Auf dem Weg zu einer Definition der Mathematik

Sebastian Böhne (734897)
Forschungsseminar (551): Was ist Mathematik?
Universität Potsdam

Potsdam, den 7. Dezember 2011

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel dieser Hausarbeit soll es sein, zu der Fragestellung dieses Seminars 'Was ist Mathematik' eine Antwort zu finden. Um dieses Ziel zu erreichen, werden zunächst zwei philosophische Richtungen vorgestellt und anschließend in fünf wesentlichen Aspekten verglichen. Die zwei philosophischen Positionen sind:

1. Intuitionismus
2. Formalismus (im hilbertschen Sinne)

Die Gründe, warum gerade diese beiden mathematisch-philosophischen Richtungen (von den vielen) ausgewählt wurden (und keine anderen), lauten:

- Beide philosophischen Richtungen sind im Rahmen der Grundlagenkrise entstanden; zu einer Zeit, in der die philosophischen Fragen zur Mathematik besonders akut gewesen sind. Die Auseinandersetzung zu dieser Zeit ist also besonders intensiv gewesen
- Beide Richtungen stehen oder standen sich sehr feinlich gegenüber und es ist meine Auffassung, dass sich Klarheit über einen Gegenstand am besten über möglichst unterschiedliche Positionen gewinnen lässt
- Im Gegensatz zum Logizismus, der obige Bedingungen auch erfüllt, sind ihre Positionen tendentiell eher philosophisch als mathematisch. Um einen vernünftigen Einblick in den Logizismus zu bekommen, scheint mir das Einbringen der technischen Begriffsschrift sowie gewisser Teile der Principia Mathematica unerlässlich. Solch technische Details sind aber nicht Sinn dieser Ausarbeitung
- Wird das letzte Kapitel durch die Auffassung eines Mannes bestimmt sein, der als Formalist intuitionistische Ansichten vertrat.

Die fünf gewählten Aspekte zum Vergleich dieser beiden philosophischen Richtungen lauten:

1. Haltung zur Entdecker- bzw. Erfinderposition
2. Umgang mit der Unendlichkeit
3. Ontologie der natürlichen Zahlen
4. Formale Mathematik und der Wahrheitsbegriff
5. Konstruktivität und das Tertium non datur

Der erste Punkt betrifft dabei eine überwiegend philosophische Fragestellung. Sie war uns im gesamten Seminar ein treuer Begleiter und eine Ausarbeitung ohne die Analyse dieser Fragestellung würde dem Seminar nicht gerecht. Überdies erhalten wir mit der Analyse dieser philosophischen Fragestellung pars pro toto eine für die später erfolgende Definition der Mathematik wichtige Einsicht. Der Behandlung der Unendlichkeit sowie der natürlichen Zahlen wohnt ein eher inhatlicher Aspekt inne. Die Unendlichkeit kann dabei guten Gewissens als *der* Streitpunkt schlechthin in der mathematischen Philosophie betrachtet werden. Unsere Analyse wird das aufzeigen. Die natürlichen Zahlen stellen – im Gegensatz zur Unendlichkeit – ein scheinbar sicheres System dar, über das es keinen Grund zum Streiten gibt. Wir werden sehen, dass dies eine Illusion ist. Wieder wird am Ende der inhatlichen Überlegungen eine Konsequenz entstehen, die für unsere eigene spätere Definition von Bedeutung sein wird. Die letzten beiden Aspekte betreffen nun Methoden und Schlussweisen in der Mathematik. Der erste dieser beiden Aspekte beleuchtet dabei ein typisch formalistisches Thema, der zweite ein intuitionistisches. Trotzdem wird die Analyse zeigen, dass es sinnvoll ist, die Themen von jeweils beiden Seiten zu beleuchten. Die hierbei erhaltenen Ergebnisse werden für unsere Definition der Mathematik entscheidend sein!

Die Behandlung der genannten Aspekte wird immer im gleichen Dreischritt erfolgen: zuerst die Behandlung der intuitionistischen Position, dann die des hilbertschen Formalismus und zum Schluss die eigene Meinung. Der Grund für diese zugegebenermaßen recht eintönige Abhandlungsmethode liegt in ihrer Klarheit. Der rote Faden darf bis zum Kapitel 4 nicht reißen! Obwohl es einen jeweils eigenen Unterabschnitt zur eigenen Meinung bei jedem Aspekt geben wird, heißt das nicht, dass in den anderen Unterabschnitten meine eigene Meinung verschwiegen werden wird. Die dort vertretenen Ansichten sind aber minimal gehalten und besitzen nur einen erläuternden Charakter. Dass ich bei dieser Analyse nur selten gezwungen war, auf diese Weise zu 'intervenieren', ist eine weitere wichtige Einsicht für das letzte Kapitel.

Im letzten Kapitel werden wir uns dann rückblickend fragen, welche Anforderungen an eine Definition der Mathematik zu stellen sind. Wir werden dann die technischen Mittel bereitstellen, anhand derer diese Definition erfolgen kann. Zum Schluss wollen wir diese theoretisch völlig befriedigende Position dem 'Praxistest' unterziehen. Bewährt sich die gegebene Definition auch hier? Wir werden durch saubere Analyse des Begriffs der Wahrheit eine völlig natürliche Erklärung für eine scheinbare Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis erhalten.

Im letzten Kapitel wird es keine Abschnitte zur eigenen Meinung geben. Der Grund ist einfach: Die Currysche Position ist mit meiner Position nahezu identisch. Kleinere Unterschiede werden im Text selbst hervorgehoben.

Zum Stil dieser Arbeit möchte ich zunächst bemerken, dass ich von Zeit zu Zeit auf die 'Wir-Form' zurückgreifen werde – wie auch schon oben geschehen. Insbesondere immer dann, wenn eine neue Erkenntnis gewonnen wird oder wurde, verstehe ich sie als Einladung, den Gedanken mitzugehen. Der Kritik, dass dies zu fehlender Objektivität führen würde, möchte ich durch die Feststellung begegnen, dass ein geschriebener Text (mit Wörtern wie 'weil', 'obwohl' usw.) niemals objektiv sein kann. Durch die 'Wir-Form' wird also keine Objektivität verloren, die nicht ohnehin schon verloren wäre.

Weiterhin möchte ich auf eine stilistische Problematik hinweisen: Die in dieser Arbeit vorgestellten philosophischen Positionen vertreten zumeist einen Doppelcharakter: Einerseits sind sie als Ideen zeitlos, andererseits sind sie häufig in eine klare historische Entwicklung einzuordnen. Es entsteht die Frage nach einer geeigneten Zeitform. Ich habe mich entschieden im 'Normalfall' in dieser Arbeit das Präsens zu verwenden, aber in den Fällen, in denen die Historizität der Ereignisse die meiner Ansicht nach entscheidende Rolle spielt, auf das Präteritum zu wechseln. Dies betrifft insbesondere das nächste Kapitel. Danach werden eher die inhaltlichen Aspekte im Vordergrund stehen und das Präteritum daher nur noch selten anzutreffen sein.

Kapitel 2

Vorstellungen philosophischer Grundpositionen

2.1 Intuitionismus

Ein Versuch, den Problemen der Grundlagenkrise in der Mathematik zu begegnen, stellte der Intuitionismus dar. Sein Hauptvertreter war Luitzen Brouwer (1881-1966). Doch schon vor Brouwer waren einzelne Kernideen dessen, was später den Intuitionismus ausmachen sollte, in der mathematischen Welt vorhanden: Leopold Kronecker (1823-1891) berief sich mit den natürlichen Zahlen schon auf eine intuitive Komponente. Berühmt ist sein Ausspruch hierzu: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." (zitiert in [2, S. 92]) Weitere wesentliche Aspekte, waren seine kritische Haltung zur Unendlichkeit (ob eine bestimmte Zahl unter eine Definition fällt, muss in endlich vielen Schritten entscheidbar sein) sowie seine Ansicht, dass Existenz und Konstruierbarkeit zusammenfallen, vgl. jeweils [2, S. 92].

Brouwer und die Intuitionisten im Allgemeinen griffen diese und ähnliche Ideen nun wieder auf. Brouwer selbst besaß dabei einen allgemeinen philosophischen Standpunkt, den er speziell auch auf die Mathematik überträgt: den Konzeptualismus, vgl. [2, S. 92].

> „Darin ist die Mathematik eine Funktion des menschlichen Intellekts und eine freie Aktivität des Verstandes. Mathematisches Wissen ist ein Produkt dieser lebendigen Tätigkeit und nicht eine Theorie, d.h. ein System von Regeln und Sätzen. Mathematische Objekte sind Denkkonstruktionen des (idealen) Mathematikers. In der Mathematik also gibt es nur das, was im menschlichen Intellekt konstruiert oder konstruierbar ist." [2, S. 94-95]

Gerade durch letztere Einschränkung wollte Brouwer den Antinomien in der Mathematik begegnen. Es stellt sich dann aber sofort die Frage: Was bleibt? Brouwer versuchte die Frage positiv zu beantworten, indem er forderte, „die ganze Mathematik aus den intuitionistischen Prinzipien zu rekonstruieren.“ [2, S. 99] In Anlehnung an das Hilbertsche Programm (s.u.) spricht man auch vom 'Brouwerschen Programm'. Ein entscheidender Gehilfe bei den dazugehörigen Arbeiten war damals Arend Heyting (1898-1980) (er war es auch, der den Intuitionismus ein stückweit transparenter machte; wir werden später noch darauf eingehen). Doch trotz der zunächst intensiven Bemühungen der Intuitionisten und trotz einiger Erfolge (bspw. konnte der Fundamentalsatz der Algebra mit intuitionistischen Mitteln gezeigt werden, vgl. [2, S. 99]), widmete man sich zunehmend seltener dem Brouwerschen Programm, sondern metatheoretischen Fragen, vgl. [2, S. 99].

Kritik allgemein zum Intuitionismus kann aus grundsätzlichen sowie pragmatischen Gesichtspunkten erfolgen:

1. Die grundsätzliche Kritik richtet sich dabei an den vagen Begriff der Intuition, vgl. [2, S. 101]. Was ist intuitiv, was nicht? Welche Denkakte kann der Mensch vollbringen? Welche Konstruktionen sind möglich? Den Beweis für die fehlende Eindeutigkeit des Begriffs der Intuition bietet meines Erachtens die Uneinheitlichkeit der intuitionistischen Anhänger untereinander sowie der vielen Nebenrichtungen (Konstruktivismus, Finitismus, Ultrafinitismus) selbst (die letzten beiden Richtungen werden im Abschnitt zur Unendlichkeit noch kurz vorgestellt). Diese Uneinheitlichkeit ist mit der Vorstellung einer allen Menschen gemeinsamen Urintuition nicht vereinbar.

2. Die pragmatische Kritik richtet sich gegen die Schwierigkeit der intuitionistischen Beweisführung und die inhaltliche Armut der intuitionistischen Mathematik, vgl. [2, S. 101]. Nachdem sich die heute übliche und viel einfachere Mengenlehre ohne bisher erkannte oder vermutete Antinomien bewährt hat, sieht man keinen Grund, auf die 'klassischen Inhalte' der Mathematik zu verzichten.

2.2 Hilbertscher Formalismus

David Hilbert (1862-1943) war der Begründer des Formalismus. Dieser war eine weitere Antwort auf die Grundlagenkrise der Mathematik. Das erklärte Ziel des hilbertschen Formalismus war es, die schon bestehende Cantorsche Mathematik zu sichern – anstatt sie zu ändern. Hilbert erhob schwere Vorwürfe an die Intuitionisten, dass diese die Antinomien dadurch zu vermeiden gesucht hätten, indem sie alles fallen gelassen hätten, was in irgendeiner Art Probleme bereitet hätte. Er sprach – in durch und durch polemischer Art und Weise – gegen die 'Verbotsdiktatur a la Kronecker' und die 'Verstümmelung' der mathematischen Wissenschaft, vgl. [8, S. 134].

Hilbert versuchte die Konsistenz, d.i. die Widerspruchsfreiheit, und Vollständigkeit, d.i. die Herleitbarkeit jeder Aussage oder deren Negation, der Mathematik durch Formalisierung derselbigen und durch die ausschließliche Benutzung finiter Methoden aufzuzeigen. Wir werden in den späteren Abschnitten noch sehr viel ausführlicher darauf eingehen. Wichtig soll an dieser Stelle nur sein, dass die Realisierung obiger Teilziele eine möglichst objektive – und damit für alle, insbesondere für die Intuitionisten, nachvollziehbare – Rechtfertigung der Cantorschen Mathematik liefern sollte und wohl auch geliefert hätte. Man spricht beim Versuch der Umsetzung dieser Teilziele vom Hilbertschen Programm.

