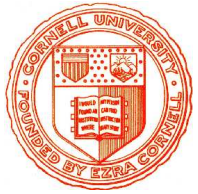
# Kryptographie und Komplexität




## Einheit 5.2

## ElGamal Systeme


1. Verschlüsselungsverfahren
2. Korrektheit und Komplexität
3. Sicherheitsaspekte

# Das ElGamal Verschlüsselungsverfahren

- **Public-Key Verfahren von Taher ElGamal (1985)**
  - Sicherheit basiert auf Schwierigkeit des DL Problems
    Berechnung diskreter Logarithmen ist nicht in akzeptabler Zeit möglich
  - Eng verwandt mit Diffie-Hellman Schlüsselaustauschprotokoll

# Das ElGamal Verschlüsselungsverfahren

- **Public-Key Verfahren von Taher ElGamal (1985)**
  - Sicherheit basiert auf Schwierigkeit des DL Problems
    Berechnung diskreter Logarithmen ist nicht in akzeptabler Zeit möglich
  - Eng verwandt mit Diffie-Hellman Schlüsselaustauschprotokoll
- **Verwendet Potenzierung von Gruppenelementen**
  - Nachricht ist Exponent der Potenzierung (anstelle der Basis)
  - Neben Restklassengruppen $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ sind auch andere Gruppen geeignet

# Das ElGamal Verschlüsselungsverfahren

- **Public-Key Verfahren von Taher ElGamal (1985)**
  - Sicherheit basiert auf Schwierigkeit des DL Problems
    Berechnung diskreter Logarithmen ist nicht in akzeptabler Zeit möglich
  - Eng verwandt mit Diffie-Hellman Schlüsselaustauschprotokoll
- **Verwendet Potenzierung von Gruppenelementen**
  - Nachricht ist Exponent der Potenzierung (anstelle der Basis)
  - Neben Restklassengruppen $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ sind auch andere Gruppen geeignet
- **Protokoll enthält Randomisierung**
  - Empfänger legt Diffie-Hellman Teilschlüssel offen
  - Absender verwendet Zufallszahlen zur Verschlüsselung
  - Nachricht enthält Diffie-Hellman Teilschlüssel des Absenders

# Das ElGamal Verschlüsselungsverfahren

- **Public-Key Verfahren von Taher ElGamal (1985)**
  - Sicherheit basiert auf Schwierigkeit des DL Problems
    Berechnung diskreter Logarithmen ist nicht in akzeptabler Zeit möglich
  - Eng verwandt mit Diffie-Hellman Schlüsselaustauschprotokoll
- **Verwendet Potenzierung von Gruppenelementen**
  - Nachricht ist Exponent der Potenzierung (anstelle der Basis)
  - Neben Restklassengruppen $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ sind auch andere Gruppen geeignet
- **Protokoll enthält Randomisierung**
  - Empfänger legt Diffie-Hellman Teilschlüssel offen
  - Absender verwendet Zufallszahlen zur Verschlüsselung
  - Nachricht enthält Diffie-Hellman Teilschlüssel des Absenders

Effiziente Ver-/Entschlüsselung und semantische Sicherheit

# Das ElGamal Verfahren im Detail

- **Schlüsselerzeugung**
  - Wähle eine große Primzahl $p$ und ein Gruppenelement $g$ der Ordnung $p$

# Das ElGamal Verfahren im Detail

- **Schlüsselerzeugung**
  - Wähle eine große Primzahl $p$ und ein Gruppenelement $g$ der Ordnung $p$
  - Wähle ein zufälliges $a \in \{0, .., p-2\}$ und berechne $A = g^a$
  - Lege $p, g, A$ offen, halte $a$ geheim

