Komplexe Zahlen

Algebraische Gleichungen

Ziel:
Lösung von Gleichungen der Form

$$x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0 = 0$$

$a_i \in \mathbb{R}$

Komplexe Zahlen I

Definition 4.14

Symbol i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ *wird imaginäre Einheit genannt*

$i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$
$i^{4n-3} = i$, $i^{4n-2} = -1$, $i^{4n-1} = -i$, $i^{4n} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$

Definition 4.15

Menge der komplexen Zahlen

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

a heißt Realteil, b heißt Imaginärteil der komplexen Zahl z.

Zwei komplexe Zahlen heißen gleich, wenn sie in Realteil und Imaginärteil übereinstimmen:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \iff a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

Komplexe Zahlen II

$\bar{z} = a - bi$ heißt die zu $z = a + bi$ konjugiert komplexe Zahl,
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ihr Absolutbetrag (oder einfach Betrag)

Summe und Differenz

$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$
Es gilt
$|\,|z_1| - |z_2|\,| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

Produkt

$(a_1 + b_1\, i)(a_2 + b_2\, i) = (a_1\, a_2 - b_1\, b_2) + (a_1\, b_2 + a_2\, b_1)\, i$
Es gilt
$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
$z \cdot \overline{z} = |z|^2$

Quotient

$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\, i}{a_2 + b_2\, i} = \frac{a_1\, a_2 + b_1\, b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2\, b_1 - a_1\, b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i$
Es gilt
$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Komplexe Zahlen III

Darstellung in trigonometrischer Form

$$z = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi),\ \ r \in R,\, r \geq 0,\, 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Es ergeben sich für

$\varphi = 0$ die positiven reellen Zahlen
$\varphi = \pi$ die negativen reellen Zahlen
$\varphi = \frac{\pi}{2}$ die positiven imaginären Zahlen
$\varphi = \frac{3}{2}\pi$ die negativen imaginären Zahlen

Komplexe Zahlen IV

Darstellung in Exponentialform

$$z = r\, e^{i\,\varphi}$$

Beispiel für eine komplexe Zahl in verschiedenen Formen:

$$\begin{aligned} z &= 2\,(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,i) = 1 + \sqrt{3}\,i && \text{(algebraische Form)} \\ &= 2\,(cos\tfrac{\pi}{3} + i\,sin\tfrac{\pi}{3}) && \text{(trigonometrische Form)} \\ &= 2\,e^{i\,\frac{\pi}{3}} && \text{(Exponentialform)} \end{aligned}$$

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom n-ten Grades

$$f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + a_{n-2}\,x^{n-2} + \ldots + a_1\,x + a_0$$

hat im Körper der komplexen Zahlen n Lösungen.

Eine reelle oder komplexe Zahl, die einer algebraischen Gleichung obiger Form genügt, heißt algebraische Zahl.

π und e sind transzendente Zahlen