Das Hilbertsche Programm ist nach anfänglichen Teilerfolgen (Vollständigkeit einer abgeschwächten Peano-Arithmetik, Gödels Vollständigkeitssatz) mit den sogenannten Gödelschen Unvollständigkeitssätzen gescheitert (die genauen Zusammenhänge werden später beleuchtet). Hilberts Hoffnungen sind mit diesen Ergebnissen endgültig begraben worden.

Hilbert war in erster Linie Mathematiker und kein Philosoph. Seine Leistungen zur Begründung der Mathematik sind daher sehr technisch und auch für diejenigen verwert- und fortführbar, die seine philosophische Position nicht oder nur begrenzt teilen. Neben der Möglichkeit wenigstens Teile der Mathematik formal hinsichtlich Konsistenz und Vollständigkeit zu begründen (relativiertes Hilbertsches Programm) und neben der Möglichkeit, metamathematische Betrachtungen nicht nur im finitären, sondern allgemeiner im konstruktiven Sinne vorzunehmen (verallgemeinertes Hilbertsches Programm), vgl. jeweils [2, S. 111-112], gibt es Gründe ganz anderer Art, die dafür sprechen Mathematik durch ein formalistisches Auge zu betrachten. Wir werden im Kapitel über den Curryschen Formalismus genau darauf eingehen.

Kapitel 3

Vergleich der einzelnen philosophischen Positionen an ausgewählten Themenfeldern

3.1 Haltung zur Entdecker- bzw. Erfinderposition

3.1.1 Intuitionismus

Die Intuitionisten führen in dieser Fragestellung die philosophischen Ansichten Kants direkt und indirekt – über Poincare – fort, vgl. [2, S. 92,93]. Sie sehen damit mathematische Sätze als sogenannte synthetische Urteile a priori.

Dass ein Urteil synthetisch ist, bedeutet dabei, dass in dem jeweiligen Satz ein Aspekt gedacht wird, der vor Aufstellung des Satzes noch nicht vorhanden war, [10, S. 84-86]. Kant nennt diese Urteile daher auch Erweiterungsurteile. Das Beispiel Kants hierzu ist die Gleichung $5 + 7 = 12$, vgl. [10, S. 86-87]. Die Zahl 12 ist hier ein Ergebnis, wurde vorher aber weder in 5 noch in 7 gedacht. Das Gegenstück zu den synthetischen Urteilen sind die analytischen Urteile. In ihnen wird 'lediglich' ein schon bestehender Aspekt beleuchtet. Es entsteht Klarheit, aber keine neue Sache. Der Zusatz „a priori“ bedeutet nun, dass das Urteil ohne Zuhilfenahme der Erfahrung gewonnen wird und zwar durch die reine Aktivität des Verstandes, vgl. [10, S. 84].

Durch diese Übernahme der Kantschen Ideen ist die Haltung zur Entdecker- bzw. Erfinderposition bereits offengelegt: Man kann nur Dinge entdecken, die auch schon vor dem Entdeckungsprozess dagewesen sind. Dass eine Schaffung vonstatten geht, ohne überhaupt auch nur die äußere Umwelt dabei miteinzubeziehen (a priori), ist daher eine klare Positionierung auf Seiten der Erfinderposition.

3.1.2 Hilbertscher Formalismus

Hilbert ist kein Freund tieferer philosophischer Diskussionen. Eine explizite Haltung Hilberts zur Entdecker- bzw. Erfinderposition ließ sich entsprechend auch nicht finden. Und doch scheint es mir möglich, Hilberts Meinung diesbzgl. zumindest indirekt klar zu positionieren. Zunächst ist Hilbert ein Verteidiger der bisherigen Mathematik. Er erachtet sie als 'richtig' an, d. h. wahr im Endlichen, und nicht widersprüchlich im Unendlichen (s.u.). Eine solch verteidigende Einstellung verträgt sich aber eher schlecht mit der Erfinderposition, mit der ein aktiveres Verständnis von Wahrheit einhergeht. Auch das Instrument des Hilbertschen Programms, die formalistische Vorgehensweise *eines* formalistischen Systems (s.u.), das die gesamte Mathematik repräsentieren soll, verträgt sich nicht mit der Erfinderposition, weil in einem solchen gegebenen System, das in Hilberts Wunschvorstellung ja auch noch vollständig wäre, jede mögliche Aussage oder deren Negation bereits einen formalen Beweis besäße. Alle Beweise aber können systematisch aufgezählt werden (heutzutage von einem Rechner (mit unendlichem Speicher) bzw. von einer Turing-Maschine). Es wäre also einem Rechner prinzipiell möglich, für jede Aussage ϕ einen Beweis für ϕ oder einen Beweis für $\neg\phi$ zu finden. Man wird aber wohl kaum davon sprechen, dass ein Rechner diese Wahrheit erfindet. Aufgrund dieser Überlegungen bin ich mir sehr sicher, dass Hilbert die Rolle der Mathematiker nicht als Erfinder, sondern als Entdecker eingestuft hätte (unter der Voraussetzung, dass er sich überhaupt auf diese Frage eingelassen hätte).

3.1.3 Eigene Meinung

Ich selbst kann mit Kantschen oder intuitionistischen Ansichten zur Ontologie von mathematischen Sätzen nicht viel anfangen. Meines Erachtens stellt der Erkenntnisgewinn – und damit auch der Gewinn mathematischer Sätze – einen ständigen Wechselprozess zwischen Akkommodation und Assimilation dar. Anhaltspunkte für Formen der reinen Anschauung oder Ähnliches sehe ich nicht. Der Mensch ist von Beginn seines Lebens – das meint auch schon vor der Geburt – äußeren Einflüssen ausgesetzt und hat von Beginn an ein gewisses – sich ständig änderndes – Fundament der Wahrnehmung.

Auch mit dem Begriff des „synthetischen“ kann ich mich nicht recht anfreunden. Betrachten wir dafür noch einmal das Beispiel $5 + 7 = 12$. Wenn wir uns dies optisch vergegenwärtigen, so heißt dies $IIIII + IIIIIII = IIIIIIIIIIII$. Nun scheint es mir, als wenn die 12 doch schon in 5 und 7 gedacht ist. Denn sie ist nur eine Zusammensetzung der bereits existierenden Teile 5 und 7. Es wird also nicht wirklich etwas Neues geschaffen, sondern Altes in so geschickter Weise kombiniert, dass der Verstand bereit ist, es als Einheit in seinem Geist zu begreifen.

Ist aber solch eine Kombination nun eine Erfindung oder eine Entdeckung?

Die obige Argumentation kann auch für alle nichtmathematischen Aspekte durchgeführt werden (pysikalisch betrachtet erschafft man keine neue Materie). Wenn also Erfindung nur als Schaffung von etwas Neuem verstanden würde, so würde der Begriff niemals verwendet werden können. Daher nehme ich die Position ein, dass mathematische Sätze zwar durch und durch analytisch sind, dass es aber trotzdem sinnvoll ist, bei Kombinationen obiger Art von Erfindungen zu sprechen.

Da ich keinerlei Grund für irgendein vollständiges System Mathematik sehe (in welcher Form auch immer), greift die für die Hilbertsche Position benutzte Argumentation, dass Rechner zu Erfindern würden, bei meiner Position nicht, weil sie stets nur in einem begrenzten von irgendwelchen Menschen erwählten Systemen arbeiteten, aber nie in *dem allumfassenden* System. Die entscheidende Auswahl, wo gesucht werden soll, liegt also nicht in der Hand von Maschinen. Daher kann das Wort 'erfinden' weiterhin sinnvoll benutzt werden.

Es gibt aber noch einen anderen Aspekt, den ich bei dieser Frage für wesentlicher halte als die eigentliche Antwort: So interessant und berechtigt die Fragestellung, ob Mathematiker Entdecker oder Erfinder sind, auch sein mag, für die mathematische Realität spielt sie keine Rolle. Es gibt keinen Grund anzunehmen, dass zwei Mathematiker besser oder schlechter zusammenarbeiten würden, nur weil sie gleiche oder verschiedene Positionen bzgl. der oben genannten Fragestellung bezögen. Die Fragestellung berührt die eigentliche Mathematik also gar nicht!

3.2 Umgang mit der Unendlichkeit

3.2.1 Intuitionismus

Einen der Hauptgründe für die Entstehung der Antinomien sehen die Intuitionisten in der aktualen Unendlichkeit, vgl. [2, 91-92,95]. Darunter versteht man die fertige Gegebenheit von mathematisch unendlichen Objekten, wie z.B. in der fertigen Menge $\{0, 1, 2, ...\}$ (dabei schließt '}' den unendlichen Prozess des Zählens gerade ab). Ihrer Meinung nach sind mathematische Objekte geistige Konstruktionen, vgl. [5, S. 151]. Der Geist wird aber mit der Konstruktion von etwas Unendlichem niemals fertig werden und kann daher den Abschluss (d. h. das '}') auch nicht konstruieren. Ein geistig nicht konstruierbares Objekt ist aber nicht mathematisch (s.o.). Folglich lehnen die Intuitionisten das aktual Unendliche ab.

Das potentiell Unendliche hingegen wird zugelassen. Man steht also insgesamt diesbezüglich in der aristotelischen Tradition. Die Begründung, das potentiell Unendliche zuzulassen, liegt darin, dass man sich das Unendliche – dem Namen entsprechend – als alle endlichen Grenzen überschreitenden, d. h. transzendentalen Prozess vorzustellen hat. Jeder Teil dieses Prozesses, den man sich betrachtet, ist also endlicher Natur. Damit wird das Unendliche im Prinzip zu einer vereinfachenden Sprechweise für das Endliche. Die fortlaufende Überschreitung von Grenzen wird durch die endlich angebbare Regelvorschrift gesichert, vgl. [2, S. 95]. Die Situation ähnelt dem heutigen Umgang in der modernen Mengenlehre mit Klassen (in ZF oder ZFC). Diese sind dort keine mengentheoretischen Objekte. Sie dienen nur der sprachlichen Vereinfachung. Es ist grundsätzlich nur nötig über Mengen und Eigenschaften zu sprechen.

Damit kann der Intuitionist nur über höchstens abzählbare Mengen sprechen (denn die anderen Mengen der modernen Mengenlehre lassen sich nicht Schritt für Schritt konstruieren). An dieser Stelle sind aber noch der Finitismus und der Ultrafinitismus zu erwähnen (man kann sie als intuitionistische Nebenrichtungen verstehen). Diese philosophischen Richtungen verneinen alles Unendliche (auch das Potentielle), vgl. [2, S. 102]. In Frage kommen für mathematische Objekte nicht mehr alle prinzipiell denkbaren Konstruktionen des Geistes, sondern nur die tatsächlich ausführbaren, vgl. [5, S. 159]. Es fehlt also der Unendliche 'Zeitvorrat'. Die Ultrafinitisten sehen dabei – im Gegensatz zu den Finitisten – eine Handlung nur dann als praktisch diskutabel an, wenn die zugrundegelegten Zahlen kleiner als die Summe der Atome im Universum sind. Neben dem zeitlichen Aspekt spielen hier also auch materielle Ressourcen eine entscheidende Rolle. Der 'normale' Intuitionismus stellt also keineswegs eine maximale Einschränkung an die mathematischen Möglichkeiten dar.

3.2.2 Hilbertscher Formalismus

Im Gegensatz zu den Intuitionisten möchte Hilbert die Cantorsche Mengenlehre mit ihrer aktualen Unendlichkeit sowie den unendlich vielen Unendlichkeiten retten: „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können." [7, S. 170]. Dabei ist er sich aber der Problematik des Unendlichen bewusst, weshalb er es auf ähnliche Art und Weise durch endliche Prozesse simulieren möchte, wie die Weierstraßsche Mathematik das unendlich Kleine in der Analysis unnötig gemacht hatte (dort durch Einführung der 'Epsilontik', hier durch finite Methoden), vgl. [7, S. 162]. Sein diesbezüglicher Aufruf nimmt bisweilen schon messianische Züge an: „Durch diese Bemerkungen wollte ich nur dartun, daß die endgültige Aufklärung über das Wesen des Unendlichen weit über den Bereich spezieller fachwissenschaftlicher Interessen vielmehr zur Ehre des menschlichen Verstandes selbst notwendig geworden ist." [7, S. 163]

Hilbert geht aber gar nicht davon aus, dass sich die Unendlichkeit in der Wirklichkeit wiederfinden lässt, vgl. [7, S. 163-165]. Stattdessen übernimmt er hier von Kant die Idee der reinen Vernunft, vgl. [7, S. 170-171,190], wodurch die Unendlichkeit als Vernunftidee keine überprüfbare Wahrheit bildet, sondern (lediglich) einen widerspruchsfreien Begriff bilden kann, vgl. [2, S. 106]. Die Widerspruchsfreiheit selbst muss aber im gesicherten Endlichen aufgezeigt werden, denn „[d]as Operieren mit dem Unendlichen kann nur durch das Endliche gesichert werden." [7, S. 190]. Damit bekommen unendliche Objekte einen ideellen

Charakter und Aussagen, die über solche ideellen Objekte sprechen, werden selbst ideell. Sie werden an die finiten Aussagen adjungiert, „um die formal einfachen Regeln der Aristotelischen Logik zu erhalten.“ [7, S. 174] Inwiefern man bei diesen ideellen Aussagen noch von Wahrheit sprechen kann, wird noch im Abschnitt 'Formale Mathematik und der Wahrheitsbegriff' behandelt werden.