# Das ElGamal Verfahren im Detail

- **Schlüsselerzeugung**
  - Wähle eine große Primzahl $p$ und ein Gruppenelement $g$ der Ordnung $p$
  - Wähle ein zufälliges $a \in \{0, .., p-2\}$ und berechne $A = g^a$
  - Lege $p, g, A$ offen, halte $a$ geheim
- **Verschlüsselung**
  - Gesamtschlüssel ist $K := (p, g, a, A)$, wobei $p, g, A$ öffentlich
  - Text wird in Blöcke der Länge $\log_2 p/8$ zerlegt (ein Byte pro Buchstabe)
    Jeder Textblock wird als Binärdarstellung einer Zahl $x$ interpretiert

# Das ElGamal Verfahren im Detail

- **Schlüsselerzeugung**
  - Wähle eine große Primzahl $p$ und ein Gruppenelement $g$ der Ordnung $p$
  - Wähle ein zufälliges $a \in \{0, .., p-2\}$ und berechne $A = g^a$
  - Lege $p, g, A$ offen, halte $a$ geheim
- **Verschlüsselung**
  - Gesamtschlüssel ist $K := (p, g, a, A)$, wobei $p, g, A$ öffentlich
  - Text wird in Blöcke der Länge $\log_2 p/8$ zerlegt (ein Byte pro Buchstabe)
    Jeder Textblock wird als Binärdarstellung einer Zahl $x$ interpretiert
  - Absender wählt zufälliges $b \in \{0, .., p-2\}$ und berechnet $B := g^b$
  - Absender verschlüsselt $x$ zu $y := x \cdot A^b$
  - Erzeugter Schlüsseltext ist $\boldsymbol{e_K(x, b) = (B, y)}$

# Das ElGamal Verfahren im Detail

- **Schlüsselerzeugung**
  - Wähle eine große Primzahl $p$ und ein Gruppenelement $g$ der Ordnung $p$
  - Wähle ein zufälliges $a \in \{0, .., p-2\}$ und berechne $A = g^a$
  - Lege $p, g, A$ offen, halte $a$ geheim
- **Verschlüsselung**
  - Gesamtschlüssel ist $K := (p, g, a, A)$, wobei $p, g, A$ öffentlich
  - Text wird in Blöcke der Länge $\log_2 p/8$ zerlegt (ein Byte pro Buchstabe)
    Jeder Textblock wird als Binärdarstellung einer Zahl $x$ interpretiert
  - Absender wählt zufälliges $b \in \{0, .., p-2\}$ und berechnet $B := g^b$
  - Absender verschlüsselt $x$ zu $y := x \cdot A^b$
  - Erzeugter Schlüsseltext ist $\boldsymbol{e_K(x, b)} = (B, y)$
- **Entschlüsselung**
  - Empfänger berechnet $\boldsymbol{d_K(B, y)} = y \cdot (B^a)^{-1}$

# Das ElGamal Verfahren am Beispiel

- **Einfaches Beispiel in Restklassengruppen**
  - Alice wählt $p = 23$, $g = 7 \in \mathbb{Z}_p$, $a = 6$ und berechnet $A = 7^6 \bmod 23 = 4$
  - Bob wählt $b = 3$ und berechnet $B = 7^3 \bmod 23 = 21$ und $A^b \bmod 23 = 18$
  - Verschlüsselung der Nachricht $x = 7$ ergibt Schlüsseltext $(B, y) = (21, 11)$

# Das ElGamal Verfahren am Beispiel

- **Einfaches Beispiel in Restklassengruppen**
  - Alice wählt $p = 23$, $g = 7 \in \mathbb{Z}_p$, $a = 6$ und berechnet $A = 7^6 \bmod 23 = 4$
  - Bob wählt $b = 3$ und berechnet $B = 7^3 \bmod 23 = 21$ und $A^b \bmod 23 = 18$
  - Verschlüsselung der Nachricht $x = 7$ ergibt Schlüsseltext $(B, y) = (21, 11)$
  - Alice erhält $(B, y)$ und berechnet $(B^a)^{-1} = B^{p-1-a} \bmod 23 = 9$
  - Entschlüsselung von $y$ liefert $11 \cdot 9 \bmod 23 = 7$

