

Kryptographie und Komplexität



Einheit 6.4

Mehrparteien-Berechnung und Verteilte Geheimnisse



1. Secret-Sharing Protokolle
2. Verifizierbare Geheimnisaufteilung
3. Threshold Signaturverfahren

Weitere Anwendungen der Kryptographie

MEHRPARTEIEN-BERECHNUNGEN

- **Verteilung von Information auf eine Gruppe**
 - Aktion wird von mehreren Teilnehmer gemeinsam durchgeführt
 - Öffnen eines Schließfachs in einer Bank
 - Verpacken von Bargeld in der Bundesdruckerei
 - Auszählung von Wahlergebnissen / Elektronische Wahlen
 - Kritische militärische Aktionen
 - Kein einzelner Teilnehmer kann Aktion alleine ausführen

MEHRPARTEIEN-BERECHNUNGEN

- **Verteilung von Information auf eine Gruppe**
 - Aktion wird von mehreren Teilnehmer gemeinsam durchgeführt
 - Öffnen eines Schließfachs in einer Bank
 - Verpacken von Bargeld in der Bundesdruckerei
 - Auszählung von Wahlergebnissen / Elektronische Wahlen
 - Kritische militärische Aktionen
 - Kein einzelner Teilnehmer kann Aktion alleine ausführen
- **Secret Sharing**
 - Absicherung eines Geheimnisses gegen Verrat durch einzelne
 - Einzelpersonen haben nur Teilinformationen
 - Geheimnis kann aus Teilinformation rekonstruiert werden
 - Schutz der Gruppe gegen Blockade durch einzelne
 - Geheimnis kann von Teilgruppe rekonstruiert werden
 - Sicherheitsschwelle abhängig von Bedeutung des Geheimnisses

MEHRPARTEIEN-BERECHNUNGEN

● **Verteilung von Information auf eine Gruppe**

- Aktion wird von mehreren Teilnehmer gemeinsam durchgeführt
 - Öffnen eines Schließfachs in einer Bank
 - Verpacken von Bargeld in der Bundesdruckerei
 - Auszählung von Wahlergebnissen / Elektronische Wahlen
 - Kritische militärische Aktionen
- Kein einzelner Teilnehmer kann Aktion alleine ausführen

● **Secret Sharing**

- Absicherung eines Geheimnisses gegen Verrat durch einzelne
 - Einzelpersonen haben nur Teilinformationen
 - Geheimnis kann aus Teilinformation rekonstruiert werden
- Schutz der Gruppe gegen Blockade durch einzelne
 - Geheimnis kann von Teilgruppe rekonstruiert werden
- Sicherheitsschwelle abhängig von Bedeutung des Geheimnisses

● **Sichere Funktionenauswertung**

- Auswertung einer Funktion mit Daten aller Gruppenteilnehmer
- Ein-/Ausgaben einzelner Teilnehmer bleiben vor anderen verborgen

SECRET-SHARING VERFAHREN

Sicherheit in einer korrumpierbaren Welt

SECRET-SHARING VERFAHREN

Sicherheit in einer korrumpierbaren Welt

- **Aufteilung eines Geheimnisses**
 - Geheime Information wird auf n Personen verteilt
 - Geheimnis kann nur durch Zusammenarbeit rekonstruiert werden
 - Geheimnis bleibt sicher, auch wenn einzelne unehrlich sind

Sicherheit in einer korrumpierbaren Welt

- **Aufteilung eines Geheimnisses**
 - Geheime Information wird auf n Personen verteilt
 - Geheimnis kann nur durch Zusammenarbeit rekonstruiert werden
 - Geheimnis bleibt sicher, auch wenn einzelne unehrlich sind
- **Schwellschema (Threshold Schemes)**
 - Geheimnis kann nur wiederhergestellt werden, wenn mindestens t Personen beteiligt sind
 - Handlungsfähigkeit bleibt erhalten auch einzelne nicht mitmachen

Sicherheit in einer korrumpierbaren Welt

- **Aufteilung eines Geheimnisses**

- Geheime Information wird auf n Personen verteilt
- Geheimnis kann nur durch Zusammenarbeit rekonstruiert werden
- Geheimnis bleibt sicher, auch wenn einzelne unehrlich sind

