Naturwissenschaftlich motivierte formale Modelle

0L-Systeme: Hierarchien, Abschlusseigenschaften

Institut für Informatik und Computational Science
Universität Potsdam

Henning Bordihn

Hierarchie der 0L-Sprachfamilien

Satz 2.5 Es gibt endliche Sprachen, die keine 0L-Sprachen sind.

Hierarchie der 0L-Sprachfamilien

Satz 2.5 Es gibt endliche Sprachen, die keine 0L-Sprachen sind.

Satz 2.6

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{L}(\mathrm{0L}) & \\
\mathcal{L}(\mathrm{P0L}) \arrow[ur] & & \mathcal{L}(\mathrm{D0L}) \arrow[ul] \\
& \mathcal{L}(\mathrm{PD0L}) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

($\rightarrow$ für $\subset$, kein Pfad: mengentheoretisch unvergleichbar)

Einordnung in die Chomsky-Hierarchie

Satz 2.7 Es gelten folgende Beziehungen:

1. $\mathcal{L}(\mathrm{0L}) \subset \mathcal{L}(\mathrm{CS})$

2. Jede der Sprachfamilien $\mathcal{L}(\mathrm{0L})$, $\mathcal{L}(\mathrm{P0L})$, $\mathcal{L}(\mathrm{D0L})$ und $\mathcal{L}(\mathrm{PD0L})$ ist *mengentheoretisch unvergleichbar* mit jeder der Familien $\mathcal{L}(\mathrm{CF})$, $\mathcal{L}(\mathrm{REG})$ und $\mathcal{L}(\mathrm{FIN})$, der Familie aller endlichen Sprachen.

Abgeschlossenheit

Notation. $\mathcal{L}_{\text{all}}$ – Familie *aller* Sprachen

Definition. Seien k eine ganze Zahl mit $k > 1$, $\mathcal{L}$ eine Sprachfamilie und $\circ$ eine k-stellige Operation

$$\circ : \mathcal{L}_{\text{all}}^k \to \mathcal{L}_{\text{all}} \ \text{ vermöge } \ \circ\,(L_1, L_2, \ldots, L_k) = L\,.$$

$\mathcal{L}$ heißt abgeschlossen unter $\circ$, falls für alle $L_1, L_2, \ldots, L_k \in \mathcal{L}$ gilt, dass

$$\circ(L_1, L_2, \ldots, L_k) \in \mathcal{L}\,.$$

AFL-Operationen

1. Vereinigung
2. Konkatenation $(\cdot)$
3. Kleene-Abschluss $(^*)$
4. nicht-löschende Homomorphismen
5. inverse Homomorphismen
6. Durchschnitt mit regulären Mengen

- Eine Sprachfamilie ist eine AFL, wenn sie unter allen AFL-Operationen abgeschlossen ist.
- Eine AFL heißt volle AFL, wenn sie unter beliebigen Homomorphismen abgeschlossen ist.

Abschlusseigenschaften

- Die Familien der Chomsky-Hierarchie sind AFLs, $\mathcal{L}(\mathrm{REG})$, $\mathcal{L}(\mathrm{CF})$, $\mathcal{L}(\mathrm{RE})$ sind voll.
- AFLs besitzen viele „schöne“ Eigenschaften.

Abschlusseigenschaften

- Die Familien der Chomsky-Hierarchie sind AFLs, $\mathcal{L}(\mathrm{REG})$, $\mathcal{L}(\mathrm{CF})$, $\mathcal{L}(\mathrm{RE})$ sind voll.

- AFLs besitzen viele „schöne“ Eigenschaften.

Satz 2.8 Die Familien $\mathcal{L}(\mathrm{PD0L})$, $\mathcal{L}(\mathrm{P0L})$, $\mathcal{L}(\mathrm{D0L})$, $\mathcal{L}(\mathrm{0L})$ sind unter keiner der AFL-Operationen abgeschlossen.