# Das ElGamal Verfahren am Beispiel

- **Einfaches Beispiel in Restklassengruppen**
  - Alice wählt $p = 23$, $g = 7 \in \mathbb{Z}_p$, $a = 6$ und berechnet $A = 7^6 \bmod 23 = 4$
  - Bob wählt $b = 3$ und berechnet $B = 7^3 \bmod 23 = 21$ und $A^b \bmod 23 = 18$
  - Verschlüsselung der Nachricht $x = 7$ ergibt Schlüsseltext $(B, y) = (21, 11)$
  - Alice erhält $(B, y)$ und berechnet $(B^a)^{-1} = B^{p-1-a} \bmod 23 = 9$
  - Entschlüsselung von $y$ liefert $11 \cdot 9 \bmod 23 = 7$
- **Berechnungen sind einfacher als bei RSA**
  - Bob kann $B := g^b$ und $A^b$ im Voraus berechnen
  - Alice kann Invertierung von $B^a$ in $\mathbb{Z}_p$ als $B^{p-1-a} \bmod p$ berechnen

# Das ElGamal Verfahren am Beispiel

- **Einfaches Beispiel in Restklassengruppen**
  - Alice wählt $p = 23$, $g = 7 \in \mathbb{Z}_p$, $a = 6$ und berechnet $A = 7^6 \bmod 23 = 4$
  - Bob wählt $b = 3$ und berechnet $B = 7^3 \bmod 23 = 21$ und $A^b \bmod 23 = 18$
  - Verschlüsselung der Nachricht $x = 7$ ergibt Schlüsseltext $(B, y) = (21, 11)$
  - Alice erhält $(B, y)$ und berechnet $(B^a)^{-1} = B^{p-1-a} \bmod 23 = 9$
  - Entschlüsselung von $y$ liefert $11 \cdot 9 \bmod 23 = 7$
- **Berechnungen sind einfacher als bei RSA**
  - Bob kann $B := g^b$ und $A^b$ im Voraus berechnen
  - Alice kann Invertierung von $B^a$ in $\mathbb{Z}_p$ als $B^{p-1-a} \bmod p$ berechnen
- **Gute statistische Streuung der Schlüsseltexte**
  - Verschlüsselung von 4 5 6 7 8 9 mit $b = 3$ ergibt $y$-Werte 3 21 16 11 6 1

# ElGamal Verfahren mit 32-Bit Zahlen

- **Schlüsselerzeugung**
  - Alice wählt $p = 3013183829$, $g = 2719263871 \in \mathbb{Z}_p$, $a = 1000000000$
  - Alice berechnet $A = g^a \bmod p = 2006813696$ und veröffentlicht $p, g, A$

# ElGamal Verfahren mit 32-Bit Zahlen

- **Schlüsselerzeugung**
  - Alice wählt $p = 3013183829$, $g = 2719263871 \in \mathbb{Z}_p$, $a = 1000000000$
  - Alice berechnet $A = g^a \bmod p = 2006813696$ und veröffentlicht $p, g, A$
- **Verschlüsselung**
  - Bob wählt $b = 50000000000$ und berechnet
    $B = g^b \bmod p = 1948493095$ und $A^b \bmod p = 2537054755$

# ElGamal Verfahren mit 32-Bit Zahlen

- **Schlüsselerzeugung**
  - Alice wählt $p = 3013183829$, $g = 2719263871 \in \mathbb{Z}_p$, $a = 1000000000$
  - Alice berechnet $A = g^a \bmod p = 2006813696$ und veröffentlicht $p, g, A$
- **Verschlüsselung**
  - Bob wählt $b = 50000000000$ und berechnet
    $B = g^b \bmod p = 1948493095$ und $A^b \bmod p = 2537054755$
  - Klartext ist Test, codiert als Zahl $x = 1415934836$
    Schlüsseltext ist $(B, y) = (B, x \cdot A^b \bmod p) = (1948493095, 811008022)$