3.2.3 Eigene Meinung

Für mich ist schon der Begriff 'Existenz' eine vage Floskel. Zwar möchte ich der Existenz von Dingen im Allgemeinen nicht widersprechen, aber diese Existenz besagt dann nur, dass irgendein Ding an sich irgendetwas anderes auslöst, das bei mir wiederum durch den Filter der Wahrnehmung zu einer Vorstellung wächst. Genaue Trennmöglichkeiten, also insbesondere eine Aufzählung genau der Elemente eines solchen Dinges scheinen mir nicht möglich. Mit anderen Worten: Schreibt man Mengen eine reale Existenz zu, so kann meines Erachtens nicht zwischen $\{a, b, c\}$ und $\{\{a, b\}, c\}$ unterschieden werden. Feststehende Mengen existieren daher für mich weder im Endlichen noch im Unendlichen. Die mathematische Handhabung stellt schon im Endlichen eine Idealisierung dar.

Wenn aber schon die mathematische Menge im Endlichen eine Idealisierung darstellt, so ist der Schritt in die Unendlichkeit leicht zu gehen. Ich verstehe sie als ein Gedankenspiel. Für dieses Gedankenspiel sehe ich keinerlei grundsätzliche Begrenzungen. Ich kann mir sowohl die Existenz solcher Mengen in diesem Sinne wie auch die Nichtexistenz von ihnen in einem gewissen Sinne vorstellen. Auch der Argumentation, dass man sich nur potentiell unendliche Mengen vorstellen könne, kann ich nicht folgen. Ich möchte behaupten, dass ich mich mir die Menge der reellen Zahlen (also eine überabzählbare Menge) weit besser vorstellen kann als z.B. die Menge aller Kugelschreiber, obwohl letztere endlich ist. Denn nicht die Konstruierbarkeit stellt den Prüfstein zur Denkbarkeit dar, sondern die von der Konstruktion im Allgemeinen unabhängige Struktur, die Beziehungen der Elemente untereinander usw.

Ich bin also der Auffassung, dass mathematische Objekte stets Idealisierungen bilden, also eine mögliche Idee des Verstandes bilden. Dies steht im Gegensatz zu Hilbert und Kant, bei denen dies eine spezielle Eigenschaft des Unendlichen ist. Ich glaube aber auch, dass es dem Verstand möglich ist, diese Ideen zu verneinen, d. h. unendliche Mengen allgemein zu verneinen, bestimmte Eigenschaften unendlicher Mengen zu verneinen (z.B. die Kontinuumshypothese) oder aber auch einfach alle Inhalte zu verneinen (es gibt keine Objekte). Keine dieser Möglichkeiten scheint mir per se mehr begründet zu sein als eine andere. Die Mathematik sollte daher die verschiedenen Auffassungen über das Unendliche repräsentieren.

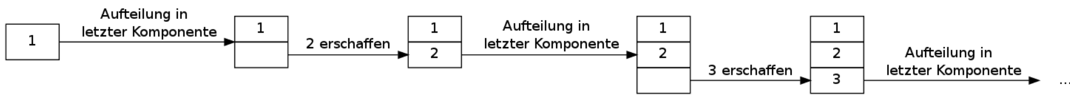

Abbildung 3.1: Schema der 'nackten Zweieinigkeit'

3.3 Ontologie der natürlichen Zahlen

3.3.1 Intuitionismus

Wir hatten oben schon geschrieben, dass Kronecker sich auf die Urintuition der natürlichen Zahlen berief. Brouwer nun sieht Zeit wie Kant „als reine apriorische Form der Anschauung" [2, S. 97]. Er denkt die natürlichen Zahlen als Abstraktion dieses urintuitiven Zeitempfindens: Die verschiedenen getrennten – weil zerfallenen – Momente des Lebens setzen sich demnach abstrahiert – d. h. ohne die entsprechenden zugehörigen emotionalen Inhalte – sukzessive wieder zusammen, vgl. Zitat Brouwers dazu in [2, S. 97-98]. Wesentlicher ist nach Dummett jedoch „die natürlichen Zahlen als geistige Konstruktionen anzusehen, die auf bestimmte Weise durch wiederholte Anwendung der Nachfolgerfunktion auf 0 erzeugt werden." [5, S. 156] Bei Brouwer findet sich hier konkret die Vorstellung der 'nackten Zweieinigkeit', die in Abbildung 3.1 verdeutlicht wird (er beginnt bei 1). Aus der zuletzt gedachten natürlichen Zahl entstehen durch Spaltung die alte Zahl und eine neue Zahl. Offensichtlich entspricht diese transzendentale Vorstellung, vgl. auch [2, S. 140], genau der oben behandelten potentiellen Unendlichkeit. Dummett stellt fest, dass es „keine nicht-isomorphen Strukturen geben [kann], die $\mathbb{N}$ jeweils mit gleich gutem Anspruch repräsentieren könnten." [5, S. 156] In diesem Sinne sind die natürlichen Zahlen also eindeutig ohne aber eine fertige Struktur zu sein, vgl. [5, S. 156].

3.3.2 Hilbertscher Formalismus

Im Gegensatz zum Intuitionismus sind bei Hilbert die natürlichen Zahlen keineswegs als intuitive Grundlage der Mathematik zu akzeptieren. Auch den Versuch Freges, die natürlichen Zahlen über Begriffsumfänge zu definieren, verurteilt er wegen deren Unzulänglichkeit und Unsicherheit und deren 'Verantwortung' für die Grundlagenkrise, vgl. [8, S. 137]. Stattdessen setzt Hilbert an den Anfang das Zeichen als *das* objektive Instrument.

Um sich nun selbst treu zu bleiben, bleibt ihm nun schon keine andere Wahl mehr als auch natürliche Zahlen als besondere Zeichen zu interpretieren. Er spricht von Zahlzeichen, vgl. [8, S. 138-139]. Er definiert das Zeichen 1 als Zahl, sowie weiterhin alle 'Zeichen' – heute würde man wohl eher von Zeichenfolgen sprechen – die mit 1 beginnen und enden, und die alternierend durch + verbunden sind; etwa $1 + 1$ oder $1 + 1 + 1$, vgl. [8, S. 138]. Jede Zahl bildet sich also durch

Anfügen von +1 an eine schon bestehende Zahl. Die anderen uns vertrauten Ziffernfolgen wie z.B. 5 oder 10 sind für Hilbert lediglich Abkürzungen für $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ bzw. $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Damit bekommen aber auch Gleichungen eine rein syntaktische Bedeutung: So ist $5 + 7 = 12$ nicht etwa die Erschaffung von etwas Neuem – wie bei Kant –, sondern schlicht die Feststellung, dass wir auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens das Zahlzeichen $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ vorfinden.

Zum Operieren auf diesen Zeichen sowie schon bei der obigen Definition der Zahlen benutzt Hilbert eine Methode, die stark an Induktion/Rekursion erinnert. Nach Hilbert ist aber dieses schrittweise Aufbauen von Zeichenketten bei der Definition sowie der schrittweise Abbau bei Beweisen „dem Wesen nach verschieden von demjenigen Prinzip, welches als Prinzip der vollständigen Induktion oder Schluß von n auf $n+1$ in der höheren Arithmetik eine so hervorragende Rolle spielt.“ [8, S. 139] Doch welche Unterschiede bestehen? Hat Hilbert doch nur ein System einer 'Urintuition' benutzt, die dann also doch vor der Zahl und damit vor dem Zeichen steht? Ich halte die folgenden Unterschiede zwischen beiden Methoden für entscheidend:

1. Die mathematische Induktion ist semantisch, Hilberts Art der Zahlzeichenanalyse hingegen syntaktisch (arbeit auf den Zeichen und nicht auf ihrer Bedeutung)

2. Die mathematische Induktion impliziert die Gültigkeit einer Aussage für unendlich viele Instanzen, nämlich für alle natürlichen Zahlen. Zwar können wir uns auch bei den Zeichenreihen diese als unendlich oft vertreten denken, doch wird dies nicht gefordert. Es wird nur angegeben, wie aus einer beliebigen Zeichenkette gewisser Art eine neue Zeichenkette gleicher Art erstellt wird bzw. wie man aus der Lösung einer kürzeren Zeichenkette die einer längeren Erhält. Über einen zugehörigen Grundbereich, etwa die Menge aller Zeichenketten, wird nicht gesprochen.

Hilbert erkennt, dass es nicht möglich ist, in gleicher Weise die höheren Zahlbereiche abzuhandeln oder auch nur über unendlich viele natürliche Zahlen zu sprechen, vgl. [8, S. 140]. Daher ist es in diesen Fällen nötig, die entsprechenden Zahlen oder Mengen von Zahlen über ihre Eigenschaften zu definieren, d. h. durch die mit ihnen verbundenen formalisierten Axiome. Die Axiome, sowie ebenfalls die Formeln und Beweise nehmen dann die Rolle ein, die oben die Zahlzeichen innehatten, vgl. [8, S. 140]. Wir gehen darauf im nächsten Abschnitt noch genauer ein.

3.3.3 Eigene Meinung

Ich stimme mit den Intuitionisten darin überein, dass die natürlichen Zahlen für die Menschen in gewisser Hinsicht etwas Wohlbekanntes bilden. Dieses Wohlbekannte betrifft aber meines Erachtens nicht den ontologischen Status der natürlichen Zahlen, sondern lediglich ihr Zusammenwirken miteinander, d. h. die Beziehungen, die zwischen Ihnen gelten. Insbesondere halte ich es für nicht plausibel, dass man sich die natürlichen Zahlen zwangsläufig als lineare Kette vorzustellen hat, dass man sie also ordinal denken muss. Es ist genauso möglich, den kardinalen Zusammenhang zu sehen und sie bspw. als Punktmengen in verschiedenen Anordnungen zu betrachten (wie z.B. auf den Lernkarten für Kinder). Für mich bilden diese beiden grundsätzlich verschiedenen Vorstellungen (und es mag noch viele mehr geben) das Paradebeispiel für eine nicht isomorphe Elementaräquivalenz, d. h. ein Beispiel von Strukturen, die zwar grundverschieden sind, aber durch ihre extensionalen Eigenschaften voneinander nicht zu unterscheiden sind. Weil man aber die intensionalen Unterschiede nicht bemerkt, entsteht der Schein gleicher Strukturen und einer damit verbundenen Urintuition (und wenn es – wie bei Hilbert das Zeichen – eine übergeordnete Urintuition ist). Es ist philosophisch höchst interessant, dass dieser 'Gleichschritt' im Unendlichen endet und sich dort der ordinale von dem kardinalen Gedanken extensional unterscheiden lässt.

Das Wohlbekannte der natürlichen Zahlen hat meiner Meinung nach empirische wie auch evolutionsbiologische Gründe: empirisch, weil wir den natürlichen Zahlen im Alltag ständig ausgesetzt sind; evolutionsbiologisch, weil das Begreifen von Einheiten bedeutend älter sein muss als der Mensch, sich nämlich schon bei vielen oder allen Tieren findet. Der evolutionsbiologische Teil stellt dabei für mich keine Urintuition dar, schon weil sich dieses Fundamentum von Mensch zu Mensch – wenn auch kaum merklich – unterscheiden dürfte; aber auch weil unsere Vorstellung sich nicht von den empirischen Erfahrungen loskoppeln lässt.

Wir halten fest: Selbst bei einer scheinbar so einfachen Sachlage wie bei den natürlichen Zahlen, wird es keinen ontologischen Frieden geben. Der Versuch einer diesbezüglichen Einigung ist eine Illusion. Philosophisch kann man nun darüber diskutieren, ob dies eher der Verlust der Einheitlichkeit oder etwa der Gewinn von Vielfältigkeit ist. Mathematisch bleibt in jedem Fall die Notwendigkeit, die natürlichen Zahlen durch ihre Eigenschaften ins Leben zu rufen.