- **Schwellschema (Threshold Schemes)**

- Geheimnis kann nur wiederhergestellt werden, wenn mindestens t Personen beteiligt sind
- Handlungsfähigkeit bleibt erhalten auch einzelne nicht mitmachen

- **Komplexe Zugriffsstrukturen**

- Berücksichtigt unterschiedliche Rollen einzelner Personen
- Geheimnis kann wiederhergestellt werden, wenn eine bestimmte Mindestkonstellation von Personen beteiligt ist
 - z.B. Zwei Abteilungsleiter oder

Ein Abteilungsleiter und zwei Referenten aus anderen Gruppen

DAS SHAMIR SECRET-SHARING PROTOKOLL

- **Verwendet Konstruktion von Polynomsplines**

Satz: *Ein Polynom $f \in K[x]$ vom Grad $t-1$ ist eindeutig durch t Punkte $y_i = f(x_i)$ bestimmt*

– Die Lagrange-Interpolationsformel für Polynome liefert die Gleichung

$$f(x) = \sum_{i=1}^t y_i \cdot \prod_{j \neq i} (x - x_j) / (x_i - x_j)$$

– Bei weniger als t Interpolationspunkten ist eines der y_i unbestimmt und die Gleichung für f hat viele Lösungen

DAS SHAMIR SECRET-SHARING PROTOKOLL

- **Verwendet Konstruktion von Polynomsplines**

Satz: *Ein Polynom $f \in K[x]$ vom Grad $t-1$ ist eindeutig durch t Punkte $y_i = f(x_i)$ bestimmt*

– Die Lagrange-Interpolationsformel für Polynome liefert die Gleichung

$$f(x) = \sum_{i=1}^t y_i \cdot \prod_{j \neq i} (x - x_j) / (x_i - x_j)$$

– Bei weniger als t Interpolationspunkten ist eines der y_i unbestimmt und die Gleichung für f hat viele Lösungen

- **Initialisierung für n Personen**

– Wähle Primzahl $p > n$ und veröffentliche n verschiedene Zahlen $x_i \in \mathbb{Z}_p^*$

DAS SHAMIR SECRET-SHARING PROTOKOLL

- **Verwendet Konstruktion von Polynomsplines**

Satz: *Ein Polynom $f \in K[x]$ vom Grad $t-1$ ist eindeutig durch t Punkte $y_i = f(x_i)$ bestimmt*

– Die Lagrange-Interpolationsformel für Polynome liefert die Gleichung

$$f(x) = \sum_{i=1}^t y_i \cdot \prod_{j \neq i} (x - x_j) / (x_i - x_j)$$

– Bei weniger als t Interpolationspunkten ist eines der y_i unbestimmt und die Gleichung für f hat viele Lösungen

- **Initialisierung für n Personen**

– Wähle Primzahl $p > n$ und veröffentliche n verschiedene Zahlen $x_i \in \mathbb{Z}_p^*$

- **Verteilung eines Geheimnisses $s \in \mathbb{Z}_p$**

– Wähle geheime Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Z}_p$ und setze $f(x) = s + \sum_{j=1}^{t-1} a_j x^j$

– Vergebe an den i -ten Geheimnisträger den Geheimnisteil $y_i = f(x_i)$

DAS SHAMIR SECRET-SHARING PROTOKOLL

- **Verwendet Konstruktion von Polynomsplines**

Satz: *Ein Polynom $f \in K[x]$ vom Grad $t-1$ ist eindeutig durch t Punkte $y_i = f(x_i)$ bestimmt*

– Die Lagrange-Interpolationsformel für Polynome liefert die Gleichung

$$f(x) = \sum_{i=1}^t y_i \cdot \prod_{j \neq i} (x - x_j) / (x_i - x_j)$$

– Bei weniger als t Interpolationspunkten ist eines der y_i unbestimmt und die Gleichung für f hat viele Lösungen

- **Initialisierung für n Personen**

– Wähle Primzahl $p > n$ und veröffentliche n verschiedene Zahlen $x_i \in \mathbb{Z}_p^*$

- **Verteilung eines Geheimnisses $s \in \mathbb{Z}_p$**

– Wähle geheime Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Z}_p$ und setze $f(x) = s + \sum_{j=1}^{t-1} a_j x^j$

