

# **Naturwissenschaftlich motivierte formale Modelle**

**Anwendungen in der Computergraphik**

**Wachstumsfunktionen im Detail**

**Institut für Informatik und Computational Science**

**Universität Potsdam**

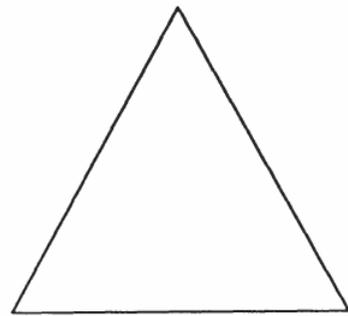
**Henning Bordihn**

# Anwendungen in der Computergraphik

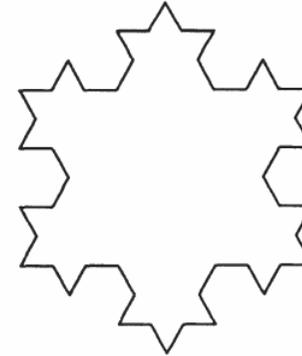
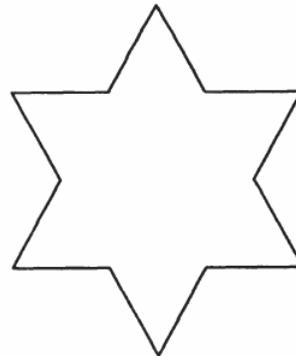
Quelle:

Przemyslaw Prusinkiewicz, Aristid Lindenmayer,  
*The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer 1990.

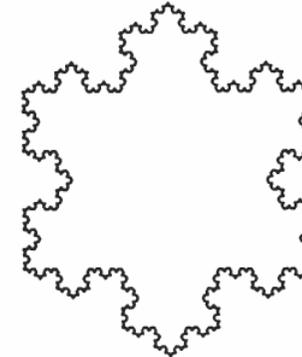
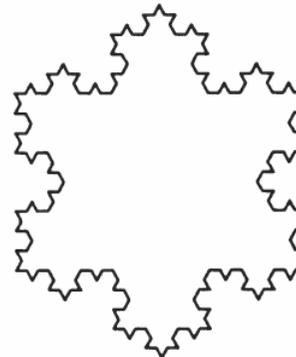
# Fraktale



*initiator*



*generator*



# Turtle-Graphik

$\alpha, \delta$                       zwei Winkel

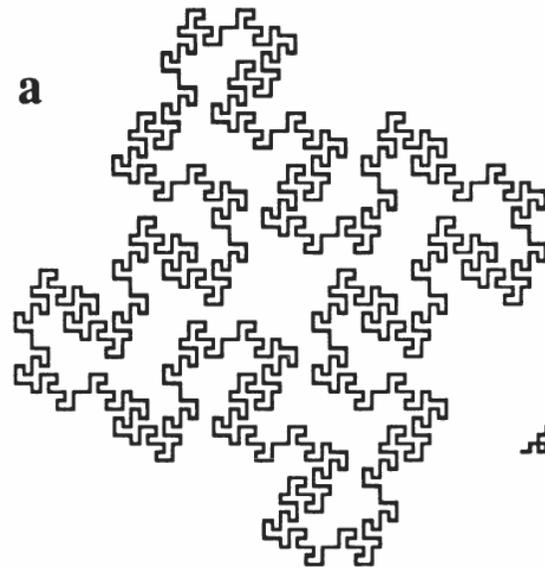
$\alpha$                       Anfangswinkel mit der  $x$ -Achse

**F**                      zeichne Einheitsstrecke „in Blickrichtung“

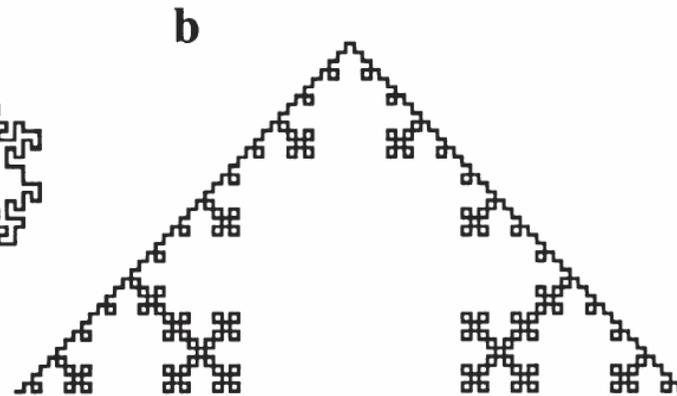
**+**                      Richtungsänderung um  $+\delta$