3.4 Formale Mathematik und der Wahrheitsbegriff

3.4.1 Intuitionismus

Genauso wie die Logizisten rütteln die Intuitionisten nicht am eigentlichen Wahrheitsbegriff. Aussagen mathematischer Theorien können ihrer Meinung nach sinnvoll die Wahrheitswerte wahr und falsch zugewiesen werden, vgl. [5, S. 149].

Damit scheint es zunächst so, als hätten die Intuitionisten einen platonistischen Wahrheitsbegriff. Bevor wir die obige Annahme widerlegen, müssen wir uns mit Aussagen beschäftigen, deren Wahrheitsgehalt (bisher) nicht erkannt werden konnte und von denen man nicht weiß, ob dies jemals gelingen wird. Das sind dann notwendig Aussagen, die das Unendliche miteinbeziehen. Denn im Endlichen lässt sich eine jede Aussage extensional prüfen, das heißt durch Überprüfung des Endprodukts verifizieren/falsifizieren; im Unendlichen gibt es aber keine Produkte, weil die aktuale Unendlichkeit – wie oben beschrieben – nicht zugelassen wird. Die Überprüfung der Aussage kann dann also nur durch gedachten nicht endenden schrittweisen Nachvollzug vonstatten gehen. Es ist dann also möglich, dass keine Überprüfung bisher zu einer Bestätigung oder Widerlegung der Aussage geführt hat und es ist nicht sicher, ob solch eine Überprüfung überhaupt möglich ist.

Im Gegensatz zum Platonisten, für den eine solche Aussage trotzdem wahr oder falsch sein muss – auch wenn man nicht weiß, welche der beiden Möglichkeiten zutrifft –, hält der Intuitionist eine solche Aussage nicht für auswertbar, vgl. [5, S. 151-153]. Um die Wahrheit einer Aussage herauszufinden, benötigt der Mathematiker also einen Beweis. „Dabei handelt es sich nicht um einen Beweis in einem formalen System, sondern um einen intuitiv annehmbaren Beweis, das heißt, um eine bestimmte Art geistiger Konstruktion.“ [5, S. 151] Die Mathematik findet daher nach Meinung der Intuitionisten im Kopf – und nicht auf dem Papier – statt. Sie stehen daher formalen Systemen zur Begründung der Mathematik und Erklärung der Wahrheit skeptisch gegenüber.

Nichtsdestotrotz vollendete Heyting 1930 die bereits von Kolmogorov und Glivenko gestarteten Bemühungen der Formalisierung der intuitionistischen Logik, vgl. [2, S. 99]. Allerdings ist für Heyting die „intuitionistische Mathematik eine Denktätigkeit und jede Sprache, auch die formalistische, ist für sie nur Hilfsmittel zur Mitteilung.“ [6, S. 42] Das formale System stellt dabei nach Heyting nicht deswegen eine Hilfe da, weil man die Voraussetzungen im axiomatischen Sinne abgleichen muss, sondern wegen der größeren „Bündigkeit und Bestimmtheit“ [6, S. 42] des formalen Systems gegenüber der normalen Sprache.

Brouwer hingegen hat solche formalen Systeme als sinnlos eingeschätzt: Er beruft sich darauf, dass Hilbert und die Formalisten, um die Güte ihrer Systeme (d.i. die Widerspruchsfreiheit und die Negationsvollständigkeit) zu beweisen, eine Metatheorie der Mathematik benutzen, d. h. Mathematik – und zwar intuitionistische – bereits vor dem eigentlichen formalen System anwenden, vgl. [1, S. 334]. Weiterhin reicht ihm die Widerspruchsfreiheit für die Wahrheit – wie von den Formalisten angestrebt – nicht aus; er schreibt:

> „[E]ine durch keinen widerlegenden Widerspruch zu hemmende unrichtige Theorie ist darum nicht weniger unrichtig, so wie eine durch kein reprimierendes Gericht zu hemmende verbrecherische Politik darum nicht weniger verbrecherisch ist.“ [1, S. 333]

Einen weiteren Grund, warum die Mathematik keine formale Rechtfertigung von 'Außen' erhalten sollte, nennt Dummett: Eine korrekt betriebene Mathematik benötige seiner Meinung nach keine solche Rechtfertigung, da ihr „ihre eigene Rechtfertigung ins Gesicht geschrieben“ [5, S. 149] sei.

Eine weitaus liberalere Ansicht zur Formalisierung vertritt Kolmogorov in seinem Artikel 'Zur Deutung der intuitionistischen Logik': Er ist der Meinung, dass die Formalisierung der intuitionistischen Logik schon deswegen sinnvoll sei, weil auf dem formalen System selbst diejenigen mit ihr arbeiten könnten, die die intuitionistische Logik ablehnten. Sein Vorschlag zielt dabei auf eine andere Interpretation der Aussagenvariablen ab, nämlich im Sinne von Aufgaben, vgl. [11, S. 59]. Über die Formalisierung kommt Kolmogorov in der zweiten Hälfte seines Artikels zu dem Schluss, dass auch für den 'intuitionistisch denkenden Menschen' die Interpretation einer Aussagenvariable als Aufgabe sinnvoller sei. Die sonst entstehenden Probleme, werden im nächsten Abschnitt behandelt.

3.4.2 Hilbertscher Formalismus

Es scheint zunächst widersinnig über den Gehalt formaler Mathematik im Formalismus zu sprechen. Zu eindeutig gibt bereits der Name 'Formalismus' das Resultat vor. Und doch – so denke ich – lohnt sich eine Analyse.

Entgegen einer oft vorzufindenen Meinung war Hilbert nicht an Formalismen an sich interessiert. Bei ihm waren Formalismen nur Mittel zum Zweck; dem Zweck nämlich, in der Mathematik alle Zweifel, Halbwahrheiten sowie die Vorkommen verschiedener Wahrheiten zu beseitigen, vgl. [8, S. 131]. Zweifel lassen sich aber offenbar nicht durch subjektive Begründungen ausräumen. Hilbert brauchte also ein möglichst objektives Begründungsmittel. Dieses fand er im manipulieren von Zeichenketten.

Im formalistischen Ansatz versucht Hilbert nicht das Wesen der behandelten Dinge, sondern nur die Beziehungen, die zwischen den mathematischen Objekten bestanden, formal zu erfassen. Dazu benutzt er – wie heute auch noch bei der Untersuchung von Theorien üblich – Axiome (auch logische) und Schlussregeln, vgl. [8, S. 142] (etwas genauer werden wir im Kapitel über den Curryschen Formalismus auf den Aufbau eines solchen Systems eingehen). Damit „[bringt] Hilberts formalistische Methode [...] das Maß an Ehrlichkeit und Klarheit mit sich, nach dem Mathematiker von jeher streben: Sie ist frei von Interpretationsspielräumen jeglicher Art.“ [9, S. 33]

Dadurch ist aber noch nicht geklärt, welcher Teil der Mathematik formalisiert werden sollte. Diesen Punkt beantwortet Hilbert durch die Forderung, die reelle Analysis zu formalisieren (in [7, S. 179] spricht er hingegen von den arithmetischen Axiomen), denn sie ist nach Hilberts Meinung das am besten erforschte Gebiet in den Wissenschaften überhaupt und Grund zum Zweifel an den Ergebnissen habe sich seiner Meinung nach niemals eingestellt, vgl. [8, S. 133-134]. Doch entscheidender, um seine Gegner zu überzeugen, ist nicht die Sicherheit, die er oben kommentiert, sondern die Mächtigkeit der reellen Analysis. Wenn es Hilbert gelänge das von ihm 'Erwählte' zu formalisieren und anschließend die Widerspruchsfreiheit des Erwählten zu zeigen, so wäre noch nichts gewonnen, wenn das Erwählte nicht in einem gewissen Sinne die 'ganze Mathematik' repräsentierte.

Die Repräsentation der 'ganzen Mathematik' soll nun dadurch gelingen, dass die verschiedenen bekannten Teilgebiete der Mathematik, auf die reelle Analysis so zurückgeführt werden können, dass die relative Widerspruchsfreiheit gewährleistet ist, d. h. dass die Widerspruchsfreiheit der reellen Analysis die Widerspruchsfreiheit des jeweiligen Teilgebietes der Mathematik impliziert. Kann die Widerspruchsfreiheit der reellen Analysis selbst nachgewiesen werden, so ist die ganze Mathematik als widerspruchsfrei bewiesen. Hier soll es nun die Metamathematik sein, die zum Ziel führt, vgl. [8, S. 146]. Es stellt sich sofort die berechtigte Frage, was gewonnen wird, wenn zur Begründung der Mathematik selbst wieder Mathematik benutzt wird. Als Antwort lässt sich feststellen, dass Hilbert in der Metamathematik nur finitistische Argumentationen zulässt. Der Begriff bleibt dabei vage, scheint aber den primitiv rekursiven Funktionen zu entsprechen, vgl. [2, S.,107]. In einer solchen endlichen Mathematik ist der Wahrheitsbegriff unproblematisch oder zumindest bedeutend unproblematischer, weil die Wahrheit einer finitistischen Aussage zumindest grundsätzlich durch Überprüfung aller Möglichkeiten verifiziert werden kann. Auch die Zeichenketten an sich sind endlich und damit unproblematisch.

Überdies ist Hilbert der Meinung, dass jeder Satz der endlichen Mathematik – er nennt diese Sätze real – auch einen finiten Beweis besitzt. In diesem Sinne ist eine Beweisführung mit Mitteln der unendlichen Mathematik nur ein bequemes Hilfsmittel. Er ist darüber hinaus der Ansicht, dass es ein finites Verfahren gibt, um einen allgemeinen Beweis für einen realen Satz in einen finiten umzuwandeln. Diese Behauptung aufzuzeigen, ist das sogenannte Problem der Konservativität, vgl. jeweils [2, S. 107-108].

Doch es gibt einen weiteren Punkt, der für Hilbert so selbstverständlich erscheint, dass er ihm weit seltener als der Widerspruchsfreiheit Beachtung schenkt: das Problem der Vollständigkeit eines axiomatischen Systems, d. h. die Möglichkeit, für jede Aussage ϕ der zugehörigen Sprache stets ϕ oder $\neg\phi$ beweisen zu können. Der Repräsentant der 'ganzen Mathematik' müsste vollständig sein, zumindest bzgl. realer Sätze, vgl. [2, S. 108]. Hilbert gibt seinem Vertrauen, dass dies keine Probleme bereiten werde, – neben der Nichterwähnung in vielen Texten – durch die Kritik am „Ignorabimus“ und durch den Ausspruch „Wir müssen wissen. Wir werden wissen.“ (zitiert in [9, S. 47]) Ausdruck.

Das Finden eines formalen Repräsentanten (Der einzige Kandidat ist die reelle Analysis) zusammen mit dem Nachweis der zuvor geschilderten Eigenschaften (Konsistenz, Vollständigkeit und die Verbindung zu den anderen Teilbereichen der Mathematik) ist das Ziel des oben schon benannten Hilbertschen Programms. Denn genügt die Formalisierung der reellen Analysis diesen Ansprüchen, so ist sie ein sicheres, (all)mächtiges, die Mathematik repräsentierendes System.

Zunächst schienen sich die Ziele des Programms erfüllen zu lassen, denn es konnten Teilerfolge vorgezeigt werden: Es gelang die Vollständigkeit einer eingeschränkten Peano-Arithmetik (ohne Induktion) zu zeigen, vgl. [2, S. 110]. Ferner gelang Gödel der Vollständigkeitssatz. Dieser besagt – grob gesprochen –, dass eine prädikatenlogische Formel genau dann unter Voraussetzung einer Menge von Formeln allgemeingültig ist, wenn sie unter der gleichen Voraussetzung beweisbar ist. Tatsächlich gelingt Hilbert selbst bspw. neben der Formalisierung der reellen Analysis auch die Formalisierung der Geometrie. Zwischen beiden kann er dabei eine Verbindung herstellen, indem er einen gewissen Zahlbereich der reellen Analysis betrachtet, derart dass jede formale Aussage der Geometrie durch Zeichenmanipulation in eine zugehörige Aussage dieses Zahlbereichs umgewandelt wird – und umgekehrt – und dass dabei ferner die Aussage der Geometrie genau dann beweisbar ist, falls die korrespondierende Aussage in dem Zahlbereich beweisbar ist, vgl. [9, S. 34] (die 'Genau-dann-wenn-Beziehung' wird dabei durch die Metamathematik gewonnen). Wäre dann nämlich die Geometrie widersprüchlich, so ließe sich dort jede Aussage beweisen. Sei eine solche Aussage ϕ_G. Die korrespondierende – und damit ebenfalls beweisbare Formel – sei ϕ_Z. Sei $\phi_{G'}$ die zu $\neg\phi_Z$ korrespondierende Formel. Da die Geometrie als widersprüchlich angenommen wurde, ist $\phi_{G'}$ beweisbar, also auch $\neg\phi_Z$. Also sind ϕ_Z und $\neg\phi_Z$ beweisbar. Der Zahlenbereich ist somit widersprüchlich, also auch die reelle Analysis. Kontraposition ergibt: Ist die relle Analysis Widerspruchsfrei, so auch die Geometrie. Weiterhin sichert die von Hilbert vorgenommene Konstruktion auch die relative Vollständigkeit, vgl. [12, S. 80]. Auf ähnliche Weise können andere relevante Teilgebiete – z.B. aus der Physik, vgl. [8, S. 136] – auf die Analysis zurückgeführt werden. Die reelle Analysis ist also der Prüfstein nicht nur für die Vollständigkeit, sondern auch für die Widerspruchsfreiheit.