– Vergebe an den i -ten Geheimnisträger den Geheimnisteil $y_i = f(x_i)$

- **Rekonstruktion des Geheimnisses**

– Bei t Teilnehmern kann f eindeutig wiederhergestellt werden

– Das Geheimnis s ist der Wert von f an der Stelle 0

– Bei weniger als t Teilnehmern gibt es p mögliche Lösungen für s

WENN DEALER / TEILNEHMER SICH FALSCH VERHALTEN

- **Mögliches Fehlverhalten des Dealers**

- Falsche Berechnung der Teilgeheimnisse y_i
- Offenlegung der Teilgeheimnisse y_i
- Ausgabe von weniger als t Teilgeheimnissen

WENN DEALER / TEILNEHMER SICH FALSCH VERHALTEN

- **Mögliches Fehlverhalten des Dealers**
 - Falsche Berechnung der Teilgeheimnisse y_i
 - Offenlegung der Teilgeheimnisse y_i
 - Ausgabe von weniger als t Teilgeheimnissen
- **Mögliches Fehlverhalten der Teilnehmer**
 - Weigerung, ihr Teilgeheimnis preiszugeben
 - Angabe eines falschen Wertes für das Teilgeheimnis

WENN DEALER / TEILNEHMER SICH FALSCH VERHALTEN

- **Mögliches Fehlverhalten des Dealers**

- Falsche Berechnung der Teilgeheimnisse y_i
- Offenlegung der Teilgeheimnisse y_i
- Ausgabe von weniger als t Teilgeheimnissen

- **Mögliches Fehlverhalten der Teilnehmer**

- Weigerung, ihr Teilgeheimnis preiszugeben
- Angabe eines falschen Wertes für das Teilgeheimnis

- **Einfaches Shamir Protokoll bietet keinen Schutz**

- Fehlverhalten führt zu Geheimnisverrat oder Nichtrekonstruierbarkeit
- Secret-Sharing Protokolle müssen **robust** sein
 - Gegen kleine Menge betrügerischer / nichtkooperativer Teilnehmer
 - Gegen betrügerische Dealer

VERIFIZIERBARE GEHEIMNISAUFTEILUNG

Identifiziere Fehlverhalten der Beteiligten

VERIFIZIERBARE GEHEIMNISAUFTEILUNG

Identifiziere Fehlverhalten der Beteiligten

- **Dealer muß Geheimnis verschlüsselt preisgeben**
 - Geheimnis und Fragmente werden mit Einwegfunktion chiffriert
 - Für das (t, n) Secret-Sharing Protokoll wählt Dealer geheime Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Z}_p$, setzt $f(x) = s + \sum_{j=1}^{t-1} a_j x^j$ und veröffentlicht Werte $u_j = g^{a_j}$, x_i und $z_i = g^{f(x_i)}$ für ein erzeugendes g
 - Der i -te Geheimnisträger erhält Geheimnisteil $y_i = f(x_i)$

VERIFIZIERBARE GEHEIMNISAUFTEILUNG

Identifiziere Fehlverhalten der Beteiligten

- **Dealer muß Geheimnis verschlüsselt preisgeben**
 - Geheimnis und Fragmente werden mit Einwegfunktion chiffriert
 - Für das (t, n) Secret-Sharing Protokoll wählt Dealer geheime Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Z}_p$, setzt $f(x) = s + \sum_{j=1}^{t-1} a_j x^j$ und veröffentlicht Werte $u_j = g^{a_j}$, x_i und $z_i = g^{f(x_i)}$ für ein erzeugendes g
 - Der i -te Geheimnisträger erhält Geheimnisteil $y_i = f(x_i)$
- **Kontrolle des Dealers durch die Geheimnisträger**
 - Jeder kann prüfen, ob $g^{\sum_{j=0}^{t-1} a_j (x_i)^j} = \prod_{j=0}^{t-1} u_j^{(x_i)^j} = z_i = g^{f(x_i)}$ ist, d.h. ob die veröffentlichten Punkte von f zu den Koeffizienten passen
 - Teilnehmer i kann prüfen, ob $g^{y_i} = z_i$ gilt, d.h. ob sein Teilgeheimnis wirklich $f(x_i)$ ist