**-**                      Richtungsänderung um  $-\delta$

## Fraktale (2)

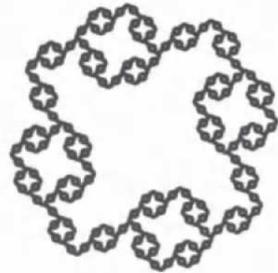


$n = 2, \delta = 90^\circ$   
 $F-F-F-F$   
 $F \rightarrow F+FF-FF-F-F+F+F$   
 $F-F-F+F+FF+FF-F$

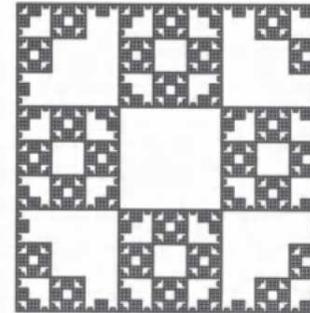


$n = 4, \delta = 90^\circ$   
 $-F$   
 $F \rightarrow F+F-F-F+F$

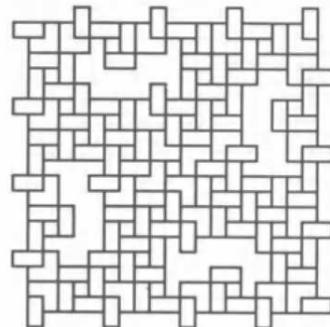
# Fraktale (3)



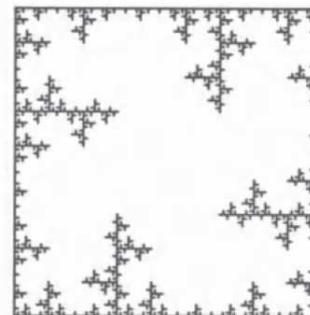
**a**  $n = 4, \delta = 90^\circ$   
 $F-F-F-F$   
 $F \rightarrow FF-F-F-F-F+F$