Der von Gödel erst nach diesen Überlegungen Hilberts veröffentlichte 1. Gödelsche Unvollständigkeitssatz, der nur mit einfachsten Sätzen über natürliche Zahlen bewiesen wurde, besagt nun aber, dass jedes widerspruchsfreie formale System, das die Peano-Arithmetik zu formalisieren imstande ist, unvollständig ist, vgl. [9, S. 200]. So zeigte dieser Satz die Unmöglichkeit auf, dass das von Hilbert als widerspruchsfrei benötigte formale System der reellen Analysis (das somit die Peano-Arithmetik umfasste), dann auch noch vollständig sein könnte. Die Annahme Hilberts, dass sich jedes mathematische Problem durch ein formalisiertes System lösen lassen könnte, erwies sich als falsch. Doch zumindest für die Widerspruchsfreiheit ist dieses Ergebnis nicht direkt hinderlich.

Wir haben oben schon geschrieben, dass mit den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen der 'Traum' von Hilbert ein jähes Ende fand. Dies liegt aber in erster Linie an dem 2. Gödelschen Unvollständigkeitssatz (der aber zeitgleich mit dem 1. Unvollständigkeitssatz von Gödel veröffentlicht wurde), der besagt, dass jedes widerspruchsfreie formale System, das die Peano-Arithmetik beinhaltet, seine eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann, vgl. [9, S. 226]. Also kann die von Hilbert formalisierte Mathematik – wenn sie widerspruchsfrei ist – ihre eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen. Insbesondere kann dann die finite Mathematik (die sicherlich nicht mehr kann) die Widerspruchsfreiheit der Mathematik nicht beweisen.

Damit war der Sinn des Hilbertschen Formalismus endgültig erloschen; nicht aber der Formalismus selbst. Denn Hilbert betrachtete nicht beliebige formale Systeme, sondern die zur 'handelsüblichen' Mathematik gehörenden. Die Untersuchung dieser formalen Systeme brachte im Endlichen *die* Wahrheit und im Unendlichen eine Idee der reinen Vernunft hervor (s.o). Doch Wahrheit ist bei Hilbert ein – meist implizit – benutzter Begriff, der über den formalen Systemen steht und von ihnen unabhängig ist. Damit trägt sie einen platonistischen Charakter.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Hilbert formale Systeme zwar zur Wahrheitsfindung nutzt, sie aber selbst nicht als Wahrheit betrachtet. Die Bürde eines über allem fassbaren thronenden Wahrheitsbegriffs wird er nicht los. Damit ist Hilbert für mich – obwohl er der eindeutige Begründer des Formalismus ist – für mich gar kein Formalist im eigentlichen Sinne.

3.4.3 Eigene Meinung

Die Idee einer allgemeinen Wahrheit halte ich für Illusion. Darum war Hilberts Version des Formalismus auch nicht tragbar. Die Frage nach Wahrheit scheint mir nicht weniger unsinnig als die alleinstehende Frage nach der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, bspw. des Ereignisses 'morgen regnet es'. Die Frage ist nicht sinnvoll, solange ich nicht weiß, wo dieses morgen sein wird und von welchem Zeitpunkt aus die Frage ursprünglich gestellt wurde. Genauso kann ich über Wahrheit nur dann reden, wenn ich weiß, was als wahr anerkannt werden soll.

Die Ansicht, dass es eine allumfassende Wahrheit gibt, hat empirische Ursachen. Kehren wir noch einmal zu unserem Regenbeispiel zurück: Wenn ich einen anderen Menschen frage, ob es morgen regnen wird, so wird er mir vermutlich auch ohne die Anforderung meines 'Wetterbereichs' die entsprechenden Informationen geben, sofern er den Wetterbericht gelesen (und verinnerlicht) hat. Die Antwort bleibt sogar dann noch sinnvoll, wenn derjenige aus einer anderen Stadt kommt und er von seinem Wetter spricht. Die Abweichungen sind nur minimal. Je größer jedoch die Entfernung von dem Ort, wo er über das Wetter Bescheid weiß, zu dem Ort, wo ich wohne, ist, desto kleiner ist auch die für mich relevante Information, die ich aus der Frage entnehmen kann. Ich denke das Gleiche passiert auch bei dem Wahrheitsbegriff: In unserem alltäglichen Leben bekommen wir durch unseren Umgang mit den Begriffen Wahrheit und Lüge Vorstellungen, die in den wesentlichen Eigenschaften sehr ähnlich sind. Daher merken wir die Unterschiede nicht. Trotzdem sind sie da! Erst dort, wo kein alltäglicher Austausch und keine alltägliche Annäherung stattfinden können, werden die unterschiedlichen Vorstellungen offenbar.

Mit den unendlichen Mengen oder auch nur mit den – wie bei den Ultrafinitisten – sehr großen endlichen Mengen tritt genau dieser Fall des Nichtalltäglichen ein. Dies ist aber kein allein mathematisches Phänomen. Ich erinnere mich noch an eine sehr lebhafte Diskussion meiner Schulzeit im Fachbereich 'praktische Philosophie', bei der die Frage erörtert wurde, ob absichtliche Irreführung durch Verschweigen von Informationen eine Lüge ist. Das Ergebnis zeigte, dass die Begriffe Lüge und Wahrheit keineswegs einheitlich benutzt werden (und dies in einem endlichen, vollständig unproblematischen Bereich). Wir halten fest: Wahrheit ist ein vager Konsensbegriff. Für die Mathematik muss seine Bedeutung angepasst oder aber der ganze Begriff verworfen werden.

So sind die intuitionistischen Methoden durchaus haltbar und die Ergebnisse Hilberts durchaus brauchbar, auch wenn man die entsprechenden Überzeugungen von Brouwer und Hilbert nicht teilt. Es muss nur eine Absicht (im weiteren Sinne) geben, in der die entsprechenden Vorgehensweisen eine Berechtigung erhalten. Ein guter Begriff von Wahrheit bzw. ein entsprechender Ersatz müssen das berücksichtigen! Kolmogorov schlägt durch die Intepretation der intuitionistischen Logik als Aufgabenrechnung dafür nun einen Weg ein, der – wie wir im nächsten Kapitel sehen werden – sehr fruchtbar ist. Es ist sehr sinnvoll, verschiedene intuitive Begründungen – welcher Natur auch immer – zu geben, um andere dazu zu bewegen, einen Zugang zu einem bestimmten System zu finden. Je vielfältiger die Zugänge dabei sind, desto vielfältiger werden auch die Ergebnisse ausfallen.

Ich möchte zum Schluss dieses Absatzes noch die Auffassung kommentieren, dass geistige Aktivität mit formalistischen Methoden wegen deren Starrheit unvereinbar sei. Tatsächlich richtig ist, dass ein einzelnes, festes, formales System der Aufgabe der Veränderung nicht gewachsen ist. Wenn sich aber die Anforderung stellt, ist es ohne Probleme möglich, ein anderes formales System zu betrachten, das die nötigen Veränderungen mit sich bringt. Viele der vorherigen Ergebnisse dürfen dabei direkt oder modifiziert übernommen werden. Mit einem – wenn man so will – System von Systemen lösen wir das Problem auf natürlichste Weise. Wenn nun behauptet wird, dass dies aber nicht der geistigen Aktivität entspräche, so ist dies wieder eine ontologische Frage, die keinerlei Auswirkungen auf die mathematischen Inhalte hat. Es gibt keinen nicht-mystisch-religiösen Grund, formale Systeme zur Erfassung der wesentlichen Eigenschaften und Beziehungen von Denkprozessen nicht zuzulassen.

3.5 Konstruktivität und das Tertium non datur

3.5.1 Intuitionismus

Brouwer wie auch alle anderen Intuitionisten verneinen das Tertium non datur, d. h., dass stets $a \vee \neg a$ gilt. Brouwer sah diesen Ausschluss des Dritten dabei als äquivalent zur Forderung Hilberts an, dass sich jedes Problem der Mathematik lösen lasse. Brouwer äußert sich zu den beiden Forderungen wie folgt:

> „Meiner Überzeugung nach sind das Lösbarkeitsaxiom und der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beide falsch, und ist der Glaube an sie historisch dadurch verursacht worden, dass man zunächst aus der Mathematik der Teilmengen einer bestimmten endlichen Menge die klassische Logik abstrahiert, sodann dieser Logik eine von der Mathematik unabhängige Existenz a priori zugeschrieben und sie schließlich auf Grund dieser vermeintlichen Apriorität unberechtigterweise auf die Mathematik der unendlichen Mengen angewandt hat." [1, S. 330]

Brouwer erhebt – wie bereits oben beschrieben und im Zitat noch einmal verdeutlicht – den Vorwurf, dass der Übergang von den endlichen Gesetzmäßigkeiten zu den Unendlichen zu sorglos geschehe. Das Tertium non datur ist eine entsprechende Folge hiervon.

Aber auch aus dem Gesichtspunkt der Konstruktivität muss Brouwer das Tertium non datur verneinen. Wie schon Kronecker ist auch er der Meinung, dass ein Existenzbeweis eine Konstruktion erfordert; nämlich eine tatsächliche oder eine, deren prinzipielle Möglichkeit dem Verstand aufgezeigt wird. Würde man unter dieser Annahme das Tertium non datur akzeptieren, so gälte für jedes φ die Aussage $\exists x(\varphi(x)) \vee \neg\exists x(\varphi(x))$. Mithin folgte aus einem Widerspruch mit der Annahme $\neg\exists x(\varphi(x))$ die Existenzaussage $\exists x(\varphi(x))$ ganz ohne Konstruktion, vgl. [2, S. 96].

Doch warum sträuben sich die Intuitionisten gegen diese Form der Existenzbeweise? – denn dieser Punkt findet sich bei allen Intuitionisten und nicht nur bei Brouwer – Wiederum ist die Unendlichkeit und das Fehlen aktualer mathematischer Objekte der entscheidende Hinweis: Da eine extensionale Überprüfung einer Existenzaussage im unendlichen Fall versagt (s.o.), bedarf es einer geistigen Konstruktion, um solch ein Objekt überhaupt zu denken. Eine solche Konstruktion von etwas Unendlichem muss dabei als durch die endliche im Geiste vorhandene Beschreibung gedacht werden, vgl. [5, S. 154]. Nur mit dieser Beschreibung – und nicht mit dem Objekt selbst(!) – kann gearbeitet werden. Daher „müssen die Objekte der intuitionistischen Mathematik im allgemeinen als intensionale Objekte angesehen werden;" [5, S. 155] Selbst extensional betrachtet gleiche Funktionen können daher durch verschiedene Beschreibungen verschieden sein im Sinne des Intuitionismus, vgl. [5, S. 155]. Die Existenz eines Objektes – wie im obigen Widerspruchsbeweis festgestellt – besitzt hingegen keine Konstruktion, ist also auch nicht intensional und folglich kein mathematisches Objekt.

