

# Kryptographie und Komplexität



## Einheit 5.3

### Angriffe auf ElGamal Systeme



1. Berechnung diskreter Logarithmen
2. Andere Angriffe
3. Richtlinien für die Schlüsselauswahl

# DAS PROBLEM DES DISKRETEN LOGARITHMUS

- **Allgemeine Formulierung**

- *Gegeben multiplikative Gruppe  $(G, \cdot)$ , Element  $g$  der Ordnung  $n$  und  $y \in \langle g \rangle$ . Bestimme die eindeutige Zahl  $x < n$  mit  $y = g^x$*

# DAS PROBLEM DES DISKRETEN LOGARITHMUS

- **Allgemeine Formulierung**

- Gegeben multiplikative Gruppe  $(G, \cdot)$ , Element  $g$  der Ordnung  $n$  und  $y \in \langle g \rangle$ . Bestimme die eindeutige Zahl  $x < n$  mit  $y = g^x$

- **Über  $\mathbb{Z}_p$  ähnlich schwer wie Faktorisierung**

- Viele Faktorisierungsalgorithmen lassen sich übertragen
  - Kryptosysteme werden durch Verwendung des DL Problems alleine nicht sicherer als durch das Faktorisierungsproblem

# DAS PROBLEM DES DISKRETEN LOGARITHMUS

- **Allgemeine Formulierung**

- Gegeben multiplikative Gruppe  $(G, \cdot)$ , Element  $g$  der Ordnung  $n$  und  $y \in \langle g \rangle$ . Bestimme die eindeutige Zahl  $x < n$  mit  $y = g^x$

- **Über  $\mathbb{Z}_p$  ähnlich schwer wie Faktorisierung**

- Viele Faktorisierungsalgorithmen lassen sich übertragen
- Kryptosysteme werden durch Verwendung des DL Problems alleine nicht sicherer als durch das Faktorisierungsproblem

- **Es gibt viele DL-Algorithmen**

- Aufzählungsverfahren, Shanks, Pollard  $\rho$ , Pohlig-Hellman, Index-Calculus, Zahlkörpersiebe
- Zunehmende Kompliziertheit senkt die Komplexität

# DAS PROBLEM DES DISKRETEN LOGARITHMUS

- **Allgemeine Formulierung**

- Gegeben multiplikative Gruppe  $(G, \cdot)$ , Element  $g$  der Ordnung  $n$  und  $y \in \langle g \rangle$ . Bestimme die eindeutige Zahl  $x < n$  mit  $y = g^x$

- **Über  $\mathbb{Z}_p$  ähnlich schwer wie Faktorisierung**

- Viele Faktorisierungsalgorithmen lassen sich übertragen
- Kryptosysteme werden durch Verwendung des DL Problems alleine nicht sicherer als durch das Faktorisierungsproblem

- **Es gibt viele DL-Algorithmen**

- Aufzählungsverfahren, Shanks, Pollard  $\rho$ , Pohlig-Hellman, Index-Calculus, Zahlkörpersiebe
- Zunehmende Kompliziertheit senkt die Komplexität

- **Schwieriger über anderen Gruppen**

- Die besten DL-Algorithmen sind nur zahlentheoretisch verwendbar

# AUFZÄHLUNG

- **Einfacher, leicht zu programmierender Ansatz**

- Lösungskandidaten  $x = 1, 2, 3, \dots$  werden der Reihe nach überprüft
- Die Bestimmung von  $x = \log_g y$  benötigt  $x-1$  Multiplikationen
- Hochgradig ineffizient

Laufzeit  $\mathcal{O}(n \cdot \|n\|^2) = \mathcal{O}(2^{\|n\|})$

# AUFZÄHLUNG

- **Einfacher, leicht zu programmierender Ansatz**

- Lösungskandidaten  $x = 1, 2, 3, \dots$  werden der Reihe nach überprüft
- Die Bestimmung von  $x = \log_g y$  benötigt  $x-1$  Multiplikationen
- Hochgradig ineffizient

$$\text{Laufzeit } \mathcal{O}(n \cdot \|n\|^2) = \mathcal{O}(2^{\|n\|})$$

- **Nur für Zahlen mit kleinen Logarithmen**

- Suche nach Logarithmen muß auf Schranke  $B$  begrenzt werden
- Schranke jenseits von  $10^7$  wenig sinnvoll

Anders als bei Faktorisierung sagt dies nichts über die Größe von  $n$  oder  $y$  aus

# AUFZÄHLUNG

- **Einfacher, leicht zu programmierender Ansatz**

- Lösungskandidaten  $x = 1, 2, 3, \dots$  werden der Reihe nach überprüft
- Die Bestimmung von  $x = \log_g y$  benötigt  $x-1$  Multiplikationen
- Hochgradig ineffizient Laufzeit  $\mathcal{O}(n \cdot \|n\|^2) = \mathcal{O}(2^{\|n\|})$

- **Nur für Zahlen mit kleinen Logarithmen**

- Suche nach Logarithmen muß auf Schranke  $B$  begrenzt werden
- Schranke jenseits von  $10^7$  wenig sinnvoll
- Anders als bei Faktorisierung sagt dies nichts über die Größe von  $n$  oder  $y$  aus

- **Keine Optimierungen wie bei Faktorisierung**

- Jede Zahl könnte der geeignete Logarithmus sein
- Man kann wenig über Struktur von  $x$  sagen (z.B. ungerade)
- Außer  $n$  gibt es keine obere Grenze für  $x$



# AUFZÄHLUNG

- **Einfacher, leicht zu programmierender Ansatz**

- Lösungskandidaten  $x = 1, 2, 3, \dots$  werden der Reihe nach überprüft
- Die Bestimmung von  $x = \log_g y$  benötigt  $x-1$  Multiplikationen
- Hochgradig ineffizient Laufzeit  $\mathcal{O}(n \cdot \|n\|^2) = \mathcal{O}(2^{\|n\|})$

- **Nur für Zahlen mit kleinen Logarithmen**

- Suche nach Logarithmen muß auf Schranke  $B$  begrenzt werden
- Schranke jenseits von  $10^7$  wenig sinnvoll
- Anders als bei Faktorisierung sagt dies nichts über die Größe von  $n$  oder  $y$  aus

- **Keine Optimierungen wie bei Faktorisierung**

- Jede Zahl könnte der geeignete Logarithmus sein
- Man kann wenig über Struktur von  $x$  sagen (z.B. ungerade)
- Außer  $n$  gibt es keine obere Grenze für  $x$

- **Beispiel für  $(\mathbb{Z}_p, \cdot)$  mit  $p = 944137$**

- $\log_2 3 = 467306$ ,  $\log_2 4 = 2$ ,  $\log_2 5 = 271379$ , ...

# SHANKS BABYSTEP-GIANTSTEP-ALGORITHMUS

- **Idee: Beschleunigung durch Zwischenspeicherung**
  - Zerlege das gesuchte  $x = \log_g y$  in  $x = q \cdot m + r$
  - Für diese Zerlegung gilt  $g^{q \cdot m + r} = y$  also  $(g^m)^q = y \cdot g^{-r}$
  - Teste diese Gleichung für alle Paare  $(q, r)$  um  $x$  zu bestimmen

# SHANKS BABYSTEP-GIANTSTEP-ALGORITHMUS

- **Idee: Beschleunigung durch Zwischenspeicherung**
  - Zerlege das gesuchte  $x = \log_g y$  in  $x = q \cdot m + r$
  - Für diese Zerlegung gilt  $g^{q \cdot m + r} = y$  also  $(g^m)^q = y \cdot g^{-r}$
  - Teste diese Gleichung für alle Paare  $(q, r)$  um  $x$  zu bestimmen
  - Die Werte  $y \cdot g^{-r}$  und  $(g^m)^q$  können separat berechnet werden
  - Für  $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  müssen nur  $2 \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  Werte berechnet werden

# SHANKS BABYSTEP-GIANTSTEP-ALGORITHMUS

- **Idee: Beschleunigung durch Zwischenspeicherung**
  - Zerlege das gesuchte  $x = \log_g y$  in  $x = q \cdot m + r$
  - Für diese Zerlegung gilt  $g^{q \cdot m + r} = y$  also  $(g^m)^q = y \cdot g^{-r}$
  - Teste diese Gleichung für alle Paare  $(q, r)$  um  $x$  zu bestimmen
  - Die Werte  $y \cdot g^{-r}$  und  $(g^m)^q$  können separat berechnet werden
  - Für  $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  müssen nur  $2 \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  Werte berechnet werden
- **Algorithmus**
  - **Babystep**: Speichere für  $r < m$  die Werte  $(y \cdot g^{-r}, r)$  in einer Tabelle  $B$
  - **Giantstep**: Für  $q = 0, 1, 2, \dots$  prüfe, ob  $(g^m)^q$  in  $B$  vorkommt
  - Im Erfolgsfall gebe  $x = q \cdot m + r$  als Lösung für  $\log_g y$  aus

