: Beweismethoden für Unlösbarkeit

- **Diagonalisierung**
  - Nur für maschinennah formulierte Probleme
- **Wachstums- und Monotonieargumente**
  - Aufwendig: Busy Beaver Problem / Ackermannfunktion
- **Eigenschaften des Komplements**
  - Ist $\overline{P}$ nicht entscheidbar, dann ist auch P nicht entscheidbar
  - Ist $\overline{P}$ nicht entscheidbar aber aufzählbar, dann ist P nicht aufzählbar
- **Reduktionsbeweise**
  - Einbettung eines anderen unlösbaren Problem P_{alt} in P

    $P_{alt} = f^{-1}(P)$ (“$P_{alt} \leq P$”)
  - Ähnliches Vorgehen mit anderen Abschlußeigenschaften

Rückblick: Beweismethoden für Unlösbarkeit

- **Diagonalisierung**
  - Nur für maschinennah formulierte Probleme
- **Wachstums- und Monotonieargumente**
  - Aufwendig: Busy Beaver Problem / Ackermannfunktion
- **Eigenschaften des Komplements**
  - Ist $\overline{P}$ nicht entscheidbar, dann ist auch P nicht entscheidbar
  - Ist $\overline{P}$ nicht entscheidbar aber aufzählbar, dann ist P nicht aufzählbar
- **Reduktionsbeweise**
  - Einbettung eines anderen unlösbaren Problem P_{alt} in P

    $P_{alt} = f^{-1}(P)$ (“$P_{alt} \leq P$”)
  - Ähnliches Vorgehen mit anderen Abschlußeigenschaften
- **Anwendung des Satzes von Rice**
  - Keine nichttriviale extensionale Programmeigenschaft ist entscheidbar