Naturwissenschaftlich motivierte formale Modelle

0L-Systeme, ihre Sprachen und Wachstumsfunktionen

Institut für Informatik und Computational Science
Universität Potsdam

Henning Bordihn

2. Lindenmayer-Systeme

2.1 0L-Systeme

Der Wachstumsprozess der Callithamnion roseum

$1 \to 23,\ 2 \to 2,\ 3 \to 24,$
$4 \to 25,\ 5 \to 65,\ 6 \to 7,$
$7 \to 8,\ 8 \to 9[3],\ 9 \to 9$

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 1\\
w_1 &= 23\\
w_2 &= 224\\
w_3 &= 2225\\
w_4 &= 22265\\
w_5 &= 222765\\
w_6 &= 2228765\\
w_7 &= 2229[3]8765\\
w_8 &= 2229[24]9[3]8765\\
w_9 &= 2229[225]9[24]9[3]8765\\
w_{10} &= 2229[2265]9[225]9[24]9[3]8765\\
w_{11} &= 2229[22765]9[2265]9[225]9[24]9[3]8765\\
w_{12} &= 2229[228765]9[22765]9[2265]9[225]9[24]9[3]8765\\
w_{13} &= 2229[229[3]8765]9[228765]9[22765]9[2265]9[225]9[24]9[3]8765
\end{aligned}
$$

Erinnerung: Ersetzung/Substitution

Seien U und V Alphabete. Eine Abbildung $\sigma : U^* \to 2^{V^*}$ heißt Ersetzung/Substitution von U in V, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\sigma(a) \neq \emptyset$ für alle $a \in U$
2. $\sigma(\lambda) = \{\lambda\}$
3. $\sigma(wa) = \sigma(w) \cdot \sigma(a)$ für alle $w \in U^*$ und $a \in U$.

σ heißt

- **endlich** gdw. $\sigma(a)$ endlich für alle $a \in U$,
- **nicht löschend** gdw. $\lambda \notin \sigma(a)$ für alle $a \in U$,
- **Homomorphismus** gdw. $\#\sigma(a) = 1$ für alle $a \in U$.

Ersetzung/Substitution (2)

- Sei σ eine Substitution von U in V und $L \subseteq U^*$.

  $\sigma(L) = \bigcup_{w \in L} \sigma(w)$

- Sei ferner $w \in U^*$.

  $\sigma^0(w) = \{w\}$

  $\sigma^{i+1}(w) = \sigma(\sigma^i(w))$ für $i \geq 0$.

0L-Systeme

Definition. Ein 0L-System ist ein Tripel $G = (\Sigma, \sigma, \omega)$, wobei

Σ ein Alphabet,

σ eine *endliche* Substitution von Σ in Σ und

$\omega \in \Sigma^+$ das Axiom (Startwort) ist.

G heißt

- propagierend (P0L-System), falls σ nicht löschend ist
- deterministisch (D0L-System), falls σ ein Homomorphismus ist.
- Ist σ ein nicht löschender Homomorphismus, ist G ein PD0L-System.

Sprache eines 0L-Systems

Definition. Sei $G = (\Sigma, \sigma, \omega)$ ein 0L-System. Die von G erzeugte Sprache ist

$$L(G) = \bigcup_{n \geq 0} \sigma^n(\omega) \, .$$

Fall G *deterministisch* ist, so heißt die Folge

$$S(G) = (\sigma^n(\omega))_{n \geq 0}$$

die von G erzeugte Wortfolge.

Notation: $\sigma^n(\omega) = w_n$

0L-Systeme als reine parallele Grammatiken

Notation: Seien $a \in \Sigma$ und $x, y \in \Sigma^*$. Wir schreiben

$a \rightarrow v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_n$ für $\sigma(a) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$x \Longrightarrow y$ gdw. $y \in \sigma(x)$

$x \stackrel{n}{\Longrightarrow} y$ gdw. $y \in \sigma^n(x)$

$x \stackrel{*}{\Longrightarrow} y$ gdw. $y \in \sigma^n(x)$ für ein $n \geq 0$

$x \stackrel{+}{\Longrightarrow} y$ gdw. $y \in \sigma^n(x)$ für ein $n > 0$

0L-Systeme als reine parallele Grammatiken

Notation: Seien $a \in \Sigma$ und $x, y \in \Sigma^*$. Wir schreiben

$a \to v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_n$ für $\sigma(a) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$x \Longrightarrow y$ gdw. $y \in \sigma(x)$