# SHANKS BABYSTEP-GIANTSTEP-ALGORITHMUS

- **Idee: Beschleunigung durch Zwischenspeicherung**

- Zerlege das gesuchte  $x = \log_g y$  in  $x = q \cdot m + r$
- Für diese Zerlegung gilt  $g^{q \cdot m + r} = y$  also  $(g^m)^q = y \cdot g^{-r}$
- Teste diese Gleichung für alle Paare  $(q, r)$  um  $x$  zu bestimmen
- Die Werte  $y \cdot g^{-r}$  und  $(g^m)^q$  können separat berechnet werden
- Für  $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  müssen nur  $2 \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  Werte berechnet werden

- **Algorithmus**

- **Babystep**: Speichere für  $r < m$  die Werte  $(y \cdot g^{-r}, r)$  in einer Tabelle  $B$
- **Giantstep**: Für  $q = 0, 1, 2, \dots$  prüfe, ob  $(g^m)^q$  in  $B$  vorkommt
- Im Erfolgsfall gebe  $x = q \cdot m + r$  als Lösung für  $\log_g y$  aus

- **Komplexität**

- Je eine Multiplikation für Berechnung eines  $y \cdot g^{-r}$  bzw. eines  $(g^m)^q$
- Bei Hashtabellen konstante Zeit für Test, ob  $(g^m)^q$  in  $B$  vorkommt
- Maximal  $m$  Baby- und Giantsteps erforderlich

# SHANKS BABYSTEP-GIANTSTEP-ALGORITHMUS

## ● Idee: Beschleunigung durch Zwischenspeicherung

- Zerlege das gesuchte  $x = \log_g y$  in  $x = q \cdot m + r$
- Für diese Zerlegung gilt  $g^{q \cdot m + r} = y$  also  $(g^m)^q = y \cdot g^{-r}$
- Teste diese Gleichung für alle Paare  $(q, r)$  um  $x$  zu bestimmen
- Die Werte  $y \cdot g^{-r}$  und  $(g^m)^q$  können separat berechnet werden
- Für  $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  müssen nur  $2 \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  Werte berechnet werden

## ● Algorithmus

- **Babystep**: Speichere für  $r < m$  die Werte  $(y \cdot g^{-r}, r)$  in einer Tabelle  $B$
- **Giantstep**: Für  $q = 0, 1, 2, \dots$  prüfe, ob  $(g^m)^q$  in  $B$  vorkommt
- Im Erfolgsfall gebe  $x = q \cdot m + r$  als Lösung für  $\log_g y$  aus

## ● Komplexität

- Je eine Multiplikation für Berechnung eines  $y \cdot g^{-r}$  bzw. eines  $(g^m)^q$
- Bei Hashtabellen konstante Zeit für Test, ob  $(g^m)^q$  in  $B$  vorkommt
- Maximal  $m$  Baby- und Giantsteps erforderlich
- **Laufzeit**  $\mathcal{O}(\sqrt{n}) = \mathcal{O}(2^{\lceil n \rceil / 2})$       **Speicherbedarf**  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$

# SHANKS ALGORITHMUS AM BEISPIEL

Bestimme  $\log_3 5$  in  $(\mathbb{Z}_{3137}, \cdot)$

# SHANKS ALGORITHMUS AM BEISPIEL

Bestimme  $\log_3 5$  in  $(\mathbb{Z}_{3137}, \cdot)$

- **Berechne Initialwerte**

–  $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 56$ ,  $g^{-1} = 3^{-1} \bmod 3137 = 1046$ ,  $g^m = 893$



# SHANKS ALGORITHMUS AM BEISPIEL

Bestimme  $\log_3 5$  in  $(\mathbb{Z}_{3137}, \cdot)$

- **Berechne Initialwerte**

- $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 56$ ,  $g^{-1} = 3^{-1} \bmod 3137 = 1046$ ,  $g^m = 893$

- **Erzeuge Babystep-Tabelle  $B = [(y \cdot g^{-r}, r) \mid r < m]$**

- $B = [(5, 0); (2093, 1); (2789, 2); (3021, 3); (1007, 4); \dots (541, 55)]$

# SHANKS ALGORITHMUS AM BEISPIEL

Bestimme  $\log_3 5$  in  $(\mathbb{Z}_{3137}, \cdot)$

- **Berechne Initialwerte**

- $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 56$ ,  $g^{-1} = 3^{-1} \bmod 3137 = 1046$ ,  $g^m = 893$

- **Erzeuge Babystep-Tabelle  $B = [(y \cdot g^{-r}, r) \mid r < m]$**

- $B = [(5, 0); (2093, 1); (2789, 2); (3021, 3); (1007, 4); \dots (541, 55)]$

- Sortiert:  $[(5, 0); (92, 17); (146, 35); (226, 26); (276, 16); (394, 43); (397, 12); (409, 41); (436, 10); (438, 34); (518, 48); (541, 55); (544, 39); (678, 25); (787, 8); (805, 32); (809, 6); (828, 15); (971, 30); (1007, 4); (1121, 27); (1177, 44); (1178, 13); (1182, 42); (1191, 11); (1227, 40); (1308, 9); (1314, 33); (1438, 45); (1525, 46); (1554, 47); (1589, 21); (1623, 54); (1630, 20); (1632, 38); (1732, 53); (1753, 19); (1759, 37); (2034, 24); (2059, 52); (2093, 1); (2122, 18); (2140, 36); (2264, 49); (2361, 7); (2415, 31); (2427, 5); (2465, 28); (2484, 14); (2621, 22); (2789, 2); (2846, 50); (2913, 29); (2965, 23); (3021, 3); (3040, 51)]$

# SHANKS ALGORITHMUS AM BEISPIEL

Bestimme  $\log_3 5$  in  $(\mathbb{Z}_{3137}, \cdot)$

- **Berechne Initialwerte**

- $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 56$ ,  $g^{-1} = 3^{-1} \bmod 3137 = 1046$ ,  $g^m = 893$

- **Erzeuge Babystep-Tabelle  $B = [(y \cdot g^{-r}, r) \mid r < m]$**

- $B = [(5, 0); (2093, 1); (2789, 2); (3021, 3); (1007, 4); \dots (541, 55)]$

- Sortiert: [(5, 0); (92, 17); (146, 35); (226, 26); (276, 16); (394, 43); (397, 12); (409, 41); (436, 10); (438, 34); (518, 48); (541, 55); (544, 39); (678, 25); (787, 8); (805, 32); (809, 6); (828, 15); (971, 30); (1007, 4); (1121, 27); (1177, 44); (1178, 13); (1182, 42); (1191, 11); (1227, 40); (1308, 9); (1314, 33); (1438, 45); (1525, 46); (1554, 47); (1589, 21); (1623, 54); (1630, 20); (1632, 38); (1732, 53); (1753, 19); (1759, 37); (2034, 24); (2059, 52); (2093, 1); (2122, 18); (2140, 36); (2264, 49); (2361, 7); (2415, 31); (2427, 5); (2465, 28); (2484, 14); (2621, 22); (2789, 2); (2846, 50); (2913, 29); (2965, 23); (3021, 3); (3040, 51)]

- **Berechne Giantstep Werte  $(g^m)^q$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$**

- 1; 893; 651; 998; 306; 339; 1575; 1099; 2663; 213; 1989; 635; 2395; 2438; 56; 2953; 1949; 2559; 1451; 162; 364; 1941; 1689; 2517; 1589

# SHANKS ALGORITHMUS AM BEISPIEL

Bestimme  $\log_3 5$  in  $(\mathbb{Z}_{3137}, \cdot)$

- **Berechne Initialwerte**

- $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 56$ ,  $g^{-1} = 3^{-1} \bmod 3137 = 1046$ ,  $g^m = 893$

- **Erzeuge Babystep-Tabelle  $B = [(y \cdot g^{-r}, r) \mid r < m]$**

- $B = [(5, 0); (2093, 1); (2789, 2); (3021, 3); (1007, 4); \dots (541, 55)]$

- Sortiert: [(5, 0); (92, 17); (146, 35); (226, 26); (276, 16); (394, 43); (397, 12); (409, 41); (436, 10); (438, 34); (518, 48); (541, 55); (544, 39); (678, 25); (787, 8); (805, 32); (809, 6); (828, 15); (971, 30); (1007, 4); (1121, 27); (1177, 44); (1178, 13); (1182, 42); (1191, 11); (1227, 40); (1308, 9); (1314, 33); (1438, 45); (1525, 46); (1554, 47); (1589, 21); (1623, 54); (1630, 20); (1632, 38); (1732, 53); (1753, 19); (1759, 37); (2034, 24); (2059, 52); (2093, 1); (2122, 18); (2140, 36); (2264, 49); (2361, 7); (2415, 31); (2427, 5); (2465, 28); (2484, 14); (2621, 22); (2789, 2); (2846, 50); (2913, 29); (2965, 23); (3021, 3); (3040, 51)]

- **Berechne Giantstep Werte  $(g^m)^q$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots$**