Der obige beschriebene Gedankengang führt zu einem – von Kolmogorov in [11, S. 64-65] behandelten – sehr unbefriedigenden Effekt: Können wir keine solche Konstruktion finden, die wir zur Verifizierung von $\exists x(\varphi(x))$ benötigen, so ist es keineswegs möglich, einfach $\neg\exists x(\varphi(x))$ zu konstatieren; denn der Ausdruck $\exists x(\varphi(x))$ ist sinnleer, weil man nur über das nachdenken kann, was man denken kann. Wenn aber Existenz das Denkbare ist, dann ist Nichtexistenz nicht denkbar, also kein Teil der Mathematik. Damit wird $\exists x(\varphi(x))$ stets zu einer Aussage, die

Widerlegbar	**Falsch aber nicht widerlegbar**	**Wahr aber nicht beweisbar**	**Beweisbar**

Abbildung 3.2: Schematische Darstellung einer 'Wahrheitshierarchie'

man erst dann sinnvoll äußern kann, wenn man ein solches x schon gefunden hat. Trotzdem erhebt die vorstehende Aussage selbstverständlich den Anspruch, zeitlos zu sein. Diesen Spagat bewältigt Kolmogorovs Aufgabenrechnung, vgl. [11, S. 65]. Denn die Aufgabe ein x zu finden, so dass $\varphi(x)$ gilt, lässt sich unabhängig vom aktuellen Kenntnisstand formulieren. Eine mögliche Konstruktion für ein solches x nennt Kolmogorov dann Lösung. Er resümiert: „Somit findet man keinen Gegenstand mehr übrig, den man als Existenzaussage im eigentlichen Sinne zu bezeichnen hätte.“ [11, S. 65]

Doch damit der Probleme noch nicht genug: Die obige Betrachtung zeigt nämlich auch, dass eine herkömmliche Interpretation der Negation als falsche Aussage nicht möglich ist (sonst hätten wir $\neg\exists x(\varphi(x))$). Brouwer sieht sich daher gezwungen $\neg a$ als $a \to \perp$ (der Hammer ist der Widerspruch oder die Absurdität) zu definieren, vgl. [11, S. 64], – ich möchte sagen *um*zudefinieren. Denn sicherlich wird man zwar $\neg a$ als Folgerung von $a \to \perp$ akzeptieren. Doch warum sollte eine Aussage nicht mal falsch sein, auch wenn sie zu keinem Widerspruch führt? Hier entsteht im negativen die gleiche Lücke wie im Positiven zwischen der Widerspruchsfreiheit und der Wahrheit, vgl. Abbildung 3.2. Es ist bemerkenswert, dass Brouwer Hilbert diesen Fehler bei dessen Suche nach Widerspruchsfreiheit so massiv vorwirft (s.o.), ihn aber vor der 'eigenen Haustür' nicht bemerkt.

3.5.2 Hilbertscher Formalismus

Hilbert hält im Gegensatz zu den Intuitionisten an den klassischen Methoden fest. Er akzeptiert also insbesondere Existenzbeweise, auch wenn sie mit keiner Konstruktion einhergehen, und er hält auch das Tertium non datur für eine sichere Regel, wie sich indirekt aus der Aufnahme seiner logischen Axiome, vgl. [7, S. 177-178], erkennen lässt (Das Axiom $\neg\neg A \to A$ entspricht – mit den anderen Axiomen – dem Tertium non datur).

Warum er Konstruktivität für nicht erforderlich hält, erklärt er in [7, S. 162-163]: Die Berechtigung eines Begriffs hängt demnach neben der mit ihm einhergehenden Widerspruchsfreiheit nur noch von dessen Erfolg ab. Dies wiederum begründet er an der geschichtlichen Entwicklung der komplexen Zahlen. Man habe die Widerspruchsfreiheit erkannt, aber trotzdem an der Existenz gezweifelt. Implizit – so scheint es – will er damit sagen, dass die folgende Epoche seine Existenzforderungen begründen und zu einer Selbstverständlichkeit in der Mathematik lassen werden wird. Meines Erachtens ist die Argumentation an dieser Stelle unvollständig: Stattdessen hätte Hilbert (aus seiner grundsätzlichen Position heraus) begründen können, dass die unendliche Mathematik nur eine Mittlerin zwischen Ergebnissen der endlichen Mathematik sei (Konservatität, s.o.) und dass deswegen die Frage nach Wahrheit selbst nichtig, die nach der Funktionstüchtigkeit dieses Mittels (ideelle Charakter) hingegen angebracht sei.

Hilbert ist der Meinung, dass viele Versuche, die Mathematik nach der Grundlagenkrise zu retten, in einer Art Panik entstanden seien. In dieser Panik hätte man auch die „allersimpelsten und wichtigsten Schlußweisen in der Mathematik bedroht [...].“ [7, S. 169]. Hierunter fällt gewiss auch das Weglassen des Tertium non datur (er benennt an dieser Stelle aber keine Beispiele). Eine Begründung für das Tertium non datur erfolgt wie oben für die nichtkonstruktiven Begriffe; nur mit dem Unterschied, dass die obige inhaltliche Nützlichkeit durch eine Nützlichkeit der Schlussweisen zu ersetzen ist. Damit bekommt bemerkenswerterweise auch die Logik den im Abschnitt zur Unendlichkeit besprochenen und im Abschnitt über formale Systeme aufgegriffenen ideellen Charakter, vgl. [7, S. 176].

3.5.3 Eigene Meinung

Bei dem Tertium non datur zeigt sich meiner Meinung nach wieder einmal, wie unklar der Begriff der Wahrheit eigentlich ist. Wenn die Wahrheit im intuitionistischen Sinne verstanden wird, so ist der Verzicht auf das Tertium non datur berechtigt. Spätestens Kolmogorov zeigt dies mit seiner Aufgabenrechnung, die man getrost als die Aufforderung, einen Beweis zu finden, verstehen darf. In diesem Sinne ist $a \vee \neg a$ die Aufforderung, einen Beweis für a oder einen Widerspruch aus der Annahme, dass es einen Beweis für a gäbe, herzuleiten. Im Sinne der Gödelschen Unvollständigkeitssätze muss diese Aufforderung im Allgemeinen scheitern. Es sei aber noch einmal daran erinnert, dass dies nur eine Stütze für die gedankliche Motivation der intuitionistischen Logik darstellt, jedoch keinen Inhalt derselbigen. Wenn wir hingegen eine platonistische Sicht auf die Mathematik haben, so ist das Tertium non datur eine Trivialität. Die Gültigkeit des Tertium non datur kann also nicht unabhängig von dem jeweiligen mathematischen Kontext, in dem es behauptet wird, bewertet werden.

Ganz ähnlich verhält es sich mit der Existenz; denn im Sinne der Unbestimmtheit steht dieser Begriff dem der Wahrheit in nichts nach. So sind die Bedeutungen grundsätzlich unterschiedlich, je nachdem ob tatsächliche Existenz, geistige Existenz oder eine Möglichkeit des Denkens betrachtet wird (und es mag noch viel mehr Möglichkeiten geben). Es wäre daher auch zutiefst erstaunlich, wenn diese unterschiedlichen Ansichten *nicht* zu unterschiedlichen Regeln für die Existenz führten. Und doch ist keine dieser Ansichten richtiger als eine andere. Sie alle beleuchten einen gewissen Aspekt der Existenz, erhalten bei ihrer Abstraktion der Existenz ins Mathematische unterschiedliche Kernpunkte bei.

Es lässt sich feststellen: Nicht nur im Bereich der Inhalte, sondern auch im Bereich der Logik und Schlussweisen gibt es verschiedene Ansichten. Keine der hier dargestellten Ansichten sind schwach oder unüberlegt. Sie alle haben ihre Berechtigung. Die 'Mathematiken', die daraus entstehen, sind konsequenterweise so verschieden wie ihre sie erzeugenden Ansichten. Mithin wird die Vorstellung, dass es ein richtiges mathematisches System gibt, ad absurdum geführt. Die in diesem Kapitel erhaltenen Ergebnisse werden sich im nächsten Kapitel über den Curryschen Formalismus – sinnvoll verarbeitet – ergänzend verbinden.

Kapitel 4

Currys Formalismus

4.1 Ziele einer Definition für die Mathematik

Die Analysen des vorherigen Kapitels sollten nahelegen, dass der Versuch, *die eine* Antwort auf die Frage 'Was ist Mathematik?' zu erhalten, eine Illusion ist. Zu verschieden sind die Ansätze und philosophischen Hintergründe. Würde obiger Versuch doch unternommen, so würde nur eine weitere unter vielen schon bestehenden und untereinander z.T. stark abweichenden Antworten erstellt. Was also ist zu tun?

Schon während des Seminars ist in mir hierzu eine Überzeugung gereift, die ich nun durch die Currysche Sichtweise der Mathematik bestätigt finde:

> Es ist überhaupt nicht wesentlich, was Mathematik eigentlich ist. Entscheidend sind nur die ihr zugrundeliegenden Eigenschaften und Beziehungen.

Man beachte, dass diese Auffassung – als Nebenprodukt – einer gewissen Ästethik nicht entbehrt: Wurde zunächst das 'Sein' mathematischer Objekte zugunsten ihrer Eigenschaften wegabstrahiert, so geschieht dies nun mit der Mathematik selbst. Doch ein noch so ansprechender Gedanke ist wertlos, wenn sein Inhalt nicht sinnerfüllt ist. Wir müssen uns also fragen: Gibt es solche Eigenschaften und Beziehungen, irgendetwas Bleibendes, das für die Mathematik unerlässlich ist?

Zunächst wollen wir einmal exemplarisch feststellen, was definitiv *nicht* zu solchen Eigenschaften und Beziehungen gehört, obwohl es für die tatsächlich betriebene Mathematik von essentieller Bedeutung ist:

- Das Unendliche und dazugehörige Beziehungen: Wir haben im vorherigen Kapitel gesehen, wie unterschiedlich die Ansichten zum Unendlichen – vom Paradies Cantors, über nur potentielle Unendlichkeit bis zur völligen Ablehnung – innerhalb der Mathematik sind. Das Unendliche darf bei der Beschreibung der Mathematik daher keine Rolle spielen

- Die natürlichen Zahlen: Selbst die so einfach ausschauende Welt der natürlichen Zahlen bereitete uns im vorherigen Kapitel Kopfzerbrechen. Die Ansichten über die natürlichen Zahlen waren höchst unterschiedlich. Für den Ultrafinitisten sind sogar gewisse Rechenoperationen – ihrer Größe wegen – unsinnig. Wir müssen uns also von einem expliziten Umgang mit den natürlichen Zahlen verabschieden

- Jeglicher Inhalt: Wenn schon die natürlichen Zahlen problematisch sind, welcher Inhalt sollte es dann nicht sein?

- Logische Gesetze: Wir haben bspw. gesehen, dass das Tertium non datur als scheinbar einfaches, logisches Gesetz im Intuitionismus begründet(!) wegfällt, im Hilbertschen Formalismus hingegen begründet erhalten bleibt.

Damit scheint es zunächst, als bliebe nichts, die Mathematik Bezeichnendes, übrig. Und doch besitzt jede Mathematik den Anspruch, *objektiv* zu sein. Das gilt bspw. auch für die Intuitionisten, die zwar das Subjekt und die geistige Aktivität sehr betonen (s.o.), die aber von einer gemeinsamen Urintuition ausgehen, also einer objektiven gemeinsamen Grundlage. Weiterhin besitzt jede Mathematik stets eine gewisse Form der Begründung, den *Beweis* (im weiteren Sinne). Wie auch immer man Mathematik also repräsentiert (und es gibt viele Möglichkeiten hierfür), Objektivität und eine gewisse Art des Schlussfolgerns, ein Beweisschema, muss immer enthalten sein. Nimmt man auch nur einen dieser beiden Punkte weg, so ist man meines Erachtens nicht berechtigt, von Mathematik zu sprechen. Auf der anderen Seite wird beiden Aspekten in der Curryschen Definition der Mathematik genüge getan.

Den Curryschen Weg aufzuzeigen, wird die Aufgabe dieses Kapitels sein. Er benutzt dabei nicht mehr als unbedingt nötig ist. Wir werden daher über die Möglichkeiten und Freiheiten sprechen, die aus dieser Sichtweise der Mathematik entspringen.

4.2 Objektivität und Nützlichkeit

> „The ordinary mathematician bases the idea of truth upon that of rigor; he regards a mathematical proposition as true when he has a rigorous proof of it. But when we examine the nature of this 'rigor', we find there is something vague and subjective about it. This is true to such an extent that intelligent persons have maintained that mathematics is not a science at all; that it has no subject matter nor any criterion of truth; and that in the last analysis it is based on purely aestethic considerations. [...] There must be an objective criterion of truth, and the first task of the mathematical logician is to find it.“ [4, S. 3]

Das obige Zitat zeigt ganz deutlich: Auch wenn der Anspruch an Objektivität in der Mathematik vollständig gegeben ist, so ist doch eine zugehörige Realisierung alles andere als selbstverständlich. Daher muss die Mathematik so definiert werden, dass sie frei von solch subjektiven philosophischen Einflüssen ist. Sie darf sich nur auf die elementarsten philosophischen Strukturen begründen (wie alle anderen Wissenschaften auch), vgl. [4, S. 3]. Curry benennt nun drei Wege, die die Mathematik als objektiv retten sollen, vgl. [4, S. 3]:

1. Realismus

2. Idealismus (gemeint ist der intuitionistische Idealismus)

3. Formalismus

Der Realismus besitzt empirischen Charakter. Er spiegelt die Ursprünge mathematischen Denkens wieder. Doch für die vielfältigen im Laufe der Mathematikgeschichte durch Abstraktionen entstandenen Inhalte, besitzt er nicht die geeigneten Mittel, vgl. [4, S. 4]. Anders formuliert: Der Realismus sichert zwar die Objektivität. Seine Einschnitte sind aber so gravierend, dass es unsinnig ist, ihn zur Grundlage zu nehmen, wenn es eine andere genauso objektive Art gibt, die Inhalte der Mathematik wie Unendlichkeit, euklidische Geometrie, reelle Zahlen usw. zu sichern. Der Realismus ist mathematisch betrachtet unnütz!

