

Naturwissenschaftlich motivierte formale Modelle

OL-Systeme, ihre Sprachen und Wachstumsfunktionen

Institut für Informatik und Computational Science
Universität Potsdam

Henning Bordihn

2. Lindenmayer-Systeme

2.1 0L-Systeme

Der Wachstumsprozess der *Callithamnion roseum*

$$\begin{array}{ll}
 w_0 & = 1 & 1 \rightarrow 23, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 24, \\
 w_1 & = 23 & 4 \rightarrow 25, 5 \rightarrow 65, 6 \rightarrow 7, \\
 w_2 & = 224 & 7 \rightarrow 8, 8 \rightarrow 9[3], 9 \rightarrow 9 \\
 w_3 & = 2225 \\
 w_4 & = 22265 \\
 w_5 & = 222765 \\
 w_6 & = 2228765 \\
 w_7 & = 2229[3]8765 \\
 w_8 & = 2229[24]9[3]8765 \\
 w_9 & = 2229[225]9[24]9[3]8765 \\
 w_{10} & = 2229[2265]9[225]9[24]9[3]8765 \\
 w_{11} & = 2229[22765]9[2265]9[225]9[24]9[3]8765 \\
 w_{12} & = 2229[228765]9[22765]9[2265]9[225]9[24]9[3]8765 \\
 w_{13} & = 2229[229[3]8765]9[228765]9[22765]9[2265]9[225]9[24]9[3]8765
 \end{array}$$

Erinnerung: Ersetzung/Substitution

Seien U und V Alphabete. Eine Abbildung $\sigma : U^* \rightarrow 2^{V^*}$ heißt Ersetzung/Substitution von U in V , falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\sigma(a) \neq \emptyset$ für alle $a \in U$
2. $\sigma(\lambda) = \{\lambda\}$
3. $\sigma(wa) = \sigma(w) \cdot \sigma(a)$ für alle $w \in U^*$ und $a \in U$.

σ heißt

- **endlich** gdw. $\sigma(a)$ endlich für alle $a \in U$,
- **nicht löschend** gdw. $\lambda \notin \sigma(a)$ für alle $a \in U$,
- **Homomorphismus** gdw. $\#\sigma(a) = 1$ für alle $a \in U$.

Ersetzung/Substitution (2)

- Sei σ eine Substitution von U in V und $L \subseteq U^*$.

$$\sigma(L) = \bigcup_{w \in L} \sigma(w)$$

- Sei ferner $w \in U^*$.

$$\sigma^0(w) = \{w\}$$

$$\sigma^{i+1}(w) = \sigma(\sigma^i(w)) \text{ für } i \geq 0.$$

0L-Systeme

Definition. Ein **0L-System** ist ein Tripel $G = (\Sigma, \sigma, \omega)$, wobei

Σ ein Alphabet,

σ eine *endliche* Substitution von Σ in Σ und

$\omega \in \Sigma^+$ das Axiom (Startwort) ist.

G heißt

- **propagierend (P0L-System)**, falls σ nicht löschend ist
- **deterministisch (D0L-System)**, falls σ ein Homomorphismus ist.
- Ist σ ein nicht löschender Homomorphismus, ist G ein **PD0L-System**.

Sprache eines 0L-Systems

Definition. Sei $G = (\Sigma, \sigma, \omega)$ ein 0L-System. Die von G erzeugte **Sprache** ist

$$L(G) = \bigcup_{n \geq 0} \sigma^n(\omega).$$

Fall G *deterministisch* ist, so heißt die Folge

$$S(G) = (\sigma^n(\omega))_{n \geq 0}$$

die von G erzeugte **Wortfolge**.