- 1; 893; 651; 998; 306; 339; 1575; 1099; 2663; 213; 1989; 635; 2395; 2438; 56; 2953; 1949; 2559; 1451; 162; 364; 1941; 1689; 2517; 1589

- Treffer (1589, 21) für  $q = 24$  liefert  $x = 24 \cdot 56 + 21 = 1365$

# POLLARD $\rho$ ALGORITHMUS

## ● Modifikation der Pollard $\rho$ Faktorisierung

- Suche  $a \neq a', b \neq b' \in \mathbb{Z}_n$  mit  $g^a \cdot y^b = g^{a'} \cdot y^{b'}$
- Ist  $x = \log_g y$  in  $G$  so gilt  $g^a \cdot g^{x \cdot b} = g^{a'} \cdot g^{x \cdot b'}$  also  $g^{a+x \cdot b} = g^{a'+x \cdot b'}$   
somit  $a+x \cdot b \equiv a'+x \cdot b' \pmod{n}$  bzw.  $(a-a') \equiv x \cdot (b'-b) \pmod{n}$

# POLLARD $\rho$ ALGORITHMUS

## ● Modifikation der Pollard $\rho$ Faktorisierung

- Suche  $a \neq a', b \neq b' \in \mathbb{Z}_n$  mit  $g^a \cdot y^b = g^{a'} \cdot y^{b'}$
- Ist  $x = \log_g y$  in  $G$  so gilt  $g^a \cdot g^{x \cdot b} = g^{a'} \cdot g^{x \cdot b'}$  also  $g^{a+x \cdot b} = g^{a'+x \cdot b'}$   
somit  $a+x \cdot b \equiv a'+x \cdot b' \pmod{n}$  bzw.  $(a-a') \equiv x \cdot (b'-b) \pmod{n}$
- Damit ist  $x = (a-a')(b'-b)^{-1} \pmod{n}$  falls  $\gcd(b'-b, n)=1$

# POLLARD $\rho$ ALGORITHMUS

## ● Modifikation der Pollard $\rho$ Faktorisierung

- Suche  $a \neq a', b \neq b' \in \mathbb{Z}_n$  mit  $g^a \cdot y^b = g^{a'} \cdot y^{b'}$
- Ist  $x = \log_g y$  in  $G$  so gilt  $g^a \cdot g^{x \cdot b} = g^{a'} \cdot g^{x \cdot b'}$  also  $g^{a+x \cdot b} = g^{a'+x \cdot b'}$   
somit  $a+x \cdot b \equiv a'+x \cdot b' \pmod{n}$  bzw.  $(a-a') \equiv x \cdot (b'-b) \pmod{n}$
- Damit ist  $x = (a-a')(b'-b)^{-1} \pmod{n}$  falls  $\gcd(b'-b, n)=1$
- Bei Erzeugung einer Zufallsfolge mit  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  Elementen findet man diese Kollision mit Wahrscheinlichkeit 50% (Geburtstagsparadox)

# POLLARD $\rho$ ALGORITHMUS

## ● Modifikation der Pollard $\rho$ Faktorisierung

- Suche  $a \neq a', b \neq b' \in \mathbb{Z}_n$  mit  $g^a \cdot y^b = g^{a'} \cdot y^{b'}$
- Ist  $x = \log_g y$  in  $G$  so gilt  $g^a \cdot g^{x \cdot b} = g^{a'} \cdot g^{x \cdot b'}$  also  $g^{a+x \cdot b} = g^{a'+x \cdot b'}$   
somit  $a+x \cdot b \equiv a'+x \cdot b' \pmod{n}$  bzw.  $(a-a') \equiv x \cdot (b'-b) \pmod{n}$
- Damit ist  $x = (a-a')(b'-b)^{-1} \pmod{n}$  falls  $\gcd(b'-b, n)=1$
- Bei Erzeugung einer Zufallsfolge mit  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  Elementen findet man diese Kollision mit Wahrscheinlichkeit 50% (Geburtstagsparadox)

## ● Erzeuge und prüfe Zufallskandidaten

- Berechne Folge  $(\beta_1, a_1, b_1), (\beta_2, a_2, b_2) \dots$  mit  $\beta_i = g^{a_i} \cdot y^{b_i}$   
und  $(\beta_{i+1}, a_{i+1}, b_{i+1}) = f(\beta_i, a_i, b_i)$  für eine “Zufallsfunktion”  $f$
- Gilt  $\beta_i = \beta_j$  für ein  $i < j$ , dann auch  $\beta_{i+1} = \beta_{j+1}$  also  $\beta_{i+k} = \beta_{j+k}$   
für alle  $k$  Folge der  $\beta_k$  läuft in eine Schleife, was aussieht wie ein  $\rho$
- Hat die Schleife die Länge  $l = j-i$ , so gibt es ein  $k \in \{i..j-1\}$ ,  
das Vielfaches von  $l$  ist. Für dieses  $k$  gilt  $\beta_k = \beta_{2k}$



# POLLARD $\rho$ ALGORITHMUS

## ● Modifikation der Pollard $\rho$ Faktorisierung

- Suche  $a \neq a', b \neq b' \in \mathbb{Z}_n$  mit  $g^a \cdot y^b = g^{a'} \cdot y^{b'}$
- Ist  $x = \log_g y$  in  $G$  so gilt  $g^a \cdot g^{x \cdot b} = g^{a'} \cdot g^{x \cdot b'}$  also  $g^{a+x \cdot b} = g^{a'+x \cdot b'}$   
somit  $a+x \cdot b \equiv a'+x \cdot b' \pmod{n}$  bzw.  $(a-a') \equiv x \cdot (b'-b) \pmod{n}$
- Damit ist  $x = (a-a')(b'-b)^{-1} \pmod{n}$  falls  $\gcd(b'-b, n)=1$
- Bei Erzeugung einer Zufallsfolge mit  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  Elementen findet man diese Kollision mit Wahrscheinlichkeit 50% (Geburtstagsparadox)

## ● Erzeuge und prüfe Zufallskandidaten

- Berechne Folge  $(\beta_1, a_1, b_1), (\beta_2, a_2, b_2) \dots$  mit  $\beta_i = g^{a_i} \cdot y^{b_i}$   
und  $(\beta_{i+1}, a_{i+1}, b_{i+1}) = f(\beta_i, a_i, b_i)$  für eine “Zufallsfunktion”  $f$
- Gilt  $\beta_i = \beta_j$  für ein  $i < j$ , dann auch  $\beta_{i+1} = \beta_{j+1}$  also  $\beta_{i+k} = \beta_{j+k}$   
für alle  $k$  Folge der  $\beta_k$  läuft in eine Schleife, was aussieht wie ein  $\rho$
- Hat die Schleife die Länge  $l = j-i$ , so gibt es ein  $k \in \{i..j-1\}$ ,  
das Vielfaches von  $l$  ist. Für dieses  $k$  gilt  $\beta_k = \beta_{2k}$

## ● Einfaches Suchverfahren

- In Schritt  $k$  bestimme  $\beta_k, \beta_{2k}$  bis Werte gleich sind und berechne  $x$

## POLLARD $\rho$ IM DETAIL

- Wahl der “Zufallsfunktion”  $f$

- Teile Gruppe  $G$  in drei gleich große Teilgruppen  $G_1, G_2, G_3$  auf

- Definiere  $f(\beta, a, b) := \begin{cases} (\beta \cdot g, a +_n 1, b) & \text{falls } \beta \in G_1 \\ (\beta^2, 2 \cdot_n a, 2 \cdot_n b) & \text{falls } \beta \in G_2 \\ (\beta \cdot y, a, b +_n 1) & \text{falls } \beta \in G_3 \end{cases}$

## POLLARD $\rho$ IM DETAIL

- Wahl der “Zufallsfunktion”  $f$ 
  - Teile Gruppe  $G$  in drei gleich große Teilgruppen  $G_1, G_2, G_3$  auf
  - Definiere  $f(\beta, a, b) := \begin{cases} (\beta \cdot g, a +_n 1, b) & \text{falls } \beta \in G_1 \\ (\beta^2, 2 \cdot_n a, 2 \cdot_n b) & \text{falls } \beta \in G_2 \\ (\beta \cdot y, a, b +_n 1) & \text{falls } \beta \in G_3 \end{cases}$
  - Per Konstruktion erhält  $f$  die Eigenschaft  $\beta = g^a \cdot y^b$

## POLLARD $\rho$ IM DETAIL

- **Wahl der “Zufallsfunktion”  $f$**

- Teile Gruppe  $G$  in drei gleich große Teilgruppen  $G_1, G_2, G_3$  auf

- Definiere  $f(\beta, a, b) := \begin{cases} (\beta \cdot g, a +_n 1, b) & \text{falls } \beta \in G_1 \\ (\beta^2, 2 \cdot_n a, 2 \cdot_n b) & \text{falls } \beta \in G_2 \\ (\beta \cdot y, a, b +_n 1) & \text{falls } \beta \in G_3 \end{cases}$