# ElGamal Verfahren mit 32-Bit Zahlen

- **Schlüsselerzeugung**
  - Alice wählt $p = 3013183829$, $g = 2719263871 \in \mathbb{Z}_p$, $a = 1000000000$
  - Alice berechnet $A = g^a \bmod p = 2006813696$ und veröffentlicht $p, g, A$
- **Verschlüsselung**
  - Bob wählt $b = 50000000000$ und berechnet
    $B = g^b \bmod p = 1948493095$ und $A^b \bmod p = 2537054755$
  - Klartext ist Test, codiert als Zahl $x = 1415934836$
    Schlüsseltext ist $(B, y) = (B, x \cdot A^b \bmod p) = (1948493095, 811008022)$
- **Entschlüsselung**
  - Alice berechnet $(B^a)^{-1} = B^{p-1-a} \bmod p = 475183925$
  - Multiplikation mit $y$ liefert $811008022 \cdot (B^a)^{-1} \bmod p = 1415934836$
  - Konversion in 4-Buchstaben-Block liefert ursprünglichen Klartext

# ElGamal Verfahren mit 32-Bit Zahlen

- **Schlüsselerzeugung**
  - Alice wählt $p = 3013183829$, $g = 2719263871 \in \mathbb{Z}_p$, $a = 1000000000$
  - Alice berechnet $A = g^a \bmod p = 2006813696$ und veröffentlicht $p, g, A$
- **Verschlüsselung**
  - Bob wählt $b = 50000000000$ und berechnet
    $B = g^b \bmod p = 1948493095$ und $A^b \bmod p = 2537054755$
  - Klartext ist Test, codiert als Zahl $x = 1415934836$
    Schlüsseltext ist $(B, y) = (B, x \cdot A^b \bmod p) = (1948493095, 811008022)$
- **Entschlüsselung**
  - Alice berechnet $(B^a)^{-1} = B^{p-1-a} \bmod p = 475183925$
  - Multiplikation mit $y$ liefert $811008022 \cdot (B^a)^{-1} \bmod p = 1415934836$
  - Konversion in 4-Buchstaben-Block liefert ursprünglichen Klartext
- **Realistische Blocklänge ist 512 oder 1024 Bit**
  - Schnelle Primzahltests/Potenzierungsalgorithmen wie bei RSA nötig

# Korrektheit und Komplexität von ElGamal

- **Korrektheit: Ver-/Entschlüsselung sind invers**
  - Es ist $d_K(B, y) = y \cdot (B^a)^{-1}$ wobei $e_K(x, b) = (B, y) = (g^b, x \cdot A^b)$
  - Für beliebige $b$ ist $d_K(e_K(x, b)) = x \cdot A^b \cdot (B^a)^{-1} = x \cdot g^{a \cdot b} \cdot (g^{b \cdot a})^{-1} = x$

# Korrektheit und Komplexität von ElGamal

- **Korrektheit: Ver-/Entschlüsselung sind invers**
  - Es ist $d_K(B, y) = y \cdot (B^a)^{-1}$ wobei $e_K(x, b) = (B, y) = (g^b, x \cdot A^b)$
  - Für beliebige $b$ ist $d_K(e_K(x, b)) = x \cdot A^b \cdot (B^a)^{-1} = x \cdot g^{a \cdot b} \cdot (g^{b \cdot a})^{-1} = x$
- **Aufwand für Auswahl des Schlüssels (einmalig)**
  - Erzeugung der Primzahlen $p$ (z.B. mit Miller-Rabin) $\mathcal{O}(\|p\|^3)$
  - Wahl von $g, a$ und Berechnung von $A = g^a$ in $\mathbb{Z}_p$ $\mathcal{O}(\|p\|^3)$