$x \stackrel{n}{\Longrightarrow} y$ gdw. $y \in \sigma^n(x)$

$x \stackrel{*}{\Longrightarrow} y$ gdw. $y \in \sigma^n(x)$ für ein $n \geq 0$

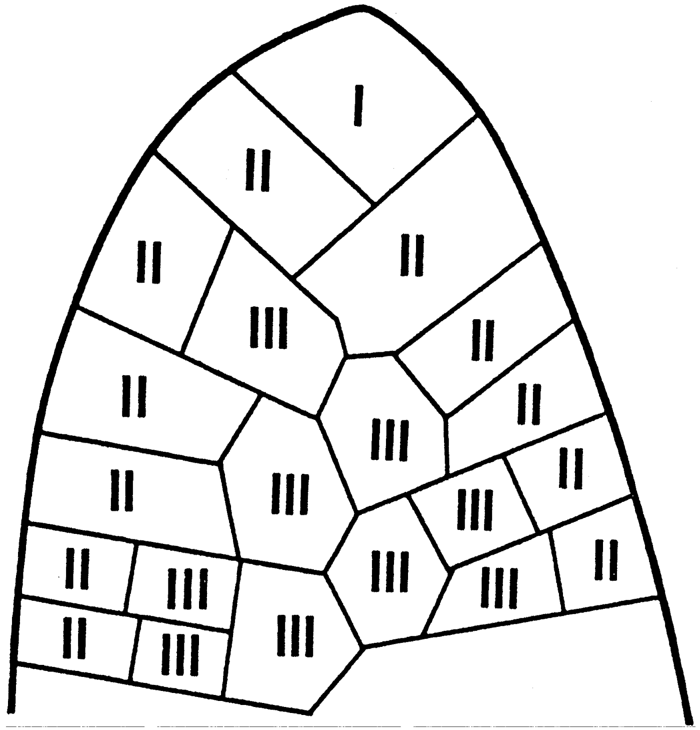
$x \stackrel{+}{\Longrightarrow} y$ gdw. $y \in \sigma^n(x)$ für ein $n > 0$

$\hookrightarrow$ 0L-System G ist reine Grammatik (alle Satzformen in der Sprache)

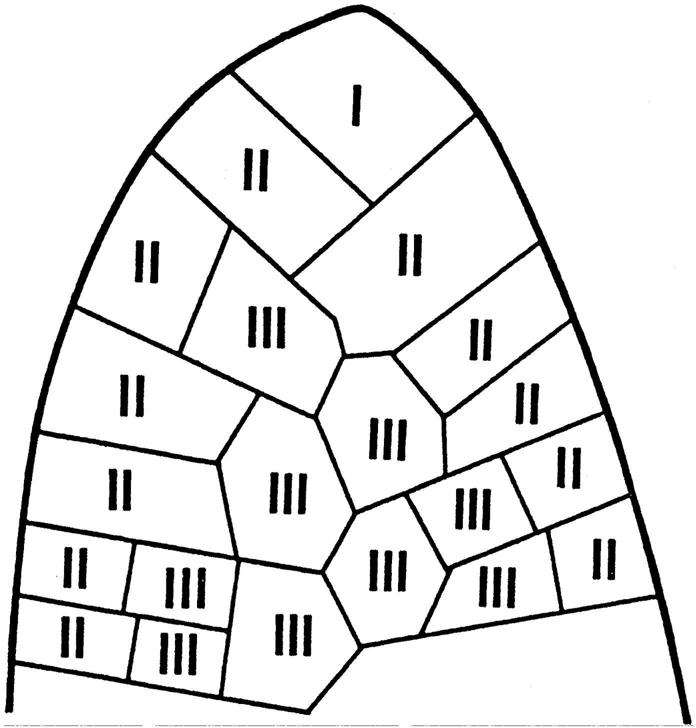
$\hookrightarrow$ 0L-Systeme ersetzen voll parallel (Definition von $\Longrightarrow$ als Substitution)

$\hookrightarrow$ (D)0L-Systeme definieren iterierte endliche Substitutionen (Homomorphismen)

Beispiel: Moos Phascum cuspidatum



Beispiel: Moos Phascum cuspidatum



Carl Wilhelm von Nägeli (1845):