- Per Konstruktion erhält  $f$  die Eigenschaft  $\beta = g^a \cdot y^b$

- **Konstruktion der  $(\beta_i, a_i, b_i)$**

- Definiere  $(\beta_0, a_0, b_0) = (1, 0, 0)$  und  $(\beta_{i+1}, a_{i+1}, b_{i+1}) = f(\beta_i, a_i, b_i)$

- Dann gilt  $\beta_i = g^{a_i} \cdot y^{b_i}$  für alle  $i$

# POLLARD $\rho$ IM DETAIL

- **Wahl der “Zufallsfunktion”  $f$**

- Teile Gruppe  $G$  in drei gleich große Teilgruppen  $G_1, G_2, G_3$  auf

- Definiere  $f(\beta, a, b) := \begin{cases} (\beta \cdot g, a +_n 1, b) & \text{falls } \beta \in G_1 \\ (\beta^2, 2 \cdot_n a, 2 \cdot_n b) & \text{falls } \beta \in G_2 \\ (\beta \cdot y, a, b +_n 1) & \text{falls } \beta \in G_3 \end{cases}$

- Per Konstruktion erhält  $f$  die Eigenschaft  $\beta = g^a \cdot y^b$

- **Konstruktion der  $(\beta_i, a_i, b_i)$**

- Definiere  $(\beta_0, a_0, b_0) = (1, 0, 0)$  und  $(\beta_{i+1}, a_{i+1}, b_{i+1}) = f(\beta_i, a_i, b_i)$

- Dann gilt  $\beta_i = g^{a_i} \cdot y^{b_i}$  für alle  $i$

- **Suchverfahren**

- In Schritt  $k$  bestimme  $(\beta_k, a_k, b_k)$  und  $(\beta_{2k}, a_{2k}, b_{2k})$  bis  $\beta_k = \beta_{2k}$

- Ist  $\gcd(b_{2k} - b_k, n) = 1$  so berechne  $x = (a_k -_n a_{2k})(b_{2k} -_n b_k)^{-1} \bmod n$

- Ansonsten breche ohne Erfolg ab

# POLLARD $\rho$ IM DETAIL

- **Wahl der “Zufallsfunktion”  $f$**

- Teile Gruppe  $G$  in drei gleich große Teilgruppen  $G_1, G_2, G_3$  auf
- Definiere  $f(\beta, a, b) := \begin{cases} (\beta \cdot g, a +_n 1, b) & \text{falls } \beta \in G_1 \\ (\beta^2, 2 \cdot_n a, 2 \cdot_n b) & \text{falls } \beta \in G_2 \\ (\beta \cdot y, a, b +_n 1) & \text{falls } \beta \in G_3 \end{cases}$
- Per Konstruktion erhält  $f$  die Eigenschaft  $\beta = g^a \cdot y^b$

- **Konstruktion der  $(\beta_i, a_i, b_i)$**

- Definiere  $(\beta_0, a_0, b_0) = (1, 0, 0)$  und  $(\beta_{i+1}, a_{i+1}, b_{i+1}) = f(\beta_i, a_i, b_i)$
- Dann gilt  $\beta_i = g^{a_i} \cdot y^{b_i}$  für alle  $i$

- **Suchverfahren**

- In Schritt  $k$  bestimme  $(\beta_k, a_k, b_k)$  und  $(\beta_{2k}, a_{2k}, b_{2k})$  bis  $\beta_k = \beta_{2k}$
- Ist  $\gcd(b_{2k} - b_k, n) = 1$  so berechne  $x = (a_k -_n a_{2k})(b_{2k} -_m b_k)^{-1} \bmod n$
- Ansonsten breche ohne Erfolg ab

**Laufzeit  $\mathcal{O}(\sqrt{n}) = \mathcal{O}(2^{\lceil n \rceil / 2})$**

**konstanter Speicherbedarf**

## POLLARD $\rho$ : ABLAUFBEISPIEL

### ● Trace der Berechnung von $\log_{89} 618$ in $\mathbb{Z}_{809}$

- Ordnung von  $g = 89$  in  $(\mathbb{Z}_{809}^*, \cdot)$  ist  $n = 101$
- Wähle  $G_{1/2/3} = \{g \leq 808 \mid g \equiv 1/0/2 \pmod{3}\}$

Schleife 1.	$\beta = 618$	$a = 0$	$b = 1$	$\beta' = 76$	$a' = 0$	$b' = 2$
Schleife 2.	$\beta = 76$	$a = 0$	$b = 2$	$\beta' = 113$	$a' = 0$	$b' = 4$
Schleife 3.	$\beta = 46$	$a = 0$	$b = 3$	$\beta' = 488$	$a' = 1$	$b' = 5$
Schleife 4.	$\beta = 113$	$a = 0$	$b = 4$	$\beta' = 605$	$a' = 4$	$b' = 10$
Schleife 5.	$\beta = 349$	$a = 1$	$b = 4$	$\beta' = 422$	$a' = 5$	$b' = 11$
Schleife 6.	$\beta = 488$	$a = 1$	$b = 5$	$\beta' = 683$	$a' = 7$	$b' = 11$
Schleife 7.	$\beta = 555$	$a = 2$	$b = 5$	$\beta' = 451$	$a' = 8$	$b' = 12$
Schleife 8.	$\beta = 605$	$a = 4$	$b = 10$	$\beta' = 344$	$a' = 9$	$b' = 13$
Schleife 9.	$\beta = 451$	$a = 5$	$b = 10$	$\beta' = 112$	$a' = 11$	$b' = 13$
Schleife 10.	$\beta = 422$	$a = 5$	$b = 11$	$\beta' = 422$	$a' = 11$	$b' = 15$

- Resultat:  $x = (a -_n a')(b' -_n b)^{-1} = 95 \cdot_n 4^{-1} = 95 \cdot_n 76 = 49$

# POLLARD $\rho$ : ABLAUFBEISPIEL

## ● Trace der Berechnung von $\log_{89} 618$ in $\mathbb{Z}_{809}$

- Ordnung von  $g = 89$  in  $(\mathbb{Z}_{809}^*, \cdot)$  ist  $n = 101$
- Wähle  $G_{1/2/3} = \{g \leq 808 \mid g \equiv 1/0/2 \pmod{3}\}$

Schleife 1.	$\beta = 618$	$a = 0$	$b = 1$	$\beta' = 76$	$a' = 0$	$b' = 2$
Schleife 2.	$\beta = 76$	$a = 0$	$b = 2$	$\beta' = 113$	$a' = 0$	$b' = 4$
Schleife 3.	$\beta = 46$	$a = 0$	$b = 3$	$\beta' = 488$	$a' = 1$	$b' = 5$
Schleife 4.	$\beta = 113$	$a = 0$	$b = 4$	$\beta' = 605$	$a' = 4$	$b' = 10$
Schleife 5.	$\beta = 349$	$a = 1$	$b = 4$	$\beta' = 422$	$a' = 5$	$b' = 11$
Schleife 6.	$\beta = 488$	$a = 1$	$b = 5$	$\beta' = 683$	$a' = 7$	$b' = 11$
Schleife 7.	$\beta = 555$	$a = 2$	$b = 5$	$\beta' = 451$	$a' = 8$	$b' = 12$
Schleife 8.	$\beta = 605$	$a = 4$	$b = 10$	$\beta' = 344$	$a' = 9$	$b' = 13$
Schleife 9.	$\beta = 451$	$a = 5$	$b = 10$	$\beta' = 112$	$a' = 11$	$b' = 13$
Schleife 10.	$\beta = 422$	$a = 5$	$b = 11$	$\beta' = 422$	$a' = 11$	$b' = 15$

- Resultat:  $x = (a -_n a')(b' -_n b)^{-1} = 95 \cdot_n 4^{-1} = 95 \cdot_n 76 = 49$

## ● Erweiterung des Algorithmus

- Originalverfahren bricht ab, wenn  $\gcd(b_{2k} - b_k, n) \neq 1$
- Kongruenz  $(a_k - a_{2k}) \equiv x \cdot (b_{2k} - b_k) \pmod{n}$  hat  $d$  mögliche Lösungen  $x_i$  wenn  $d = \gcd(b_{2k} - b_k, n) > 1$
- Für kleine  $d$  kann man für alle  $x_i$  prüfen, ob  $g^{x_i} = y$  ist



# DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (I)

Wenn die Faktorisierung von  $n = |G|$  bekannt ist

# DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (I)

Wenn die Faktorisierung von  $n = |G|$  bekannt ist

- **Bestimme Logarithmen in Untergruppen von  $G$** 
  - Sei  $n = |G| = \prod_{p|n} p^{e_p}$  und  $x = \log_g y$
  - Für jedes  $p$  setze  $n_p = n/p^{e_p}$ ,  $g_p = g^{n_p}$ ,  $y_p = y^{n_p}$

# DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (I)

Wenn die Faktorisierung von  $n = |G|$  bekannt ist

- **Bestimme Logarithmen in Untergruppen von  $G$**

- Sei  $n = |G| = \prod_{p|n} p^{e_p}$  und  $x = \log_g y$
- Für jedes  $p$  setze  $n_p = n/p^{e_p}$ ,  $g_p = g^{n_p}$ ,  $y_p = y^{n_p}$
- Dann ist  $p^{e_p}$  die Ordnung von  $g_p$  und es gilt  $g_p^x = g^{n_p \cdot x} = y^{n_p} = y_p$   
also existiert der diskrete Logarithmus  $x_p = \log_{g_p} y_p$

# DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (I)

Wenn die Faktorisierung von  $n = |G|$  bekannt ist

- **Bestimme Logarithmen in Untergruppen von  $G$** 
  - Sei  $n = |G| = \prod_{p|n} p^{e_p}$  und  $x = \log_g y$
  - Für jedes  $p$  setze  $n_p = n/p^{e_p}$ ,  $g_p = g^{n_p}$ ,  $y_p = y^{n_p}$
  - Dann ist  $p^{e_p}$  die Ordnung von  $g_p$  und es gilt  $g_p^x = g^{n_p \cdot x} = y^{n_p} = y_p$   
also existiert der diskrete Logarithmus  $x_p = \log_{g_p} y_p$
  - **Berechne alle  $x_p$  mit dem Shanks- oder dem Pollard  $\rho$  Algorithmus**

# DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (I)

Wenn die Faktorisierung von  $n = |G|$  bekannt ist

- **Bestimme Logarithmen in Untergruppen von  $G$**

- Sei  $n = |G| = \prod_{p|n} p^{e_p}$  und  $x = \log_g y$
- Für jedes  $p$  setze  $n_p = n/p^{e_p}$ ,  $g_p = g^{n_p}$ ,  $y_p = y^{n_p}$
- Dann ist  $p^{e_p}$  die Ordnung von  $g_p$  und es gilt  $g_p^x = g^{n_p \cdot x} = y^{n_p} = y_p$   
also existiert der diskrete Logarithmus  $x_p = \log_{g_p} y_p$
- Berechne alle  $x_p$  mit dem Shanks- oder dem Pollard  $\rho$  Algorithmus

- **Berechne  $x = \log_g y$  aus den Komponenten**

Satz: Gilt  $x \equiv \log_{g_p} y_p \pmod{p^{e_p}}$  für alle  $p$ , dann ist  $x = \log_g y$

Beweis: Es gilt  $(g^{-x} \cdot y)^{n_p} = (g^{n_p})^{-x} \cdot y^{n_p} = g_p^{-x_p} \cdot y_p = 1$

für alle Primteiler  $p$  von  $n$ . Also ist die Ordnung von  $g^{-x} \cdot y$  (in  $G$ ) ein Teiler von allen  $n_p$ . Da 1 der größte gemeinsame Teiler aller  $n_p$  ist, gilt  $g^{-x} \cdot y \equiv 1 \pmod{n}$  also  $g^x \equiv y \pmod{n}$

# DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (I)

Wenn die Faktorisierung von  $n = |G|$  bekannt ist

## ● Bestimme Logarithmen in Untergruppen von $G$

- Sei  $n = |G| = \prod_{p|n} p^{e_p}$  und  $x = \log_g y$
- Für jedes  $p$  setze  $n_p = n/p^{e_p}$ ,  $g_p = g^{n_p}$ ,  $y_p = y^{n_p}$
- Dann ist  $p^{e_p}$  die Ordnung von  $g_p$  und es gilt  $g_p^x = g^{n_p \cdot x} = y^{n_p} = y_p$   
also existiert der diskrete Logarithmus  $x_p = \log_{g_p} y_p$
- Berechne alle  $x_p$  mit dem Shanks- oder dem Pollard  $\rho$  Algorithmus

## ● Berechne $x = \log_g y$ aus den Komponenten

Satz: Gilt  $x \equiv \log_{g_p} y_p \pmod{p^{e_p}}$  für alle  $p$ , dann ist  $x = \log_g y$

Beweis: Es gilt  $(g^{-x} \cdot y)^{n_p} = (g^{n_p})^{-x} \cdot y^{n_p} = g_p^{-x_p} \cdot y_p = 1$

für alle Primteiler  $p$  von  $n$ . Also ist die Ordnung von  $g^{-x} \cdot y$  (in  $G$ ) ein Teiler von allen  $n_p$ . Da 1 der größte gemeinsame Teiler aller  $n_p$  ist, gilt  $g^{-x} \cdot y \equiv 1 \pmod{n}$  also  $g^x \equiv y \pmod{n}$

- Berechne  $x = \log_g y$  aus allen  $x_p$  mit dem chinesischem Restsatz

# DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (I)

Wenn die Faktorisierung von  $n = |G|$  bekannt ist

## ● Bestimme Logarithmen in Untergruppen von $G$

- Sei  $n = |G| = \prod_{p|n} p^{e_p}$  und  $x = \log_g y$
- Für jedes  $p$  setze  $n_p = n/p^{e_p}$ ,  $g_p = g^{n_p}$ ,  $y_p = y^{n_p}$
- Dann ist  $p^{e_p}$  die Ordnung von  $g_p$  und es gilt  $g_p^x = g^{n_p \cdot x} = y^{n_p} = y_p$   
also existiert der diskrete Logarithmus  $x_p = \log_{g_p} y_p$
- Berechne alle  $x_p$  mit dem Shanks- oder dem Pollard  $\rho$  Algorithmus

## ● Berechne $x = \log_g y$ aus den Komponenten

Satz: Gilt  $x \equiv \log_{g_p} y_p \pmod{p^{e_p}}$  für alle  $p$ , dann ist  $x = \log_g y$

Beweis: Es gilt  $(g^{-x} \cdot y)^{n_p} = (g^{n_p})^{-x} \cdot y^{n_p} = g_p^{-x_p} \cdot y_p = 1$

für alle Primteiler  $p$  von  $n$ . Also ist die Ordnung von  $g^{-x} \cdot y$  (in  $G$ ) ein Teiler von allen  $n_p$ . Da 1 der größte gemeinsame Teiler aller  $n_p$  ist, gilt  $g^{-x} \cdot y \equiv 1 \pmod{n}$  also  $g^x \equiv y \pmod{n}$

- Berechne  $x = \log_g y$  aus allen  $x_p$  mit dem chinesischem Restsatz

Gesamtlaufzeit  $\mathcal{O}(\sum_{p|n} \sqrt{p^{e_p}})$  konstanter Speicherbedarf

## DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (II)

### ● Vereinfache Darstellung von $x_p = \log_{g_p} y_p$

Der Übersichtlichkeit halber wird der Index  $p$  im folgenden fallen gelassen

- Wegen  $x < p^e$  gilt  $x = \sum_{i < e} x_i p^i$  für bestimmte Koeffizienten  $x_i$
- Folglich ist  $y^{p^{e-1}} = g^{x \cdot p^{e-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_0} \cdot (g^{p^e})^{\sum_{0 < i < e} x_i p^{i-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_0}$   
da  $p^e$  die Ordnung von  $g$  ist
- Da  $g_* = g^{p^{e-1}}$  die Ordnung  $p$  hat, kann  $x_0 = \log_{g_*} y^{p^{e-1}}$  in einer Gruppe der Ordnung  $p$  in der Laufzeit  $\mathcal{O}(\sqrt{p})$  berechnet werden



## DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (II)

### ● Vereinfache Darstellung von $x_p = \log_{g_p} y_p$

Der Übersichtlichkeit halber wird der Index  $p$  im folgenden fallen gelassen

- Wegen  $x < p^e$  gilt  $x = \sum_{i < e} x_i p^i$  für bestimmte Koeffizienten  $x_i$
- Folglich ist  $y^{p^{e-1}} = g^{x \cdot p^{e-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_0} \cdot (g^{p^e})^{\sum_{0 < i < e} x_i p^{i-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_0}$   
da  $p^e$  die Ordnung von  $g$  ist
- Da  $g_* = g^{p^{e-1}}$  die Ordnung  $p$  hat, kann  $x_0 = \log_{g_*} y^{p^{e-1}}$  in einer Gruppe der Ordnung  $p$  in der Laufzeit  $\mathcal{O}(\sqrt{p})$  berechnet werden

### ● Berechne Koeffizienten von $x_p$

- Berechne  $x_0$  mit dem Shanks- oder dem Pollard  $\rho$  Algorithmus
- Sind  $x_0, \dots, x_{k-1}$  bereits bestimmt, so gilt

$$\begin{aligned} y_k &= (y \cdot g^{-\sum_{i < k} x_i p^i})^{p^{e-k-1}} = (g^{\sum_{k \leq i < e} x_i p^i})^{p^{e-k-1}} = (g^{\sum_{i < e-k} x_i p^i})^{p^{e-1}} \\ &= (g^{p^{e-1}})^{x_k} \cdot (g^{p^e})^{\sum_{0 < i < e-k} x_i p^{i-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_k}, \text{ also } x_k = \log_{g_*} y_k \end{aligned}$$