# Korrektheit und Komplexität von ElGamal

- **Korrektheit: Ver-/Entschlüsselung sind invers**
  - Es ist $d_K(B, y) = y \cdot (B^a)^{-1}$ wobei $e_K(x, b) = (B, y) = (g^b, x \cdot A^b)$
  - Für beliebige $b$ ist $d_K(e_K(x, b)) = x \cdot A^b \cdot (B^a)^{-1} = x \cdot g^{a \cdot b} \cdot (g^{b \cdot a})^{-1} = x$
- **Aufwand für Auswahl des Schlüssels (einmalig)**
  - Erzeugung der Primzahlen $p$ (z.B. mit Miller-Rabin) $\mathcal{O}(\|p\|^3)$
  - Wahl von $g, a$ und Berechnung von $A = g^a$ in $\mathbb{Z}_p$ $\mathcal{O}(\|p\|^3)$
- **Aufwand für Ver- und Entschlüsselung**
  - Kein Aufwand für Umwandlung zwischen Text und Zahlen
  - Potenzierung von $8|w|/\|p\|$ Blöcken in $\mathbb{Z}_p$ $\mathcal{O}(|w| \cdot \|p\|^2)$

# Korrektheit und Komplexität von ElGamal

- **Korrektheit: Ver-/Entschlüsselung sind invers**
  - Es ist $d_K(B, y) = y \cdot (B^a)^{-1}$ wobei $e_K(x, b) = (B, y) = (g^b, x \cdot A^b)$
  - Für beliebige $b$ ist $d_K(e_K(x, b)) = x \cdot A^b \cdot (B^a)^{-1} = x \cdot g^{a \cdot b} \cdot (g^{b \cdot a})^{-1} = x$
- **Aufwand für Auswahl des Schlüssels (einmalig)**
  - Erzeugung der Primzahlen $p$ (z.B. mit Miller-Rabin) $\mathcal{O}(\|p\|^3)$
  - Wahl von $g, a$ und Berechnung von $A = g^a$ in $\mathbb{Z}_p$ $\mathcal{O}(\|p\|^3)$
- **Aufwand für Ver- und Entschlüsselung**
  - Kein Aufwand für Umwandlung zwischen Text und Zahlen
  - Potenzierung von $8|w|/\|p\|$ Blöcken in $\mathbb{Z}_p$ $\mathcal{O}(|w| \cdot \|p\|^2)$
  - Schlüsseltext doppelt so lang wie Klartext (Nachrichtenexpansion)
  - Beschleunigung mit chinesischem Restsatz nicht möglich

# Korrektheit und Komplexität von ElGamal

- **Korrektheit: Ver-/Entschlüsselung sind invers**
  - Es ist $d_K(B, y) = y \cdot (B^a)^{-1}$ wobei $e_K(x, b) = (B, y) = (g^b, x \cdot A^b)$
  - Für beliebige $b$ ist $d_K(e_K(x, b)) = x \cdot A^b \cdot (B^a)^{-1} = x \cdot g^{a \cdot b} \cdot (g^{b \cdot a})^{-1} = x$
- **Aufwand für Auswahl des Schlüssels (einmalig)**
  - Erzeugung der Primzahlen $p$ (z.B. mit Miller-Rabin) $\mathcal{O}(\|p\|^3)$
  - Wahl von $g, a$ und Berechnung von $A = g^a$ in $\mathbb{Z}_p$ $\mathcal{O}(\|p\|^3)$
- **Aufwand für Ver- und Entschlüsselung**
  - Kein Aufwand für Umwandlung zwischen Text und Zahlen
  - Potenzierung von $8|w|/\|p\|$ Blöcken in $\mathbb{Z}_p$ $\mathcal{O}(|w| \cdot \|p\|^2)$
  - Schlüsseltext doppelt so lang wie Klartext (Nachrichtenexpansion)
  - Beschleunigung mit chinesischem Restsatz nicht möglich
- **Trotzdem schneller als RSA**
  - Bei festem $b$ ist Vorberechnung von $B := g^b$, $A^b$ und $(B^a)^{-1}$ möglich
    Ver-/Entschlüsselung benötigt nur eine Multiplikation $\mathcal{O}(|w| \cdot \|p\|)$