Identifiziere Fehlverhalten der Beteiligten

- **Dealer muß Geheimnis verschlüsselt preisgeben**
 - Geheimnis und Fragmente werden mit Einwegfunktion chiffriert
 - Für das (t, n) Secret-Sharing Protokoll wählt Dealer geheime Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Z}_p$, setzt $f(x) = s + \sum_{j=1}^{t-1} a_j x^j$ und veröffentlicht Werte $u_j = g^{a_j}$, x_i und $z_i = g^{f(x_i)}$ für ein erzeugendes g
 - Der i -te Geheimnisträger erhält Geheimnisteil $y_i = f(x_i)$
- **Kontrolle des Dealers durch die Geheimnisträger**
 - Jeder kann prüfen, ob $g^{\sum_{j=0}^{t-1} a_j (x_i)^j} = \prod_{j=0}^{t-1} u_j^{(x_i)^j} = z_i = g^{f(x_i)}$ ist, d.h. ob die veröffentlichten Punkte von f zu den Koeffizienten passen
 - Teilnehmer i kann prüfen, ob $g^{y_i} = z_i$ gilt, d.h. ob sein Teilgeheimnis wirklich $f(x_i)$ ist
- **Kontrolle der Geheimnisträger durch andere**
 - Bei Rekonstruktion des Geheimnisses kann jeder feststellen, ob Teilnehmer i sein Teilgeheimnis korrekt preisgegeben hat

THRESHOLD SIGNATURVERFAHREN

Secret-Sharing ohne Preisgabe von Teilgeheimnissen

THRESHOLD SIGNATURVERFAHREN

Secret-Sharing ohne Preisgabe von Teilgeheimnissen

- **Teilgeheimnisse sind nicht wiederverwendbar**
 - Teilnehmer müssen ihr Teilgeheimnis für die Rekonstruktion des Geheimnisses preisgeben
 - Teilnehmerdaten liegen ab dann für alle anderen offen
 - Für nächste Anwendung müsste neues Geheimnis verteilt werden
 - Ungeeignet für viele Anwendungen verteilter Geheimnisse

Secret-Sharing ohne Preisgabe von Teilgeheimnissen

- **Teilgeheimnisse sind nicht wiederverwendbar**
 - Teilnehmer müssen ihr Teilgeheimnis für die Rekonstruktion des Geheimnisses preisgeben
 - Teilnehmerdaten liegen ab dann für alle anderen offen
 - Für nächste Anwendung müsste neues Geheimnis verteilt werden
 - Ungeeignet für viele Anwendungen verteilter Geheimnisse
- **Signatur mit (t, n) Schwellenschemata**
 - Teilnehmer erzeugen Teilunterschrift, ohne ihre Daten preiszugeben
 - Teile werden durch **Combiner** oder via Broadcast zusammengesetzt

THRESHOLD SIGNATURSCHEMA MIT ELGAMAL

● Initialisierung für n Personen

- Wähle eine kollisionsresistente Hashfunktion h
- Wähle große Primzahl $p > n$ und ein erzeugendes Element g von \mathbb{Z}_p^*
- Wähle eine weitere Primzahl q , die $p-1$ teilt
- Veröffentliche n verschiedene Zahlen $x_i \in \mathbb{Z}_q^*$

THRESHOLD SIGNATURSCHEMA MIT ELGAMAL

● Initialisierung für n Personen

- Wähle eine kollisionsresistente Hashfunktion h
- Wähle große Primzahl $p > n$ und ein erzeugendes Element g von \mathbb{Z}_p^*
- Wähle eine weitere Primzahl q , die $p-1$ teilt
- Veröffentliche n verschiedene Zahlen $x_i \in \mathbb{Z}_q^*$

● Verteilung eines Geheimnisses $s \in \mathbb{Z}_q$

- Wähle geheime Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Z}_q$ und setze $f(x) = s + \sum_{j=1}^{t-1} a_j x^j$
- Veröffentliche $y = g^s \bmod p$ als Verifikationsschlüssel der Signatur
- Wähle zufällige $u_i \in \mathbb{Z}_q$ und berechne die Geheimnisteile $s_i = u_i + f(x_i)$
- Veröffentliche $y_i = g^{s_i} \bmod p$ und $z_i = g^{u_i} \bmod p$
als Verifikationsschlüssel für Teilnehmer i