Berechne  $x_k$  mit dem Shanks- oder dem Pollard  $\rho$  Algorithmus

# DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (II)

## ● Vereinfache Darstellung von $x_p = \log_{g_p} y_p$

Der Übersichtlichkeit halber wird der Index  $p$  im folgenden fallen gelassen

- Wegen  $x < p^e$  gilt  $x = \sum_{i < e} x_i p^i$  für bestimmte Koeffizienten  $x_i$
- Folglich ist  $y^{p^{e-1}} = g^{x \cdot p^{e-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_0} \cdot (g^{p^e})^{\sum_{0 < i < e} x_i p^{i-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_0}$   
da  $p^e$  die Ordnung von  $g$  ist
- Da  $g_* = g^{p^{e-1}}$  die Ordnung  $p$  hat, kann  $x_0 = \log_{g_*} y^{p^{e-1}}$  in einer Gruppe der Ordnung  $p$  in der Laufzeit  $\mathcal{O}(\sqrt{p})$  berechnet werden

## ● Berechne Koeffizienten von $x_p$

- Berechne  $x_0$  mit dem Shanks- oder dem Pollard  $\rho$  Algorithmus
- Sind  $x_0, \dots, x_{k-1}$  bereits bestimmt, so gilt

$$\begin{aligned} y_k &= (y \cdot g^{-\sum_{i < k} x_i p^i})^{p^{e-k-1}} = (g^{\sum_{k \leq i < e} x_i p^i})^{p^{e-k-1}} = (g^{\sum_{i < e-k} x_i p^i})^{p^{e-1}} \\ &= (g^{p^{e-1}})^{x_k} \cdot (g^{p^e})^{\sum_{0 < i < e-k} x_i p^{i-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_k}, \text{ also } x_k = \log_{g_*} y_k \end{aligned}$$

Berechne  $x_k$  mit dem Shanks- oder dem Pollard  $\rho$  Algorithmus

## ● Gesamtkomplexität

- Berechnung der Koeffizienten von  $x_p$  benötigt Laufzeit  $\mathcal{O}(e_p \cdot \sqrt{p})$
- Aufwand für chinesischen Restsatz vernachlässigbar

# DER POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS (II)

## ● Vereinfache Darstellung von $x_p = \log_{g_p} y_p$

Der Übersichtlichkeit halber wird der Index  $p$  im folgenden fallen gelassen

- Wegen  $x < p^e$  gilt  $x = \sum_{i < e} x_i p^i$  für bestimmte Koeffizienten  $x_i$
- Folglich ist  $y^{p^{e-1}} = g^{x \cdot p^{e-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_0} \cdot (g^{p^e})^{\sum_{0 < i < e} x_i p^{i-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_0}$   
da  $p^e$  die Ordnung von  $g$  ist
- Da  $g_* = g^{p^{e-1}}$  die Ordnung  $p$  hat, kann  $x_0 = \log_{g_*} y^{p^{e-1}}$  in einer Gruppe der Ordnung  $p$  in der Laufzeit  $\mathcal{O}(\sqrt{p})$  berechnet werden

## ● Berechne Koeffizienten von $x_p$

- Berechne  $x_0$  mit dem Shanks- oder dem Pollard  $\rho$  Algorithmus
- Sind  $x_0, \dots, x_{k-1}$  bereits bestimmt, so gilt

$$\begin{aligned} y_k &= (y \cdot g^{-\sum_{i < k} x_i p^i})^{p^{e-k-1}} = (g^{\sum_{k \leq i < e} x_i p^i})^{p^{e-k-1}} = (g^{\sum_{i < e-k} x_i p^i})^{p^{e-1}} \\ &= (g^{p^{e-1}})^{x_k} \cdot (g^{p^e})^{\sum_{0 < i < e-k} x_i p^{i-1}} = (g^{p^{e-1}})^{x_k}, \text{ also } x_k = \log_{g_*} y_k \end{aligned}$$

Berechne  $x_k$  mit dem Shanks- oder dem Pollard  $\rho$  Algorithmus

## ● Gesamtkomplexität

$$\mathcal{O}\left(\sum_{p|n} e_p \cdot \sqrt{p}\right)$$

- Berechnung der Koeffizienten von  $x_p$  benötigt Laufzeit  $\mathcal{O}(e_p \cdot \sqrt{p})$
- Aufwand für chinesischen Restsatz vernachlässigbar

# POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS FÜR $x = \log_5 3$ IN $\mathbb{Z}_{2017}$

## ● Reduktion auf Primzahlpotenzen

- Die Gruppenordnung ist  $n = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$
- Zu berechnen sind  $x_2 = \log_{5^63} 3^{63} = \log_{500} 913$ ,  
 $x_3 = \log_{5^{224}} 3^{224} = \log_{576} 1933$  und  $x_7 = \log_{5^{288}} 3^{288} = \log_{1879} 1879$

# POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS FÜR $x = \log_5 3$ IN $\mathbb{Z}_{2017}$

## ● Reduktion auf Primzahlpotenzen

- Die Gruppenordnung ist  $n = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$
- Zu berechnen sind  $x_2 = \log_{5^{63}} 3^{63} = \log_{500} 913$ ,  
 $x_3 = \log_{5^{224}} 3^{224} = \log_{576} 1933$  und  $x_7 = \log_{5^{288}} 3^{288} = \log_{1879} 1879$

## ● Berechnung von $x_2 = \sum_{i=0}^4 x_{2,i} 2^i$

- Es ist  $g_* = 500^{16} \bmod 2017 = 2016$  und  $913^{16} \bmod 2017 = 1$
- Damit ist  $x_{2,0} = \log_{2016} 1 = 0$
- Es ist  $y_{2,1} = (913 \cdot 500^0)^8 = 913^8 = 2016$  also  $x_{2,1} = \log_{2016} 2016 = 1$
- Es ist  $y_{2,2} = 1579^4 = 2016$  also  $x_{2,2} = \log_{2016} 2016 = 1$
- Es ist  $y_{2,3} = 1^2 = 1$  also  $x_{2,3} = \log_{2016} 1 = 0$
- Es ist  $y_{2,4} = 1$  also  $x_{2,4} = \log_{2016} 1 = 0$
- Insgesamt ergibt sich  $x_2 = 6$

# POHLIG-HELLMAN ALGORITHMUS FÜR $x = \log_5 3$ IN $\mathbb{Z}_{2017}$

## ● Reduktion auf Primzahlpotenzen

- Die Gruppenordnung ist  $n = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$
- Zu berechnen sind  $x_2 = \log_{5^{63}} 3^{63} = \log_{500} 913$ ,  
 $x_3 = \log_{5^{224}} 3^{224} = \log_{576} 1933$  und  $x_7 = \log_{5^{288}} 3^{288} = \log_{1879} 1879$

## ● Berechnung von $x_2 = \sum_{i=0}^4 x_{2,i} 2^i$

- Es ist  $g_* = 500^{16} \bmod 2017 = 2016$  und  $913^{16} \bmod 2017 = 1$
- Damit ist  $x_{2,0} = \log_{2016} 1 = 0$
- Es ist  $y_{2,1} = (913 \cdot 500^0)^8 = 913^8 = 2016$  also  $x_{2,1} = \log_{2016} 2016 = 1$
- Es ist  $y_{2,2} = 1579^4 = 2016$  also  $x_{2,2} = \log_{2016} 2016 = 1$
- Es ist  $y_{2,3} = 1^2 = 1$  also  $x_{2,3} = \log_{2016} 1 = 0$
- Es ist  $y_{2,4} = 1$  also  $x_{2,4} = \log_{2016} 1 = 0$
- Insgesamt ergibt sich  $x_2 = 6$

## ● Berechnung von $x$

- Analog ergibt sich  $x_3 = 4$  und  $x_7 = 1$
- Lösung der simultanen Kongruenzen  $x \equiv 6 \pmod{32}$ ,  $x \equiv 4 \pmod{9}$  und  $x \equiv 1 \pmod{7}$  ergibt  $x = 1030$

# DIE INDEX-CALCULUS METHODE

Verwandt mit Siebverfahren für Faktorisierung

# DIE INDEX-CALCULUS METHODE

## Verwandt mit Siebverfahren für Faktorisierung

### ● Einfache Grundidee

- Wähle eine Faktorbasis  $\mathcal{B} = \{p \text{ prim} \mid p \leq b\}$  für eine Zahl  $b$
- Bestimme diskrete Logarithmen  $x_p = \log_g p$  für alle Elemente von  $\mathcal{B}$
- Suche Exponenten  $a < n$  für die  $y \cdot g^a$   $b$ -glatt ist (d.h.  $y \cdot g^a = \prod_{p \in \mathcal{B}} p^{e_p}$ )
- Dann ist  $y \cdot g^a \equiv \prod_{p \in \mathcal{B}} (g^{x_p})^{e_p} \equiv g^{\sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_p} \pmod{n}$   
also  $x = \log_g y \equiv \sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_p - a \pmod{\varphi(n)}$