Notation: $\sigma^n(\omega) = \sigma_n$

OL-Systeme als reine parallele Grammatiken

Notation: Seien $a \in \Sigma$ und $x, y \in \Sigma^*$. Wir schreiben

$$a \rightarrow v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n \text{ für } \sigma(a) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$x \Longrightarrow y \text{ gdw. } y \in \sigma(x)$$

$$x \xrightarrow{n} y \text{ gdw. } y \in \sigma^n(x)$$

$$x \xrightarrow{*} y \text{ gdw. } y \in \sigma^n(x) \text{ für ein } n \geq 0$$

$$x \xrightarrow{+} y \text{ gdw. } y \in \sigma^n(x) \text{ für ein } n > 0$$

0L-Systeme als reine parallele Grammatiken

Notation: Seien $a \in \Sigma$ und $x, y \in \Sigma^*$. Wir schreiben

$$a \rightarrow v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n \text{ für } \sigma(a) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$x \Longrightarrow y \text{ gdw. } y \in \sigma(x)$$

$$x \xrightarrow{n} y \text{ gdw. } y \in \sigma^n(x)$$

$$x \xrightarrow{*} y \text{ gdw. } y \in \sigma^n(x) \text{ für ein } n \geq 0$$

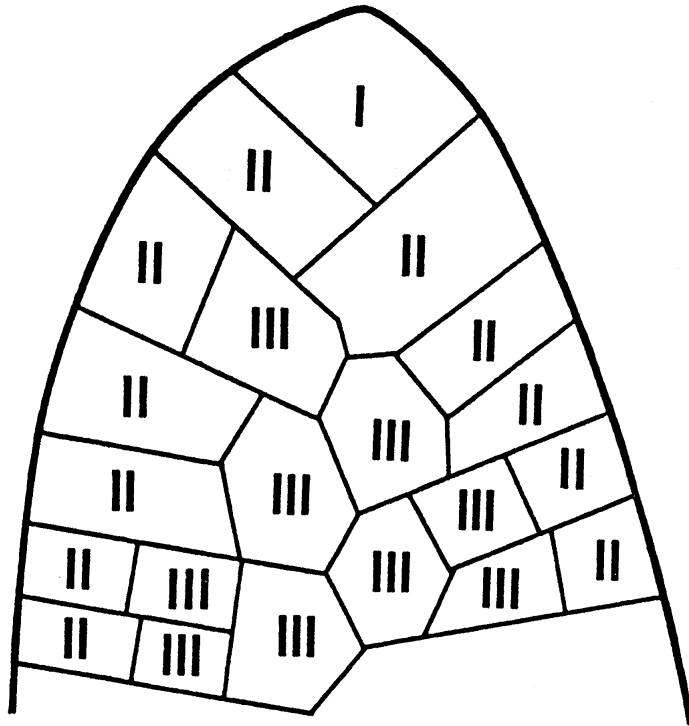
$$x \xrightarrow{+} y \text{ gdw. } y \in \sigma^n(x) \text{ für ein } n > 0$$

\hookrightarrow 0L-System G ist **reine** Grammatik (alle Satzformen in der Sprache)

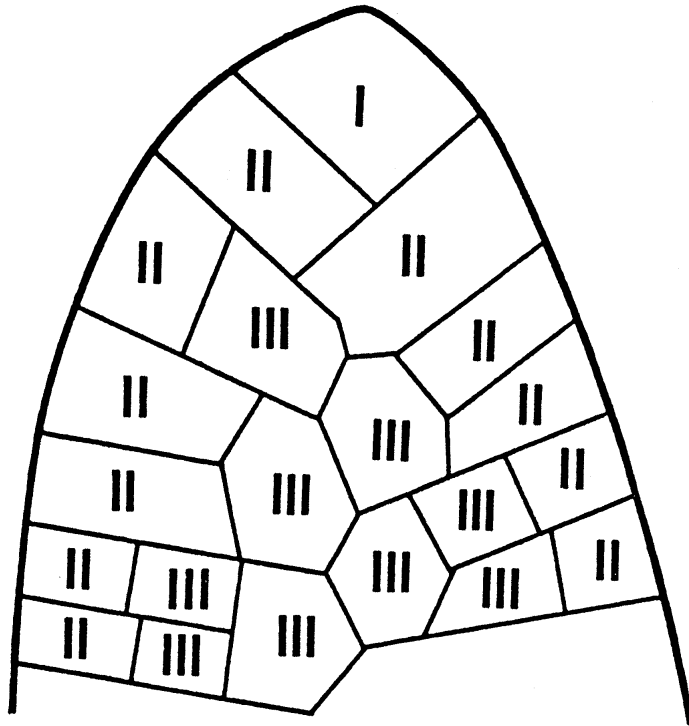
\hookrightarrow 0L-Systeme ersetzen voll **parallel** (Definition von \Longrightarrow als Substitution)