Der Idealismus wiederum versagt bei der Objektivität selbst. Curry nennt vier entscheidende Postulate der Idealisten über ihre Urintuition, vgl. [4, S. 5-6]:

1. Sie ist eine Denkaktivität

2. Sie hat apriorischen Charakter

3. Sie ist unabhängig von Sprache

4. Sie hat objektive Realität; wenigstens, weil sie allen denkenden Wesen gemeinsam ist

Schon die ersten drei Kriterien wurden dabei durch unterschiedlichste mathematisch philosophische Positionen nicht eingenommen, vgl. z.B. Hilberts syntaktische Position oder die in dieser Arbeit nicht weiter behandelte quasi-empiristische Position. Doch mehr noch bereitet der vierte Aspekt große Probleme:

> „Moreover the fourth condition is absolutely vital for intuitionism if it is to give a definition of mathematical truth at all; and the assumption that it is satisfied is an out and out postulate.“

Damit ist eine idealistische Position zur Grundlegung der Mathematik zu verwerfen, nicht aber die intuitionistische Sichtweise an sich, vgl. [4, S. 6-7]. Sie gehört nur an einen anderen Platz. Wir werden darauf später noch genauer eingehen.

Es bleibt also nur noch die formalistische Position übrig. Natürlich muss erst noch gezeigt werden, dass sie den obigen Ansprüchen auch tatsächlich gerecht wird. Das ist die Aufgabe des nächsten Abschnitts.

4.3 Definition der Mathematik durch formalistische Systeme

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass es Möglichkeiten gibt, formale Systeme zu definieren, so dass diese den Ansprüchen nach Objektivität, der Möglichkeit der Schlussfolgerung sowie der Möglichkeit, hinreichend viel Inhaltiches zu erfassen (Nützlichkeit), genügen. Curry schlägt dazu folgende Dreiteilung für die Definition eines formalen Systems vor, vgl. [4, S. 11-12]:

1. Eine Menge von Objekten, genannt Terme. Sie sind bestimmt durch
   (a) Zeichen
   (b) Operationen
   (c) Regeln, mittels derer aus Termen und Operationen neue Terme gewonnen werden können
2. Eine Menge von Aussagen über diese Objekte, d. h. Prädikate, deren Argumente Termeingaben sind
3. Eine Teilmenge von beweisbaren Aussagen. Sie sind charakterisiert durch
   (a) Axiome
   (b) Ableitungsregeln

Dabei ist nicht unbedingt ausgeschlossen, dass eine der Mengen unendlich sein könnte. Entscheidend ist, dass folgende Eigenschaften effektiv überprüfbar sind: Ist etwas Vorgegebenes ein Term oder ist es ein Prädikat oder ist es ein Axiom oder ist es ein Beweis usw. (heute würde man wohl verlangen, dass ein tatsächlich existierender endlicher Rechner diese Fragen beantworten können muss). Man spricht auch von effektiver Berechenbarkeit. Was hingegen nicht als effektiv prüfbar vorausgesetzt wird, ist die Frage, ob eine gegebene Aussage beweisbar ist, vgl. jeweils [4, S. 14] (Curry spricht hier von Wahrheit. Um falsche Assoziationen zu vermeiden, verwenden wir in diesem Zusammenhang stets den Begriff 'beweisbar').

Alle diese Fragen können dabei so objektiv wie überhaupt irgendetwas beantwortet werden. Für die Frage nach einer beweisbaren Aussage meint dies, dass wenn man einen Beweis für die Aussage gefunden hat, sagen kann „Dies ist ein Beweis für die Aussage. Folge meinen Begründungen hierfür.“ und dass wenn man noch keinen Beweis gefunden hat, 'gestehen' muss: „Ich habe noch keinen Beweis für die Aussage gefunden. Es ist mir nicht klar, ob die gegebene Aussage beweisbar ist.“ Damit kann ein Rechner alles geforderte leisten. Mehr Objektivität geht meines Erachtens nicht (wer also diese Verfahren nicht als objektiv einschätzen mag, muss die Objektivität und damit die Mathematik als sinnlos verwerfen). Die Axiome mit den Ableitungsregeln indes entsprechen genau der Möglichkeit, Schlussfolgerungen zu ziehen. Die folgenden Beispiele werden zeigen, dass auch die inhaltliche Mächtigkeit groß genug ist, das meint, dass die übliche Mathematik mit Hilfe dieser formalen Sichtweise betrachtet werden kann:

1. Die Peano-Arithmetik kann bspw. wie folgt formalisiert werden (Spezialfall aus [4, S. 18-19]):
   (a) Terme:
      i. Das Zeichen ist 0
      ii. Die Operationen sind die einstellige Nachfolgerfunktion $\cdot'$ sowie die binäre Operation $+$
      iii. Sind s, t Terme, so auch t' und $s + t$

   (b) Die Aussagen ergeben sich aus dem einzigen Prädikat $=$ (in der üblichen Bedeutung)

   (c) Seien im folgenden s, t, u beliebige Terme. Dann erhalten wir die beweisbaren Aussagen durch:
      i. Axiome:
         A. $0 = 0$
         B. $s + 0 = s$
         C. $s + t' = (s + t)'$
      ii. Schlussregeln:
         A. Wenn $s = t$, dann $t = s$
         B. Wenn $s = t$ und wenn $t = u$, dann $s = u$
         C. Wenn $s = t$, dann $s' = t'$
         D. Wenn $s = t$, dann $s + u = t + u$
         E. Wenn $s = t$, dann $u + s = u + t$

   .

2. Die Zermelo-Fränklin-Mengenlehre (ZF) wird formalisiert durch:
   (a) Die Variablen als einzige Terme
   (b) Die Aussagen bestehen aus:
      i. Atomaussagen gebildet durch die Prädikate $=$ und $\in$
      ii. Sind φ, ψ schon Aussagen (dazu gehören auch Atomaussagen), so auch $\neg(\varphi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$ sowie $\exists v\, (\varphi(v))$
   (c) Die beweisbaren Aussagen ergeben sich aus den logischen Axiomen, den Axiomen der Zermelo-Fränklin-Mengenlehre sowie den logischen Schlussfolgerungen

3. λ-Kalkül und ähnliche Systeme, vgl. [4, S. 21]

4. Mögliche Schachstellungen, vgl. [4, S. 27]

Beispiel 1 ist gewählt worden, um eine Instanz eines formalen Systems im Detail vorliegen zu haben. Beispiel 2 soll die Möglichkeit aufzeigen, Formalismus mit klassischer Mathematik zu verbinden. Beispiel 3 wiederum dient dazu aufzuzeigen, dass die Tür im Formalismus auch alternativen Zugängen zur Mathematik offensteht. Das letzte Beispiel soll zeigen wie vielfältig die formalistische Methoden genutzt werden kann. In [4, Kapitel 5] finden sich viele weitere Beispiele. Damit ist gezeigt worden, dass die formalistische Methode unseren Minimalanforderungen bzgl. Objektivität und Herleitbarkeit von Aussagen genügt und dass darüberhinaus die möglichen mathematischen Inhalte tiefgehend und vielschichtig sind.

Es ist nicht der Sinn dieser Arbeit die vielen – teils auch technischen – Wege und Probleme in Currys Werk über die formalen Systeme nachzuverfolgen. Hierfür verweisen wir auf [4, Kapitel 4,7,8]. Die wesentlichsten Ergebnisse und Anmerkungen dieser Kapitel wollen wir hier nur stichpunktartig benennen:

- Es gibt nicht nur eine Definition für formale Systeme. Erweiterungen (z.B. Zulassung nichteffektiver Systeme, vgl. [4, S. 15]) und Einschränkungen (z.B. auf nur ein Zeichen, eine binäre Operation sowie ein unäres Prädikat, vgl. [4, S. 36]) sind möglich

- Das obige dargestellte formale System muss nicht syntaktisch verstanden werden. Wichtig ist nur die objektive Überprüfbarkeit („I do not agree that the only things which can be treated formally are symbols.“ [4, S. 45]) Die oben angegebene Definition kann etwas mehr als die rein syntaktischen Varianten, vgl. [4, S. 341]

- Die Vorteile einer syntaktischen Repräsentation liegen aber darin begründet, dass die syntaktische Repräsentation konkret anschaulich ist und damit keinen Nährboden für mystische Spekulationen liefert, vgl. [4, S. 32,49]

Doch kommen wir nun zurück zur Philosophie. Denn eine scheinbar wesentliche Frage haben wir noch nicht geklärt: Was ist denn nun ein formales System? (man beachte nochmals, dass die obige Darstellung nicht unbedingt im syntaktischen Sinne erfolgen muss. Die syntaktische Darstellung ist hier zunächst nur als ein Hilfsmittel anzusehen) Die Anwort ist wieder die gleiche, wie schon bei den mathematischen Objekten und der Mathematik selbst: Es kommt nicht auf die Präsentation eines formalen Systems an, sondern nur auf die Eigenschaften, die das formale System mit sich bringt. Curry führt dazu aus:

> „But when we think of it [das formale System in der Repräsentation] as formal system we abstract from all properties peculiar to

> the representation. Human beings can think abstractly about quite concrete things without inventing mystic abstracta to account for the phenomenon.
>
> It is unnecessary to inquire further into the meaning of a formal system. It is characteristic of mathematics that it considers only certain essential properties of its objects, regarding others as irrelevant. One of these irrelevant questions is that of the ontology of a formal system. The question of which representation is the real or essential one is a metaphysical matter with which mathematics has no concern. Moreover, since one point of view will sometimes suggest ideas, which are closed to another, it is not in the interests of progress to insist on one sort of representation." [4, S. 31]

Gerade der letzte Punkt verdient nochmals hervorgehoben zu werden: Subjektivität ist kein Teufelswerk! An der falschen Stelle stiftet sie furchtbare Verwirrung, an der richtigen Stelle hingegen ist sie eine fruchtbare Synthese zwischen Motivation und Klarheit. Dieser Gedanke wird uns im nächsten Abschnitt nochmals begegnen.

Die obigen Gedankengänge münden in folgende Defintion für Mathematik:

Definition 4.1 *„Mathematics is the science of formal systems." [4, S. 56]*

Es geht dabei nicht um ein spezielles formales System, noch um eine spezielle Repräsentation, sondern um die formalistische Betrachtungsweise an sich, in der 'Wahrheit' für die Beweisbarkeit innerhalb des jeweiligen formalen Systems steht und keine äußeren Begründungen benötigt, vgl. [4, S. 56].

Einen wichtigen Punkt, der für Hilbert in seinen Konsistenzbeweisen eine große Rolle spielte, haben wir noch unbeachtet gelassen: die Metatheorie. Die erste hier zu treffende Feststellung ist, dass wir anstatt Metatheorie für ein gegebenes System S_1 zu betreiben, auch formale Mathematik in einem erweiterten System S_2 benutzen können, sofern die jeweils benutzte Metamathematik formalisierbar ist, vgl. [4, S. 53]. Warum aber wird dann überhaupt Metamathematik benutzt? Die Antwort gibt Curry selbst: „Although the latter may be more exact, often we prefer the former for the same reason that we use a meter stick instead of rushing to the international standard at Paris when we wish to measure a meter." [4, S. 53] Allerdings konstatiert Curry auch, dass der Wahrheitswert konstruktiver Metaaussagen die gleiche Objektivität besitze, wie die Beweisbarkeit von Aussagen innerhalb eines formalen Systems. Er begründet dies damit, dass die Ausführung eines Prozesses dann schon alle möglichen Fälle überprüfen kann, vgl. [4, S. 54]. Für mich ist an dieser Stelle unschlüssig, ob Curry geistige, möglicherweise unendliche, Konstruktionen miteinbezieht. Meiner eigenen Auffassung nach sollte für die Metatheorie nur der kleinste gemeinsame Nenner benutzt werden; mit anderen Worten nur solche Konstruktionen zugelassen werden, die auch ein Ultrafinitist akzeptieren kann. Eine sehr genaue Beschreibung dessen, was in der Metatheorie (allerdings in Bezug auf ein rein syntaktisches System) benutzt werden darf, liefert Church in [3, S. 349-351]. Es gehören u. a. dazu: Unterscheidung von Zeichen, Substitution sowie logische Ausdrücke wie 'und', 'wenn dann' und 'oder'. Die Verallgemeinerung dieser Prinzipien auch auf nicht unbedingt syntaktischer Basis wäre dann meines Erachtens ein gutes Fundament für die Metatheorie im Allgemeinen.