# DIE INDEX-CALCULUS METHODE

## Verwandt mit Siebverfahren für Faktorisierung

### ● Einfache Grundidee

- Wähle eine Faktorbasis  $\mathcal{B} = \{p \text{ prim} \mid p \leq b\}$  für eine Zahl  $b$
- Bestimme diskrete Logarithmen  $x_p = \log_g p$  für alle Elemente von  $\mathcal{B}$
- Suche Exponenten  $a < n$  für die  $y \cdot g^a$   $b$ -glatt ist (d.h.  $y \cdot g^a = \prod_{p \in \mathcal{B}} p^{e_p}$ )
- Dann ist  $y \cdot g^a \equiv \prod_{p \in \mathcal{B}} (g^{x_p})^{e_p} \equiv g^{\sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_p} \pmod{n}$   
also  $x = \log_g y \equiv \sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_p - a \pmod{\varphi(n)}$

### ● Bestimmung der $x_p = \log_g p$ für $p \in \mathcal{B}$

- Wähle zufällige  $1 \leq z_i < n$  für die  $g^{z_i} \pmod{n}$  zerlegbar in  $\prod_{p \in \mathcal{B}} p^{e_{i,p}}$
- Dann ist  $g^{z_i} \equiv \prod_{p \in \mathcal{B}} p^{e_{i,p}} \equiv \prod_{p \in \mathcal{B}} g^{x_p \cdot e_{i,p}} \pmod{n}$   
also  $z_i \equiv \sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_{i,p} \pmod{\varphi(n)}$

# DIE INDEX-CALCULUS METHODE

## Verwandt mit Siebverfahren für Faktorisierung

### ● Einfache Grundidee

- Wähle eine Faktorbasis  $\mathcal{B} = \{p \text{ prim} \mid p \leq b\}$  für eine Zahl  $b$
- Bestimme diskrete Logarithmen  $x_p = \log_g p$  für alle Elemente von  $\mathcal{B}$
- Suche Exponenten  $a < n$  für die  $y \cdot g^a$   $b$ -glatt ist (d.h.  $y \cdot g^a = \prod_{p \in \mathcal{B}} p^{e_p}$ )
- Dann ist  $y \cdot g^a \equiv \prod_{p \in \mathcal{B}} (g^{x_p})^{e_p} \equiv g^{\sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_p} \pmod{n}$   
also  $x = \log_g y \equiv \sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_p - a \pmod{\varphi(n)}$

### ● Bestimmung der $x_p = \log_g p$ für $p \in \mathcal{B}$

- Wähle zufällige  $1 \leq z_i < n$  für die  $g^{z_i} \pmod{n}$  zerlegbar in  $\prod_{p \in \mathcal{B}} p^{e_{i,p}}$
- Dann ist  $g^{z_i} \equiv \prod_{p \in \mathcal{B}} p^{e_{i,p}} \equiv \prod_{p \in \mathcal{B}} g^{x_p \cdot e_{i,p}} \pmod{n}$   
also  $z_i \equiv \sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_{i,p} \pmod{\varphi(n)}$
- Hat man  $|\mathcal{B}|$  derartige Relationen  $(e_{i,p})_{p \in \mathcal{B}}$  gefunden, so kann man die  $x_p$  mit Hilfe eines modifizierten Gaußalgorithmus bestimmen

# DIE INDEX-CALCULUS METHODE

## Verwandt mit Siebverfahren für Faktorisierung

### ● Einfache Grundidee

- Wähle eine Faktorbasis  $\mathcal{B} = \{p \text{ prim} \mid p \leq b\}$  für eine Zahl  $b$
- Bestimme diskrete Logarithmen  $x_p = \log_g p$  für alle Elemente von  $\mathcal{B}$
- Suche Exponenten  $a < n$  für die  $y \cdot g^a$   $b$ -glatt ist (d.h.  $y \cdot g^a = \prod_{p \in \mathcal{B}} p^{e_p}$ )
- Dann ist  $y \cdot g^a \equiv \prod_{p \in \mathcal{B}} (g^{x_p})^{e_p} \equiv g^{\sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_p} \pmod{n}$   
also  $x = \log_g y \equiv \sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_p - a \pmod{\varphi(n)}$

### ● Bestimmung der $x_p = \log_g p$ für $p \in \mathcal{B}$

- Wähle zufällige  $1 \leq z_i < n$  für die  $g^{z_i} \pmod{n}$  zerlegbar in  $\prod_{p \in \mathcal{B}} p^{e_{i,p}}$
- Dann ist  $g^{z_i} \equiv \prod_{p \in \mathcal{B}} p^{e_{i,p}} \equiv \prod_{p \in \mathcal{B}} g^{x_p \cdot e_{i,p}} \pmod{n}$   
also  $z_i \equiv \sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_{i,p} \pmod{\varphi(n)}$
- Hat man  $|\mathcal{B}|$  derartige Relationen  $(e_{i,p})_{p \in \mathcal{B}}$  gefunden, so kann man die  $x_p$  mit Hilfe eines modifizierten Gaußalgorithmus bestimmen

### ● Gesamtkomplexität $\mathcal{O}(2^{(1+o(1)) \cdot \|n\|^{1/2}} \cdot \log \|n\|^{1/2})$

- Analyse ähnlich wie bei quadratischen Sieben für Faktorisierung

# DIE INDEX-CALCULUS METHODE AM BEISPIEL

Logarithmen der Faktorbasis für  $g = 2$  in  $\mathbb{Z}_{2027}$

# DIE INDEX-CALCULUS METHODE AM BEISPIEL

## Logarithmen der Faktorbasis für $g = 2$ in $\mathbb{Z}_{2027}$

### ● Relationen der Faktorbasis $\{2, 3, 5, 7, 11\}$

– Zufällige Erzeugung von Zahlen  $z_i$  liefert

$$\cdot 2^{1593} \bmod 2027 = 33 = 3 \cdot 11$$

$$\cdot 2^{983} \bmod 2027 = 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$$

$$\cdot 2^{1318} \bmod 2027 = 1408 = 2^7 \cdot 11$$

$$\cdot 2^{293} \bmod 2027 = 63 = 3^2 \cdot 7$$

$$\cdot 2^{1918} \bmod 2027 = 1600 = 2^6 \cdot 5^2$$

# DIE INDEX-CALCULUS METHODE AM BEISPIEL

## Logarithmen der Faktorbasis für $g = 2$ in $\mathbb{Z}_{2027}$

- **Relationen der Faktorbasis  $\{2, 3, 5, 7, 11\}$** 
  - Zufällige Erzeugung von Zahlen  $z_i$  liefert
    - $2^{1593} \bmod 2027 = 33 = 3 \cdot 11$
    - $2^{983} \bmod 2027 = 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$
    - $2^{1318} \bmod 2027 = 1408 = 2^7 \cdot 11$
    - $2^{293} \bmod 2027 = 63 = 3^2 \cdot 7$
    - $2^{1918} \bmod 2027 = 1600 = 2^6 \cdot 5^2$
- **Bestimme  $x_p = \log_2 p$  für  $p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$** 
  - $x_3 + x_{11} \equiv 1593 \bmod 2026$
  - $x_5 + x_7 + x_{11} \equiv 983 \bmod 2026$
  - $7x_2 + x_{11} \equiv 1318 \bmod 2026$
  - $2x_3 + x_7 \equiv 293 \bmod 2026$
  - $6x_2 + 2x_5 \equiv 1918 \bmod 2026$
  - Löse Kongruenzen mit modifiziertem Gaußalgorithmus

# DIE INDEX-CALCULUS METHODE AM BEISPIEL (II)

- **Modifizierter Gaußalgorithmus**

- Löse Kongruenzen modulo 2 und 1013 (die Primteiler von 2026)
- Berechne  $x_p$  aus Einzellösungen mit Chinesischem Restsatz

# DIE INDEX-CALCULUS METHODE AM BEISPIEL (II)

- **Modifizierter Gaußalgorithmus**

- Löse Kongruenzen modulo 2 und 1013 (die Primteiler von 2026)
- Berechne  $x_p$  aus Einzellösungen mit Chinesischem Restsatz

- **Löse Kongruenzen modulo 2**

- $x_3 + x_{11} \equiv 1593 \pmod{2}$

- $x_5 + x_7 + x_{11} \equiv 983 \pmod{2}$

- $x_2 + x_{11} \equiv 1318 \pmod{2}$

- $x_7 \equiv 293 \pmod{2}$

- Wegen  $g = 2$  ist  **$x_2 = 1$**

- Ansonsten ergibt sich  $x_5 \equiv x_7 \equiv x_{11} \equiv 1 \pmod{2}$  und  $x_3 \equiv 0 \pmod{2}$