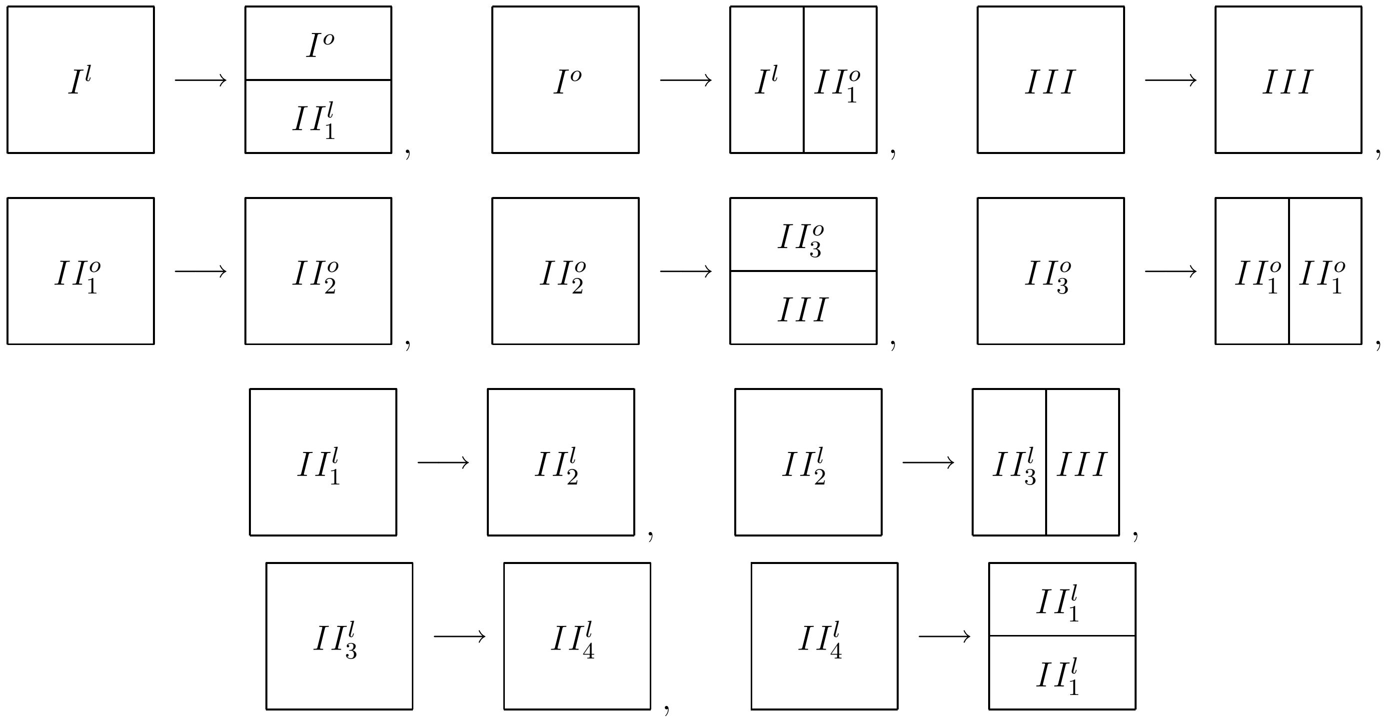
$I \to I + II,$

$II \to II, \; II \to II + III,$

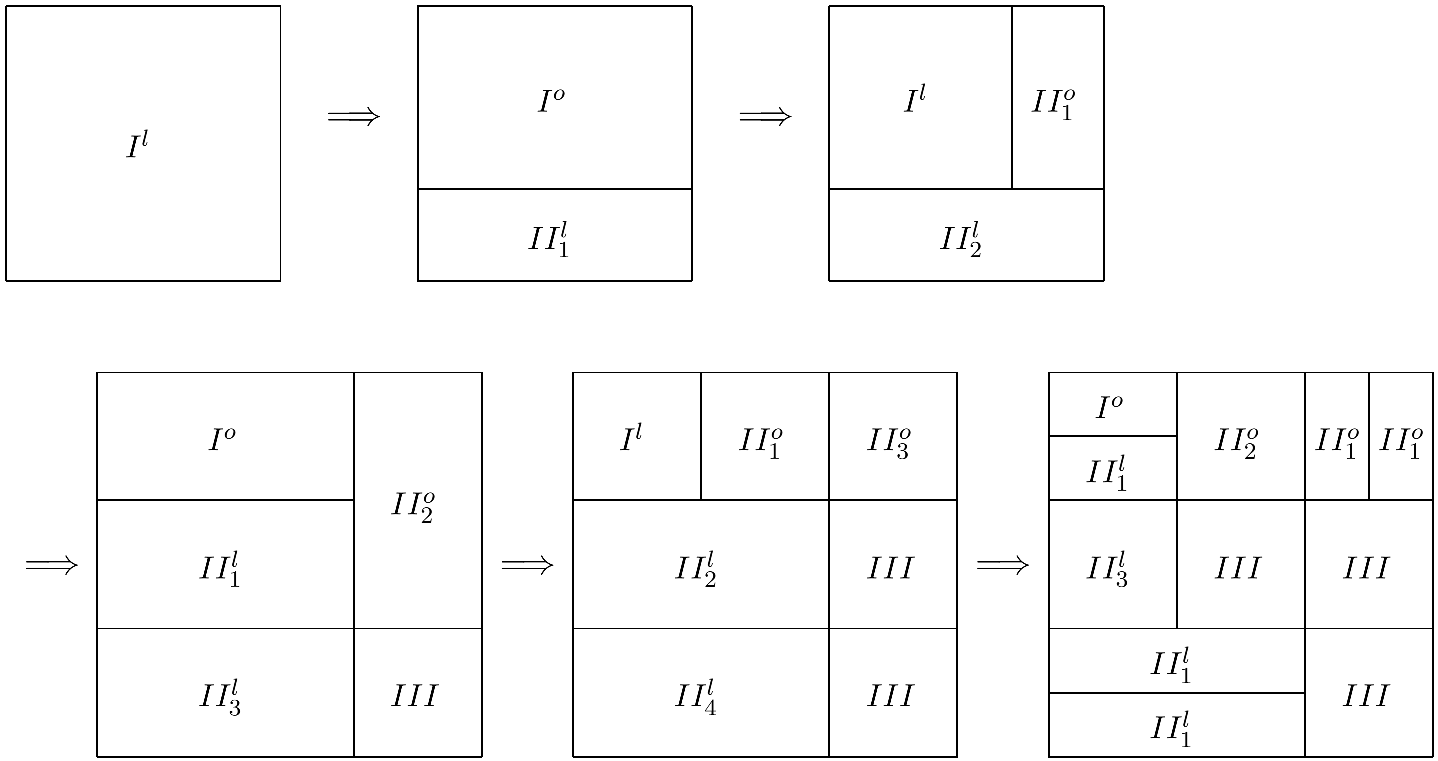
$III \to III$

unpräzise!

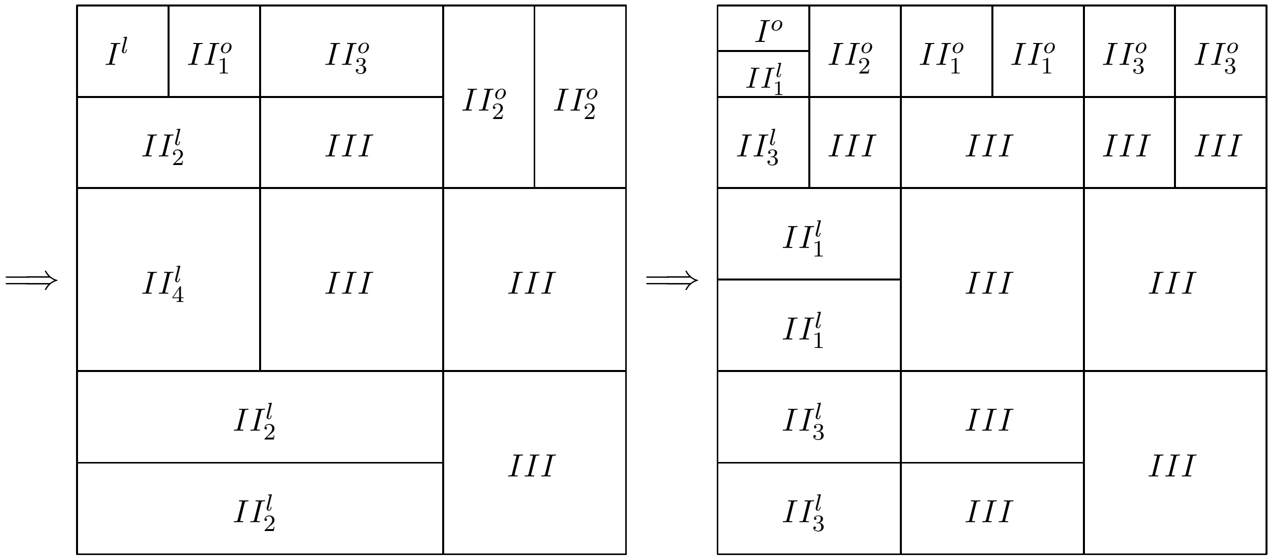
Beispiel: Moos Phascum cuspidatum



Beispiel: Moos Phascum cuspidatum



Beispiel: Moos Phascum cuspidatum



Wachstumsfunktion

Definition. Sei Σ ein Alphabet und $(w_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von Wörtern über Σ. Die Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ mit } f(n) = |w_n|,\ n \geq 0$$

heißt Wachstumsfunktion der Folge.

Für ein D0L-System G heißt die Wachstumsfunktion der Wortfolge $S(G)$ die Wachstumsfunktion von G.

Bezeichnung: f_G