In diesem Abschnitt haben wir formale Systeme eingeführt und begründet, warum sie allen unseren Zielen genügen. Darauf aufbauend haben wir sogar eine sehr präzise Definition von Mathematik angeben können. Es scheint, als wäre damit alles gezeigt, eine weitere Beschäftigung mit dem Thema unnötig. Doch einige wichtige Fragen haben wir noch nicht beantwortet: Wenn der Weg zu dieser Mathematik so klar und gut ist und als Minimalkonsens nur benutzt wurde, was in allen mathematisch-philosophischen Ansätzen gefordert wird, warum findet sich dann diese Mathematik in der Praxis (fast) nirgends realisiert? Wenn im Grunde genommen alles als formales System betrachtet werden kann (z.B. Schach), warum findet in der Praxis dann nahezu die gesamte Mathematik in der Zermelo-Fränklin-Mengenlehre ggf. mit Auswahlaxiom statt? Warum scheren sich die meisten Mathematiker überhaupt nicht um Axiome aus ZFC etc., sondern beweisen einfach nach Gutdünken (so wie sie es schon vor der Grundlagenkrise taten)? Zugegeben, bisher haben wir auf diese Fragen noch keine vernünftige Antworten gefunden. Dies soll unser letztes Ziel darstellen.

4.4 Verteidigung der Definition durch Analyse des Wahrheitsbegriffs

Das eigentliche Moment dieses Abschnitts wird die Entnebelung des mysteriösen Begriffs der Wahrheit (im herkömmlichen mathematischen Sinne) in eine objektive und eine subjektive Komponente darstellen. Diese Aufklärung bildet das Herzstück in der gesamten Argumentation Currys. Wenn dieser Akt erst einmal vollständig gelungen ist, werden die obigen gestellten, noch offenen Fragen leicht zu beantworten sein.

Um die Trennung gut verstehen zu können, betrachten wir noch einmal die intuitionistische Position: Ein wahrer Satz ist in ihr ein mittels geistiger Konstruktionen beweisbarer Satz. Grundlage dieser Argumentationen sind irgendeiner Urintuition zugrundeliegende Sachverhalte. Sobald aber nun Sachverhalte dieser Urintuition sowie die möglichen Konstruktionen angegeben sind, wird der Beweis aus diesen Voraussetzungen dieser im intuitionistischen Sinne wahren Aussage vollkommen objektiv und unzweifelhaft (er kann dann auch durch eine Maschine nachvollzogen werden). Es bleibt die Frage, ob man die entsprechenden Fundamente akzeptieren mag. Letztere Frage hat aber einen eindeutig subjektiven Charakter. Curry spricht von Akzeptierbarkeit: „By acceptability, then, I

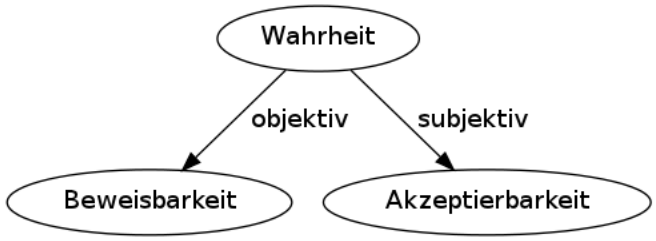

Abbildung 4.1: Zergliederung des Wahrheitsbegriffs

mean the considerations which leads us to choose one formal system rather than another.“ [4, S. 59] Wir erhalten damit die in Abbildung 4.1 dargestellte Aufteilung der Wahrheit in eine subjektive und eine objektive Komponente. Aber wir waren noch nicht genau genug; denn die subjektive Komponente ist keineswegs binär zu verstehen. Denn es gibt sowohl verschiedene Quantitäten (z.B. 'Es ist sicher richtig', 'Es ist wahrscheinlich richtig', 'Es ist möglich') als auch verschiedene Qualitäten von Akzeptierbarkeit (z.B. 'Es stimmt mit empirischen Befunden überein', 'Es ist interessant anzunehmen' oder auch ein (evtl. unnbewusster) Grund wie 'Das habe ich schon immer so gemacht'). Kurz, es muss irgendeinen ernsthaften Grund geben, sich mit den jeweiligen Voraussetzungen auseinanderzusetzen. Das erklärt auch sofort, warum von den vielen möglichen formalen Systemen einige wenige sehr sehr intensiv, andere überhaupt nicht untersucht werden, denn „unless a system is acceptable for some serious purpose, no mathematician will be interested in it.“ [4, S. 59]

Dieser Effekt wird sogar noch dadurch verstärkt, dass selbst solche Systeme wie z.B. Schach, die man aus ernsthaften Gründen direkt formalisieren könnte, trotzdem meist *innerhalb* eines anderen Systems, bspw. ZFC, formalisiert werden. Mit etwas Menschenkenntnis ist der Grund hierfür unmittelbar einsichtig. Wenn bspw. Menschen Tabellen ausschließlich in Textverarbeitungsprogrammen bearbeiten oder wenn Informatikschüler/-studenten statt – wie es die Aufgabe verlangt hätte – deklarativ zu programmieren, einen imperativen Stil pflegen, geschieht das Gleiche. Ein bewährtes System legt man nicht freiwillig ab. Man versucht das Neue in das Alte zu integrieren. Das bewährte System ist in diesem Falle meist ZFC (selbst, wenn man von den zugehörigen Formalismen keine Ahnung hat). Ein Grund, ein neues System nicht innerhalb von ZFC, sondern außerhalb zu formalisieren, stellt sich oft nicht. Im Übrigen kann sich in diesem Sinne auch ein naives (nicht formalisiertes) System bewähren. Damit ist also sowohl geklärt, warum ZFC in der Praxis meistens benutzt wird, als auch, warum dies meistens unbewusst unbewusst oder bewusst unbewusst geschieht.

Solange die entsprechenden Arbeiten von Mathematikern trotzdem so klar sind, dass bei Uneinigkeiten und Unsicherheiten, eine niedere Stufe der Argumentation gefunden werden kann (ggf. die unterste Stufe, die formale), auf der die Problematik ausgeräumt werden kann, ist das auch überhaupt kein Problem.

Oftmals wird aber behauptet, dass die tasächlich betriebene Mathematik irgendetwas 'Höheres' sei als die 'nur' formale Mathematik. Diese Ansicht ist meines Erachtens ausschließlich religiös motiviert. Die Behauptung etwa, dass es doch nicht möglich sei, dass die genialen Ideen von Leibniz und co nichts weiter als Zeichenketten seien (oder andere Teile eines formalen Systems), ist für mich nicht wesentlich verschieden von der Diskussion, die einsetzte, als Darwin aussagte, Mensch und Affe hätten gemeinsame Vorfahren. Kurzum, der Appell auch für die hohen Abstraktionsstufen lautet Nachvollziehbarkeit. Alles andere ist Mystizismus.

Wir wollen uns nun an einem Beispiel betrachten, aus welchen verschiedenen Gründen ein und dieselbe Person sowohl die intuitionistische Mathematik (und nicht mehr) als auch die vollständige klassische Mathematik akzeptieren kann (für Curry selbst ist dies z.B. der Fall). Denn die erstere könnte die erkenntnistheoretische Sicherheit geben, für die es im zweiten Fall keine Entsprechung gibt. Dennoch könnte die klassische Mathematik akzeptiert werden, z.B. aus empirischen Gründen. Denn im Gegensatz zur intuitionistischen Mathematik ist die klassische Mathematik hilfreich für die Physik und hat sich bewährt, vgl. [4, S. 61]. Das ist vollkommen ausreichend, um als ernsthafter Grund gelten zu können.

Nachdem wir uns angesehen haben, was Gründe *für* die Akzeptanz eines formalen Systems sein können, wollen wir noch einmal explizit nennen, was wir nicht gefordert haben, weil es für die Akzeptanz eines formalen Systems überhaupt nicht notwendig ist (wenngleich ein Einzelner genau diese Punkte für die Akzeptierbarkeit entscheidend halten mag, namentlich Hilbert): Vollständigkeit sowie garantierte Widerspruchslosigkeit. Vollständigkeit ist dabei, wie die Gödelschen Unvollständigkeitssätze zeigten, ohnehin in den meisten interessanten Systemen nicht forderbar. Ein System, das als widerspruchsvoll erkannt wird (bis dato aber viele interessante und nicht zu offensichtlich widersprüchliche Ergebnisse geliefert hat), kann oftmals durch geeignete Änderungen so modifiziert werden, dass die 'guten Ergebnisse' erhalten bleiben, der entdeckte Widerspruch aber ausgemerzt werden kann, vgl. [4, S. 62]. Dies ist z.B. bei dem in [3] behandelten System geschehen. Dies zeigt im Übrigen nochmal auf, was wir oben schon behaupteten, dass Hilbert eigentlich gar kein Formalist ist.

Es ist noch festzuhalten, dass sich der Rahmen der Akzeptierbarkeit nicht nur auf die inhaltlichen Komponenten erstreckt. Auch die Logik ist hiervon betroffen. Mit anderen Worten: Es gibt viele Logiken, die aus verschiedenen Gründen akzeptiert werden können. Eine Logik, die die gesamte Mathematik umfasst, wie es die Logizisten fordern, kann damit die Vielfalt der Mathematik mit ihren Systemen nicht widerspiegeln, vgl. [4, Kapitel 12].

Wir sind in dieser Arbeit einen langen Weg gegangen: Über den Vergleich zweier sehr unterschiedlicher philosophischer Positionen zur Mathematik haben wir wichtige Belange der Mathematik herausgestellt, fanden aber auch Themen, denen unerwarteterweise keine Relevanz für die Mathematik innewohnt. Darüber hinaus haben wir die Unklarheit einiger typischer Begriffe, wie insbesondere den der Wahrheit, beleuchtet. Aufgrund dieser Erkenntnisse haben wir Mathematik als System formaler Systeme definiert und die Güte dieser Definition begründet. Am Schluss steht – und das ist ein schönes sowie bemerkenswertes Ergebnis – die Erkenntnis, dass die Arbeit mit formalen Systemen keineswegs starr und einschränkend ist, sondern im Gegenteil gerade die Bedingung für Freiheit und Kreativität darstellt! In diesem Sinne soll zum Abschluss dieser Arbeit das Schlusswort Currys zur Akzeptierbarkeit stehen:

> „This leads to my final plea – a plea for tolerance in matters of acceptability. Acceptability is not so much a matter of right and wrong as of choice of subject matter. Such a choice should be entirely free; and some difference of opinion is not only allowable, but desirable. We are often interested in systems for which the acceptability is hypothetical – even sometimes in those which, like non-desarguesian, non-archimedean, non-this-or-that geometries, are not acceptable for any known purpose. As mathematicians we should know to what sort of systems our theorems – if formalized – belong, but to exclude systems which fail to satisfy this or that criterion of acceptability is not in the interests of progress.“ [4, S. 64]

Literaturverzeichnis

[1] Becker, Oskar: *Neointuitionismus.* In: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, Seiten 329–334. Suhrkamp, Frankfurt a.M., 1975. Text von Luitzen E. J. Brouwer.

[2] Bedürftig, Thomas, Murawski, Roman: *Philosophie der Mathematik.* De Gruyter, Berlin/New York, 2010.

[3] Church, Alonzo: *A Set of Postulates for the Foundation of Logic.* The Annals of Mathematics, Second Series, 33(2):346–366, 1932.

[4] Curry, Haskell B.: *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics.* North-Holland, Amsterdam, 1958.

[5] Dummett, Michael: *Elemente des Intuitionismus.* In: Büttemeyer, Wilhelm (Herausgeber): *Philosophie der Mathematik*, Seiten 147–162. Alber Karl, München, 2005.

[6] Heyting, Arend: *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.* Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Klasse, Seiten 42–56, 1930.

[7] Hilbert, David: *Über das Unendliche.* Mathematische Annalen, 95:161–190, 1925.

[8] Hilbert, David: *Neubegründung der Mathematik.* In: Büttemeyer, Wilhelm (Herausgeber): *Philosophie der Mathematik*, Seiten 131–146. Alber Karl, München, 2005.

[9] Hoffmann, Dirk W.: *Grenzen der Mathematik. Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik.* Spektrum, Heidelberg, 2011.

[10] Kant, Immanuel: *Metaphysik und Mathematik.* In: Büttemeyer, Wilhelm (Herausgeber): *Philosophie der Mathematik*, Seiten 83–93. Alber Karl, München, 2005.

[11] Kolmogorov, Andrej N.: *Zur Deutung der intuitionistischen Logik.* Mathematische Zeitschrift, 35:58–65, 1932.

[12] Taschner, Rudolf: *Das Unendliche. Mathematiker ringen um einen Begriff*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.