THRESHOLD SIGNATURSCHEMA MIT ELGAMAL

● Initialisierung für n Personen

- Wähle eine kollisionsresistente Hashfunktion h
- Wähle große Primzahl $p > n$ und ein erzeugendes Element g von \mathbb{Z}_p^*
- Wähle eine weitere Primzahl q , die $p-1$ teilt
- Veröffentliche n verschiedene Zahlen $x_i \in \mathbb{Z}_q^*$

● Verteilung eines Geheimnisses $s \in \mathbb{Z}_q$

- Wähle geheime Koeffizienten $a_j \in \mathbb{Z}_q$ und setze $f(x) = s + \sum_{j=1}^{t-1} a_j x^j$
- Veröffentliche $y = g^s \bmod p$ als Verifikationsschlüssel der Signatur
- Wähle zufällige $u_i \in \mathbb{Z}_q$ und berechne die Geheimnisteile $s_i = u_i + f(x_i)$
- Veröffentliche $y_i = g^{s_i} \bmod p$ und $z_i = g^{u_i} \bmod p$
als Verifikationsschlüssel für Teilnehmer i

● Verteilung der Informationen

- Öffentlich: Hashfunktion h , Primzahlen p, q Verifikationsschlüssel y
Element g , Stützpunkte x_i , Teilnehmerschlüssel y_i und z_i
- Teilnehmer i : Geheimnisanteil s_i
- Dealer: Geheimnis s , Koeffizienten a_i , Zufallswerte u_i

THRESHOLD SIGNATURSCHEMA MIT ELGAMAL (II)

- **Signieren einer Nachricht x durch t Teilnehmer**

- Teilnehmer i wählt ein zufälliges $k_i \in \mathbb{Z}_q$ und berechnet $r_i = g^{k_i} \bmod p$
- Jeder erhält die r_i und berechnet $r = \prod_{i=1}^t r_i \equiv g^{\sum_{i=1}^t k_i} \bmod p$
sowie $e = h(x, r) \bmod q$ und $\sigma_i = s_i \cdot \prod_{j \neq i} x_j \cdot (x_j - x_i)^{-1} + k_i \cdot e \bmod q$

THRESHOLD SIGNATURSCHEMA MIT ELGAMAL (II)

- **Signieren einer Nachricht x durch t Teilnehmer**

- Teilnehmer i wählt ein zufälliges $k_i \in \mathbb{Z}_q$ und berechnet $r_i = g^{k_i} \bmod p$
- Jeder erhält die r_i und berechnet $r = \prod_{i=1}^t r_i \equiv g^{\sum_{i=1}^t k_i} \bmod p$
sowie $e = h(x, r) \bmod q$ und $\sigma_i = s_i \cdot \prod_{j \neq i} x_j \cdot (x_j - x_i)^{-1} + k_i \cdot e \bmod q$

- **Combiner setzt Teilsignaturen zusammen**

- Prüfe Signaturenteile: $g^{\sigma_i} \equiv y_i \prod_{j \neq i} x_j \cdot (x_j - x_i)^{-1} \cdot r_i^e \bmod p$
- Gesamtsignatur der Nachricht ist $\sigma = \prod_{i=1}^t \sigma_i \bmod q$

THRESHOLD SIGNATURSCHEMA MIT ELGAMAL (II)

- **Signieren einer Nachricht x durch t Teilnehmer**

- Teilnehmer i wählt ein zufälliges $k_i \in \mathbb{Z}_q$ und berechnet $r_i = g^{k_i} \bmod p$
- Jeder erhält die r_i und berechnet $r = \prod_{i=1}^t r_i \equiv g^{\sum_{i=1}^t k_i} \bmod p$
sowie $e = h(x, r) \bmod q$ und $\sigma_i = s_i \cdot \prod_{j \neq i} x_j \cdot (x_j - x_i)^{-1} + k_i \cdot e \bmod q$

- **Combiner setzt Teilsignaturen zusammen**

- Prüfe Signaturenteile: $g^{\sigma_i} \equiv y_i \cdot \prod_{j \neq i} x_j \cdot (x_j - x_i)^{-1} \cdot r_i^e \bmod p$
- Gesamtsignatur der Nachricht ist $\sigma = \prod_{i=1}^t \sigma_i \bmod q$