# Korrektheit und Komplexität von ElGamal

- **Korrektheit: Ver-/Entschlüsselung sind invers**
  - Es ist $d_K(B, y) = y \cdot (B^a)^{-1}$ wobei $e_K(x, b) = (B, y) = (g^b, x \cdot A^b)$
  - Für beliebige $b$ ist $d_K(e_K(x, b)) = x \cdot A^b \cdot (B^a)^{-1} = x \cdot g^{a \cdot b} \cdot (g^{b \cdot a})^{-1} = x$
- **Aufwand für Auswahl des Schlüssels (einmalig)**
  - Erzeugung der Primzahlen $p$ (z.B. mit Miller-Rabin) $\mathcal{O}(\|p\|^3)$
  - Wahl von $g, a$ und Berechnung von $A = g^a$ in $\mathbb{Z}_p$ $\mathcal{O}(\|p\|^3)$
- **Aufwand für Ver- und Entschlüsselung**
  - Kein Aufwand für Umwandlung zwischen Text und Zahlen
  - Potenzierung von $8|w|/\|p\|$ Blöcken in $\mathbb{Z}_p$ $\mathcal{O}(|w| \cdot \|p\|^2)$
  - Schlüsseltext doppelt so lang wie Klartext (Nachrichtenexpansion)
  - Beschleunigung mit chinesischem Restsatz nicht möglich
- **Trotzdem schneller als RSA**
  - Bei festem $b$ ist Vorberechnung von $B := g^b$, $A^b$ und $(B^a)^{-1}$ möglich
    Ver-/Entschlüsselung benötigt nur eine Multiplikation $\mathcal{O}(|w| \cdot \|p\|)$

Aufwand in anderen Gruppen als $\mathbb{Z}_p$ abhängig von Komplexität der Gruppenoperation ·

# Sicherheit von ElGamal

- **Gleich schwer wie Diffie-Hellman Problem**
  - Kann ein Angreifer das DH-Problem lösen, so kann er aus $(B, y)$ und $K = (p, g, A)$ auch $B^a = g^{a \cdot b}$ und damit $x = y \cdot (B^a)^{-1}$ bestimmen

# Sicherheit von ElGamal

- **Gleich schwer wie Diffie-Hellman Problem**
  - Kann ein Angreifer das DH-Problem lösen, so kann er aus $(B, y)$ und $K = (p, g, A)$ auch $B^a = g^{a \cdot b}$ und damit $x = y \cdot (B^a)^{-1}$ bestimmen
  - Kann ein Angreifer das ElGamal System brechen, so kann er aus $A = g^a$, $B = g^b$ und festem $y = 1$ die Zahl $x = 1 \cdot (B^a)^{-1} = (g^{a \cdot b})^{-1}$ bestimmen. Invertierung von $x$ löst das Diffie-Hellman Problem

# Sicherheit von ElGamal

- **Gleich schwer wie Diffie-Hellman Problem**
  - Kann ein Angreifer das DH-Problem lösen, so kann er aus $(B, y)$ und $K = (p, g, A)$ auch $B^a = g^{a \cdot b}$ und damit $x = y \cdot (B^a)^{-1}$ bestimmen
  - Kann ein Angreifer das ElGamal System brechen, so kann er aus $A = g^a$, $B = g^b$ und festem $y = 1$ die Zahl $x = 1 \cdot (B^a)^{-1} = (g^{a \cdot b})^{-1}$ bestimmen. Invertierung von $x$ löst das Diffie-Hellman Problem
- **Sicherheit des geheimen Schlüssels**
  - Bestimmung von $a$ benötigt Lösung des DL Problems
    Äquivalenz zum Problem des diskreten Logarithmus nicht bewiesen