**b**  $n = 4, \delta = 90^\circ$   
 $F-F-F-F$   
 $F \rightarrow FF-F-F-FF$

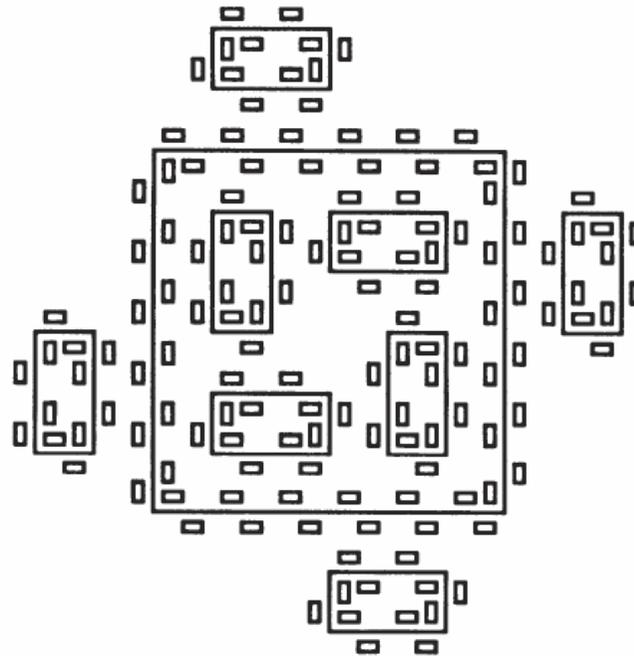


**c**  $n = 3, \delta = 90^\circ$   
 $F-F-F-F$   
 $F \rightarrow FF-F+F-F-FF$



**d**  $n = 4, \delta = 90^\circ$   
 $F-F-F-F$   
 $F \rightarrow FF-F--F-F$

## Fraktale (4)



$$n = 2, \delta = 90^\circ$$

$$F + F + F + F$$

$$F \rightarrow F + f - FF + F + FF + Ff + FF - f + FF - F - FF - Ff - FFF$$

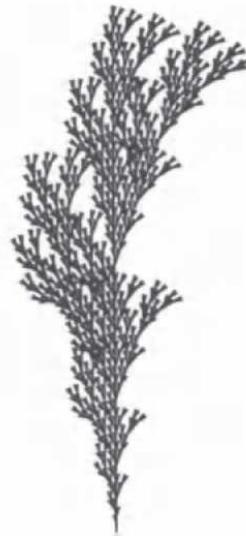
$$f \rightarrow ffffff$$



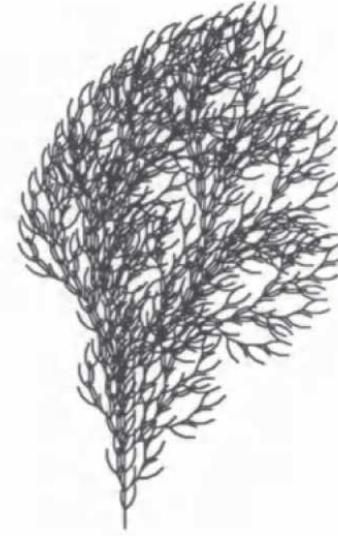
## Verzweigende Strukturen (1)



**a**  
 $n=5, \delta=25.7^\circ$   
 $F$   
 $F \rightarrow F[+F]F[-F]F$



**b**  
 $n=5, \delta=20^\circ$   
 $F$   
 $F \rightarrow F[+F]F[-F][F]$



**c**  
 $n=4, \delta=22.5^\circ$   
 $F$   
 $F \rightarrow FF[-F+F+F]+$   
 $[+F-F-F]$

## Verzweigende Strukturen (2)



**d**  
 $n=7, \delta=20^\circ$   
 $X$   
 $X \rightarrow F [+X] F [-X] +X$   
 $F \rightarrow FF$



**e**  
 $n=7, \delta=25.7^\circ$   
 $X$   
 $X \rightarrow F [+X] [-X] FX$   
 $F \rightarrow FF$



**f**  
 $n=5, \delta=22.5^\circ$   
 $X$   
 $X \rightarrow F - [[X] +X] +F [+FX] -X$   
 $F \rightarrow FF$

## Dreidimensionale Graphiken mit Texturen



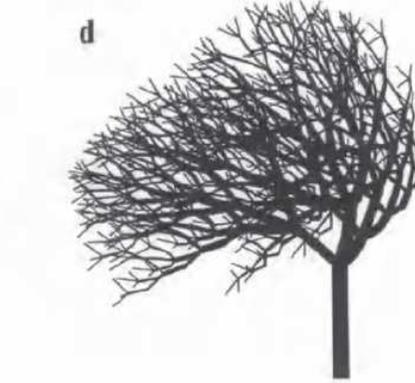
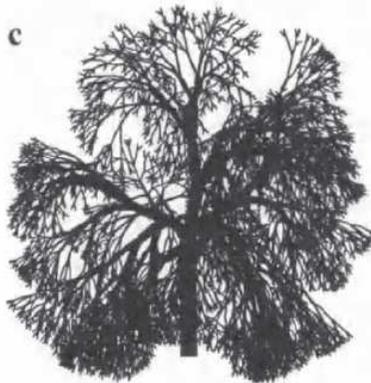
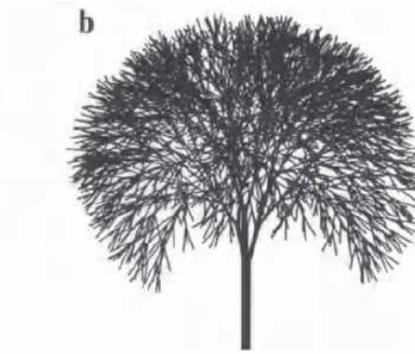
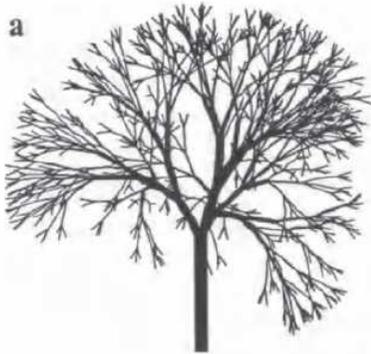
$n=7$ ,  $\delta=22.5^\circ$

$\omega$  : A  
 $p_1$  : A  $\rightarrow$  [&FL!A]///// [&FL!A]//////// [&FL!A]  
 $p_2$  : F  $\rightarrow$  S ///// F  
 $p_3$  : S  $\rightarrow$  F L  
 $p_4$  : L  $\rightarrow$  ['''^^{-f+f+f-|-f+f+f}]