- **Verifikation einer Signatur**

- Berechne $t = \prod_{i=1}^t z_i \cdot \prod_{j \neq i} x_j \cdot (x_j - x_i)^{-1} \bmod p$ sowie $e = h(x, r) \bmod q$
- Prüfe ob die Kongruenz $g^\sigma \equiv y \cdot t \cdot r^e \bmod p$ gilt

● Schlüsselverwaltung

- Kryptographische / organisatorische Maßnahmen für sichere Schlüssel
- Erzeugung, Verteilung und sichere Speicherung von Schlüssel
- Rückruf kompromittierter Schlüssel
- Public-Key Infrastrukturen und Zertifizierungsinstanzen

● Schlüsselverwaltung

- Kryptographische / organisatorische Maßnahmen für sichere Schlüssel
- Erzeugung, Verteilung und sichere Speicherung von Schlüssel
- Rückruf kompromittierter Schlüssel
- Public-Key Infrastrukturen und Zertifizierungsinstanzen

● Schlüsseletablierungsprotokolle

- Protokolle für Erzeugung gemeinsam nutzbarer geheimer Schlüssel
- Schlüsseltransportprotokolle: Sichere Verteilung eines Schlüssels
- Schlüsselvereinbarungsprotokolle: Gemeinsame Erzeugung
- Protokolle müssen Authentifizierung mit einbauen

● **Schlüsselverwaltung**

- Kryptographische / organisatorische Maßnahmen für sichere Schlüssel
- Erzeugung, Verteilung und sichere Speicherung von Schlüssel
- Rückruf kompromittierter Schlüssel
- Public-Key Infrastrukturen und Zertifizierungsinstanzen

● **Schlüsseletablierungsprotokolle**

- Protokolle für Erzeugung gemeinsam nutzbarer geheimer Schlüssel
- Schlüsseltransportprotokolle: Sichere Verteilung eines Schlüssels
- Schlüsselvereinbarungsprotokolle: Gemeinsame Erzeugung
- Protokolle müssen Authentifizierung mit einbauen

● **Anonymität von Systemteilnehmern**

- Senderanonymität: Protokolle für anonyme Hinweise
- Empfängeranonymität: Protokolle für anonyme Anfragen (Chiffre)
- Kommunikationsanonymität: Kommunikation nach außen unsichtbar

ZUKUNFTSTRÄCHTIGE THEMEN

- **Hyperelliptische Kurven**

- Verallgemeinerung elliptischer Kurven
- Höhere Sicherheit durch größere Auswahl von Parametern

ZUKUNFTSTRÄCHTIGE THEMEN

- **Hyperelliptische Kurven**

- Verallgemeinerung elliptischer Kurven
- Höhere Sicherheit durch größere Auswahl von Parametern

- **Quantenkryptographie**

- Berechnungen auf der Basis von Quantenzuständen und -verschränkung
- Mehr Effizienz, da Qubits beliebig viele Zustände annehmen können
Anwendung: Effiziente Faktorisierung (Algorithmus von Shor)
- Mehr Sicherheit, da Beobachtung von Daten nie unbemerkt bleibt
z.B. Quantum-Key Distribution, Quantum Direct Communication

ZUKUNFTSTRÄCHTIGE THEMEN

- **Hyperelliptische Kurven**

- Verallgemeinerung elliptischer Kurven
- Höhere Sicherheit durch größere Auswahl von Parametern

- **Quantenkryptographie**

- Berechnungen auf der Basis von Quantenzuständen und -verschränkung
- Mehr Effizienz, da Qubits beliebig viele Zustände annehmen können
Anwendung: Effiziente Faktorisierung (Algorithmus von Shor)
- Mehr Sicherheit, da Beobachtung von Daten nie unbemerkt bleibt
z.B. Quantum-Key Distribution, Quantum Direct Communication

- **Viele Anwendungen**

- Internetsicherheit als wichtigstes Problem
Maximale Freiheit bei größtmöglicher Sicherheit
Leichte Anwendung bei maximalem Schutz naiver Benutzer