# Sicherheit von ElGamal

- **Gleich schwer wie Diffie-Hellman Problem**
  - Kann ein Angreifer das DH-Problem lösen, so kann er aus $(B, y)$ und $K = (p, g, A)$ auch $B^a = g^{a \cdot b}$ und damit $x = y \cdot (B^a)^{-1}$ bestimmen
  - Kann ein Angreifer das ElGamal System brechen, so kann er aus $A = g^a$, $B = g^b$ und festem $y = 1$ die Zahl $x = 1 \cdot (B^a)^{-1} = (g^{a \cdot b})^{-1}$ bestimmen. Invertierung von $x$ löst das Diffie-Hellman Problem
- **Sicherheit des geheimen Schlüssels**
  - Bestimmung von $a$ benötigt Lösung des DL Problems
    Äquivalenz zum Problem des diskreten Logarithmus nicht bewiesen
  - Berechnung diskreter Logarithmen ist i.w. exponentiell in $\|p\|$ $\mapsto$ §5.3

# Sicherheit von ElGamal

- **Gleich schwer wie Diffie-Hellman Problem**
  - Kann ein Angreifer das DH-Problem lösen, so kann er aus $(B, y)$ und $K = (p, g, A)$ auch $B^a = g^{a \cdot b}$ und damit $x = y \cdot (B^a)^{-1}$ bestimmen
  - Kann ein Angreifer das ElGamal System brechen, so kann er aus $A = g^a$, $B = g^b$ und festem $y = 1$ die Zahl $x = 1 \cdot (B^a)^{-1} = (g^{a \cdot b})^{-1}$ bestimmen. Invertierung von $x$ löst das Diffie-Hellman Problem
- **Sicherheit des geheimen Schlüssels**
  - Bestimmung von $a$ benötigt Lösung des DL Problems
    Äquivalenz zum Problem des diskreten Logarithmus nicht bewiesen
  - Berechnung diskreter Logarithmen ist i.w. exponentiell in $\|p\|$ $\mapsto$ §5.3
- **Semantische Sicherheit durch Randomisierung**
  - Zufällige Wahl von $b$ macht Verschlüsselung nichtdeterministisch
  - Gleiche Klartexte werden verschieden verschlüsselt
    Resultierende Schlüsseltexte $(B, y)$ sind zufällig und gleichverteilt

# Sicherheit von ElGamal

- **Gleich schwer wie Diffie-Hellman Problem**
  - Kann ein Angreifer das DH-Problem lösen, so kann er aus $(B, y)$ und $K = (p, g, A)$ auch $B^a = g^{a \cdot b}$ und damit $x = y \cdot (B^a)^{-1}$ bestimmen
  - Kann ein Angreifer das ElGamal System brechen, so kann er aus $A = g^a$, $B = g^b$ und festem $y = 1$ die Zahl $x = 1 \cdot (B^a)^{-1} = (g^{a \cdot b})^{-1}$ bestimmen. Invertierung von $x$ löst das Diffie-Hellman Problem
- **Sicherheit des geheimen Schlüssels**
  - Bestimmung von $a$ benötigt Lösung des DL Problems
    Äquivalenz zum Problem des diskreten Logarithmus nicht bewiesen
  - Berechnung diskreter Logarithmen ist i.w. exponentiell in $\|p\|$ $\mapsto$ §5.3
- **Semantische Sicherheit durch Randomisierung**
  - Zufällige Wahl von $b$ macht Verschlüsselung nichtdeterministisch
  - Gleiche Klartexte werden verschieden verschlüsselt
    Resultierende Schlüsseltexte $(B, y)$ sind zufällig und gleichverteilt

**ElGamal ist sicherer oder effizienter als RSA**