\hookrightarrow (D)0L-Systeme definieren iterierte endliche Substitutionen (Homomorphismen)

Beispiel: Moos *Phascum cuspidatum*



Beispiel: Moos *Phascum cuspidatum*



CARL WILHELM VON NÄGELI
(1845):

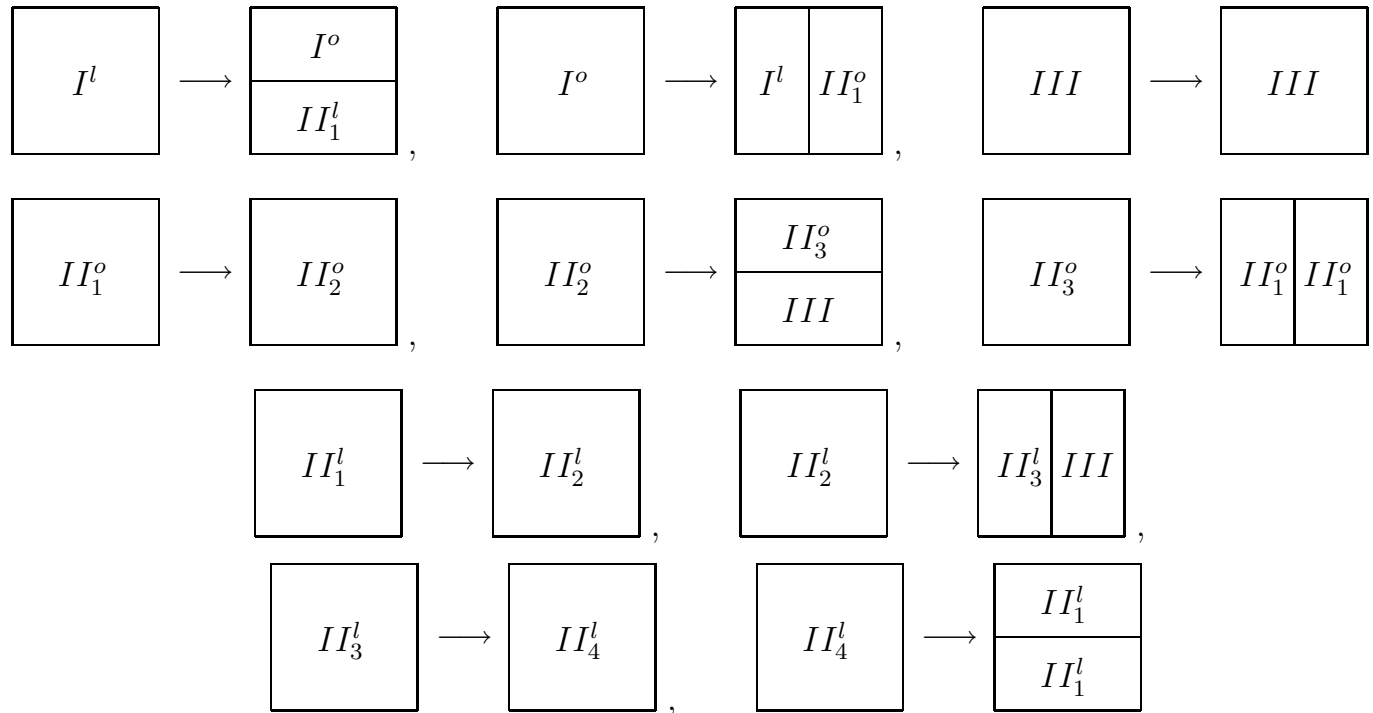
$$I \rightarrow I + II,$$

$$II \rightarrow II, \quad II \rightarrow II + III,$$

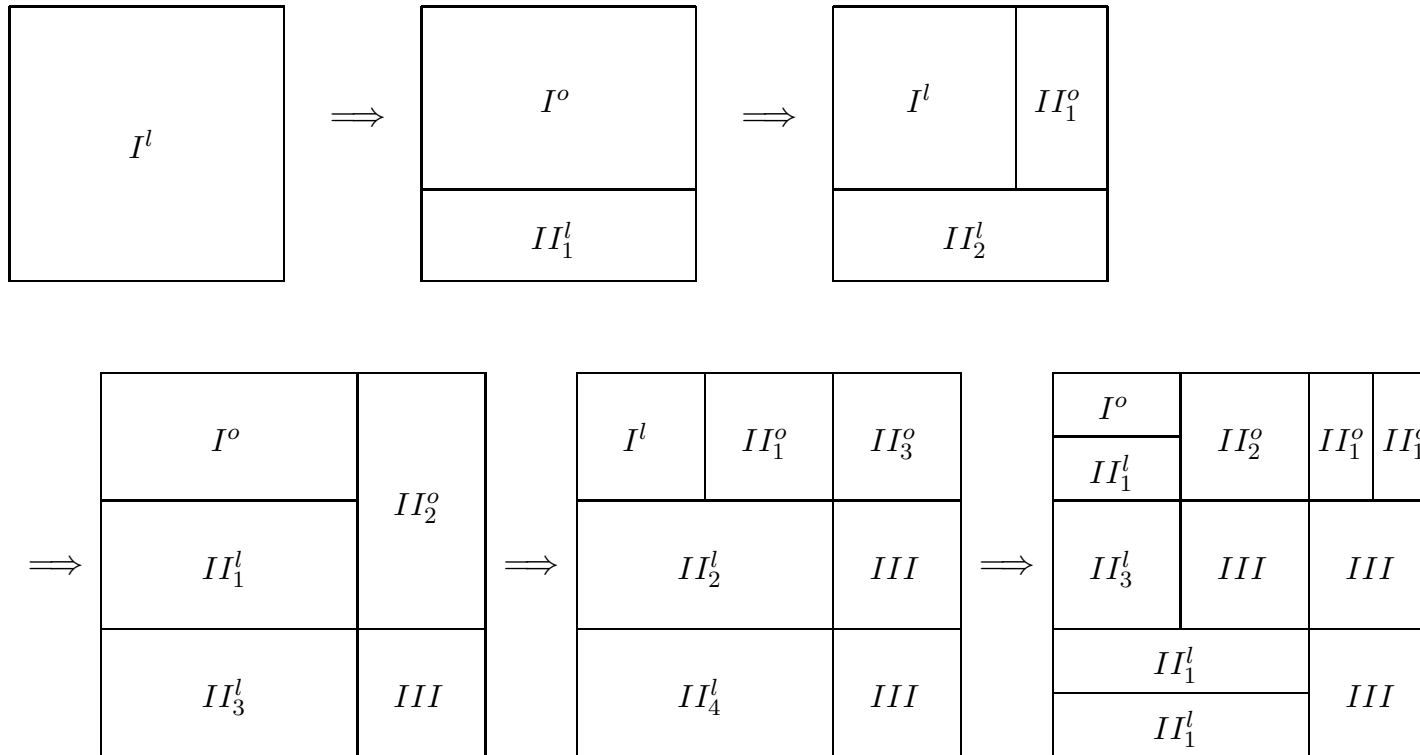
$$III \rightarrow III$$

unpräzise!