# DIE INDEX-CALCULUS METHODE AM BEISPIEL (II)

- **Modifizierter Gaußalgorithmus**

- Löse Kongruenzen modulo 2 und 1013 (die Primteiler von 2026)
- Berechne  $x_p$  aus Einzellösungen mit Chinesischem Restsatz

- **Löse Kongruenzen modulo 2**

- $x_3 + x_{11} \equiv 1593 \pmod{2}$

- $x_5 + x_7 + x_{11} \equiv 983 \pmod{2}$

- $x_2 + x_{11} \equiv 1318 \pmod{2}$

- $x_7 \equiv 293 \pmod{2}$

- Wegen  $g = 2$  ist  **$x_2 = 1$**
- Ansonsten ergibt sich  $x_5 \equiv x_7 \equiv x_{11} \equiv 1 \pmod{2}$  und  $x_3 \equiv 0 \pmod{2}$

- **Löse Kongruenzen modulo 1013**

- $x_3 + x_{11} \equiv 580 \pmod{1013}$

- $x_5 + x_7 + x_{11} \equiv 983 \pmod{1013}$

- $x_{11} \equiv 298 \pmod{1013}$

- $2x_3 + x_7 \equiv 293 \pmod{1013}$

- $2x_5 \equiv 899 \pmod{1013}$

- Ergibt  $x_{11} \equiv 298$ ,  $x_5 \equiv 956$ ,  $x_7 \equiv 742$ ,  $x_3 \equiv 282 \pmod{1013}$

# DIE INDEX-CALCULUS METHODE AM BEISPIEL (II)

- **Modifizierter Gaußalgorithmus**

- Löse Kongruenzen modulo 2 und 1013 (die Primteiler von 2026)
- Berechne  $x_p$  aus Einzellösungen mit Chinesischem Restsatz

- **Löse Kongruenzen modulo 2**

- $x_3 + x_{11} \equiv 1593 \pmod{2}$

- $x_5 + x_7 + x_{11} \equiv 983 \pmod{2}$

- $x_2 + x_{11} \equiv 1318 \pmod{2}$

- $x_7 \equiv 293 \pmod{2}$

- Wegen  $g = 2$  ist  **$x_2 = 1$**
- Ansonsten ergibt sich  $x_5 \equiv x_7 \equiv x_{11} \equiv 1 \pmod{2}$  und  $x_3 \equiv 0 \pmod{2}$

- **Löse Kongruenzen modulo 1013**

- $x_3 + x_{11} \equiv 580 \pmod{1013}$

- $x_5 + x_7 + x_{11} \equiv 983 \pmod{1013}$

- $x_{11} \equiv 298 \pmod{1013}$

- $2x_3 + x_7 \equiv 293 \pmod{1013}$

- $2x_5 \equiv 899 \pmod{1013}$

- Ergibt  $x_{11} \equiv 298$ ,  $x_5 \equiv 956$ ,  $x_7 \equiv 742$ ,  $x_3 \equiv 282 \pmod{1013}$

- **Lösung der simultanen Kongruenz**

- **$x_2 = 1$ ,  $x_3 = 282$ ,  $x_5 = 1969$ ,  $x_7 = 1755$ ,  $x_{11} = 1311$**

# DAS INDEX-CALCULUS VERFAHREN AM BEISPIEL (III)

Berechnung von  $\log_2 13$  in  $\mathbb{Z}_{2027}$

# DAS INDEX-CALCULUS VERFAHREN AM BEISPIEL (III)

## Berechnung von $\log_2 13$ in $\mathbb{Z}_{2027}$

- Suche ein 11-glattes  $13 \cdot 2^a$  für ein  $a \in \{1, \dots, 2026\}$ 
  - Zufallssuche ergibt  $a = 1397$  und  $13 \cdot 2^{1397} \equiv 110 \equiv 2 \cdot 5 \cdot 11 \pmod{2027}$

# DAS INDEX-CALCULUS VERFAHREN AM BEISPIEL (III)

## Berechnung von $\log_2 13$ in $\mathbb{Z}_{2027}$

- Suche ein 11-glattes  $13 \cdot 2^a$  für ein  $a \in \{1, \dots, 2026\}$ 
  - Zufallssuche ergibt  $a = 1397$  und  $13 \cdot 2^{1397} \equiv 110 \equiv 2 \cdot 5 \cdot 11 \pmod{2027}$
- Berechne  $x \equiv \sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_p - a \pmod{\varphi(n)}$ 
  - Liefert  $x \equiv x_2^1 + x_5^1 + x_{11}^1 - a \equiv 1 + 1969 + 1311 - 1397 \pmod{2026}$
  - Ergebnis ist  $x = \log_2 13 = 1884$

# DAS INDEX-CALCULUS VERFAHREN AM BEISPIEL (III)

## Berechnung von $\log_2 13$ in $\mathbb{Z}_{2027}$

- Suche ein 11-glattes  $13 \cdot 2^a$  für ein  $a \in \{1, \dots, 2026\}$ 
  - Zufallssuche ergibt  $a = 1397$  und  $13 \cdot 2^{1397} \equiv 110 \equiv 2 \cdot 5 \cdot 11 \pmod{2027}$
- Berechne  $x \equiv \sum_{p \in \mathcal{B}} x_p \cdot e_p - a \pmod{\varphi(n)}$ 
  - Liefert  $x \equiv x_2^1 + x_5^1 + x_{11}^1 - a \equiv 1 + 1969 + 1311 - 1397 \pmod{2026}$
  - Ergebnis ist  $x = \log_2 13 = 1884$

---

## Verallgemeinerung auf andere Gruppen

- Methode stützt sich auf zahlentheoretische Eigenschaften
- Andere Gruppen müssen Aufbau einer Faktorbasis und Konstruktion von Relationen aus Exponentenvektoren unterstützen
- Relationenfindung in  $\mathbb{Z}_p^*$  baut auf Primfaktorzerlegung in  $\mathbb{Z}$  auf
- Verfahren zur Relationenfindung in anderen Gruppen nicht bekannt

# DL ALGORITHMEN IM RÜCKBLICK

- **Aufzählungsverfahren**

- Standardverfahren, gut für kleine Gruppenordnungen

$$\mathcal{O}(2^{\|n\|})$$

# DL ALGORITHMEN IM RÜCKBLICK

- **Aufzählungsverfahren**

- Standardverfahren, gut für kleine Gruppenordnungen

$$\mathcal{O}(2^{\|n\|})$$

- **Algorithmus Algorithmus von Shanks**

- Zerlegung der Suche in Baby- und Giantsteps

$$\text{Zeit/Platz } \mathcal{O}(2^{\|n\|/2})$$



# DL ALGORITHMEN IM RÜCKBLICK

- **Aufzählungsverfahren**

- Standardverfahren, gut für kleine Gruppenordnungen  $\mathcal{O}(2^{\|n\|})$

- **Algorithmus Algorithmus von Shanks**

- Zerlegung der Suche in Baby- und Giantsteps **Zeit/Platz**  $\mathcal{O}(2^{\|n\|/2})$

- **Pollard  $\rho$**

- Systematische Suche nach Kollisionen  $\mathcal{O}(2^{\|n\|/2})$

# DL ALGORITHMEN IM RÜCKBLICK

- **Aufzählungsverfahren**

- Standardverfahren, gut für kleine Gruppenordnungen  $\mathcal{O}(2^{\|n\|})$

- **Algorithmus Algorithmus von Shanks**

- Zerlegung der Suche in Baby- und Giantsteps **Zeit/Platz**  $\mathcal{O}(2^{\|n\|/2})$

- **Pollard  $\rho$**

- Systematische Suche nach Kollisionen  $\mathcal{O}(2^{\|n\|/2})$

- **Pohlig-Hellman Verfahren**

- Reduktion auf Primfaktoren von  $n$   $\mathcal{O}(\sum_{p|n} e_p \cdot \sqrt{p})$

# DL ALGORITHMEN IM RÜCKBLICK

## ● Aufzählungsverfahren

- Standardverfahren, gut für kleine Gruppenordnungen  $\mathcal{O}(2^{\|n\|})$

## ● Algorithmus Algorithmus von Shanks

- Zerlegung der Suche in Baby- und Giantsteps  $\text{Zeit/Platz } \mathcal{O}(2^{\|n\|/2})$

## ● Pollard $\rho$

- Systematische Suche nach Kollisionen  $\mathcal{O}(2^{\|n\|/2})$

## ● Pohlig-Hellman Verfahren

- Reduktion auf Primfaktoren von  $n$   $\mathcal{O}(\sum_{p|n} e_p \cdot \sqrt{p})$

## ● Index-Calculus Methode

- Aufbau von Logarithmen einer Faktorbasis  $\mathcal{O}(2^{(1+o(1)) \cdot \|n\|^{1/2} \cdot \log \|n\|^{1/2}})$
- **Zahlkörpersieb** als effizienteste Variante  $\mathcal{O}(2^{1.92 \cdot \|n\|^{1/3} \cdot \log \|n\|^{2/3}})$
- Verallgemeinert sehr schlecht auf andere Gruppen