## Dreidimensionale Graphiken mit Texturen (2)



## Parametrisierte Beschreibungen



```
#define d1 94.74      /* divergence angle 1 */
#define d2 132.63   /* divergence angle 2 */
#define a 18.95       /* branching angle */
#define lr 1.109    /* elongation rate */
#define vr 1.732   /* width increase rate */
```

```
ω : !(1)F(200)/(45)A
p1 : A : * → !(vr)F(50) [&(a)F(50)A]/(d1)
      [&(a)F(50)A]/(d2) [&(a)F(50)A]
p2 : F(1) : * → F(1*lr)
p3 : !(w) : * → !(w*vr)
```

# Signaltransmission



# Wachstumsfunktionen von D0L-Systemen

## Wiederholung: Wachstumsfunktion

**Definition.** Sei  $\Sigma$  ein Alphabet und  $(w_n)_{n \geq 0}$  eine Folge von Wörtern über  $\Sigma$ . Die Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } f(n) = |w_n|, n \geq 0$$

heißt **Wachstumsfunktion** der Folge.

Für ein D0L-System  $G$  heißt die Wachstumsfunktion der Wortfolge  $S(G)$  die Wachstumsfunktion von  $G$ .

## Parikh-Vektoren

**Definition.** Sei  $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  ein Alphabet mit fester Anordnung der Elemente. Für  $w \in \Sigma^*$  ist der **Parikh-Vektor** bezüglich  $\Sigma$  das  $k$ -Tupel

$$\begin{aligned} p_{\Sigma}(w) &= (|w|_{a_1}, |w|_{a_2}, \dots, |w|_{a_k}) \\ &= (|w|_1, |w|_2, \dots, |w|_k). \end{aligned}$$

## Charakterisierung der Wachstumsfunktion

**Definition.** Sei  $G = (\Sigma, h, \omega)$  ein D0L-System mit  $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ . Die **Wachstumsmatrix** von  $G$  ist die  $k \times k$ -Matrix

$$M_G = \begin{pmatrix} |h(a_1)|_1 & \dots & |h(a_1)|_k \\ \vdots & & \vdots \\ |h(a_k)|_1 & \dots & |h(a_k)|_k \end{pmatrix}.$$

Der **Startvektor** von  $G$  ist das  $k$ -Tupel  $\pi_G = (|\omega|_1, \dots, |\omega|_k)$ .

**Fakt.** Es gilt  $f_G(n) = \pi_G \cdot M_G^n \cdot \eta$ , wobei  $\eta$  der  $k$ -dimensionale Spaltenvektor  $(1, 1, \dots, 1)^T$  ist.

## D0L-Folgen wachsen höchstens exponentiell

**Lemma 2.23** Für jedes D0L-System  $G = (\Sigma, h, \omega)$  kann man Zahlen  $p, q \geq 0$  berechnen, so dass

$$f_G(n) \leq p \cdot q^n$$

für alle  $n \geq 0$  gilt.

## Eigenschaften des D0L-Wachstums

**Satz 2.24** Für ein D0L-System  $G = (\Sigma, h, \omega)$  mit  $\#\Sigma = k$  gilt

$$f_G(n+k) = c_{k-1}f_G(n+k-1) + c_{k-2}f_G(n+k-2) + \cdots + c_0f_G(n)$$

für gewisse ganze Zahlen  $c_{k-1}, c_{k-2}, \dots, c_0$  und alle  $n \geq 0$ .

**Satz 2.25** Keine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , bei der es für jede natürliche Zahl  $n$  Zahlen  $m$  und  $i > n$  gibt, so dass

$$f(m+i) \neq f(m+n) = f(m+n-1) = \cdots = f(m)$$

ist D0L-Wachstumsfunktion.

**Folgerung.** Wachstumsfunktionen von D0L-Systemen können weder logarithmisch noch eine Wurzelfunktion sein.

## Arten des D0L-Wachstums

**Definition.** Eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  heißt

- a) **schließlich exponentiell**, falls es eine natürliche Zahl  $n_0$  und eine reelle Zahl  $t$ ,  $t > 1$ , gibt, so dass  $f(n) > t^n$  für alle  $n \geq n_0$ ;
- b) **polynomial beschränkt**, falls es ein Polynom  $p$  gibt, so dass  $f(n) < p(n)$  für alle  $n \geq 0$ .

**Satz 2.26** Jede D0L-Wachstumsfunktion ist exponentiell oder polynomial beschränkt.

## Arten des D0L-Wachstums (2)

**Satz 2.27** Sei  $f$  eine D0L-Wachstumsfunktion, die nicht schließlich 0 wird. Dann gibt es eine Konstante  $c$  derart, dass

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} \leq c$$

für alle  $n \geq 0$ .