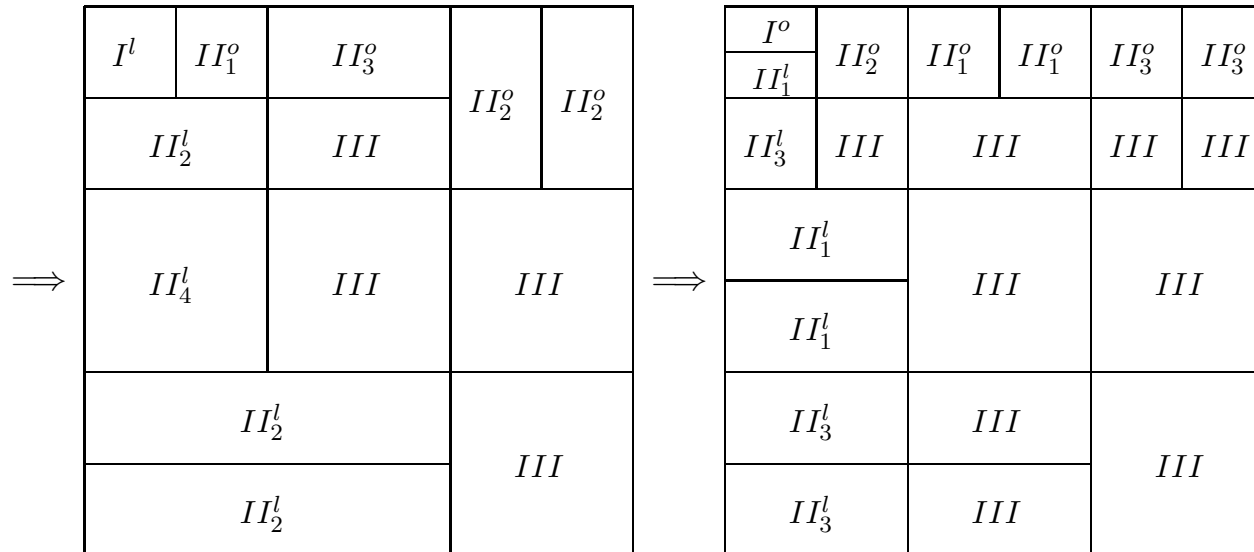
Beispiel: Moos Phascum cuspidatum



Beispiel: Moos Phascum cuspidatum



Beispiel: Moos Phascum cuspidatum



Wachstumsfunktion

Definition. Sei Σ ein Alphabet und $(w_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Wörtern über Σ . Die Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } f(n) = |w_n|, n \geq 0$$

heißt **Wachstumsfunktion** der Folge.

Für ein D0L-System G heißt die Wachstumsfunktion der Wortfolge $S(G)$ die Wachstumsfunktion von G .

Fibonacci-Spiralen und Natur

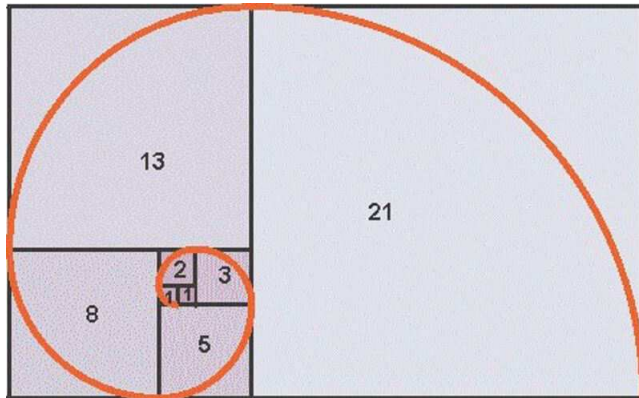
Fibonacci-Funktion, explizite Form:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Fibonacci-Spiralen und Natur

Fibonacci-Funktion, explizite Form:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$



Fibonacci-Spiralen und Natur

Fibonacci-Funktion, explizite Form:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

