

# Theoretische Informatik II

## Einheit 5.2

### Rekursive Funktionen



1. Primitiv- und  $\mu$ -rekursive Funktionen
2. Analyse und Programmierung
3. Äquivalenz zu Turingmaschinen

# BERECHENBARKEIT OHNE MASCHINEN

**Welche Arten von Funktionen sind berechenbar?**

## Welche Arten von Funktionen sind berechenbar?

- **Einfache Funktionen müssen berechenbar sein**
  - **Nachfolgerfunktion**: von einer Zahl zur nächsten weiterzählen ( $s$ )
  - **Projektion**: aus einer Gruppe von Werten einen herauswählen ( $pr_k^n$ )
  - **Konstante**: unabhängig von der Eingabe eine feste Zahl ausgeben ( $c_k^n$ )

## Welche Arten von Funktionen sind berechenbar?

- **Einfache Funktionen müssen berechenbar sein**
  - **Nachfolgerfunktion**: von einer Zahl zur nächsten weiterzählen ( $s$ )
  - **Projektion**: aus einer Gruppe von Werten einen herauswählen ( $pr_k^n$ )
  - **Konstante**: unabhängig von der Eingabe eine feste Zahl ausgeben ( $c_k^n$ )
- **Berechenbare Funktionen sind zusammensetzbar**
  - Einfache **Operationen** erzeugen neue berechenbare Funktionen
  - **Komposition**: Hintereinanderausführen mehrerer Berechnungen
  - **Rekursion**: Programm ruft sich bei Ausführung selbst auf
  - **Suche**: nach der ersten Nullstelle einer Funktion

## Welche Arten von Funktionen sind berechenbar?

- **Einfache Funktionen müssen berechenbar sein**
  - **Nachfolgerfunktion**: von einer Zahl zur nächsten weiterzählen ( $s$ )
  - **Projektion**: aus einer Gruppe von Werten einen herauswählen ( $pr_k^n$ )
  - **Konstante**: unabhängig von der Eingabe eine feste Zahl ausgeben ( $c_k^n$ )
- **Berechenbare Funktionen sind zusammensetzbar**
  - Einfache **Operationen** erzeugen neue berechenbare Funktionen
  - **Komposition**: Hintereinanderausführen mehrerer Berechnungen
  - **Rekursion**: Programm ruft sich bei Ausführung selbst auf
  - **Suche**: nach der ersten Nullstelle einer Funktion
- **Beschreibung benötigt keine Funktionsargumente**
  - **Abstrakte Programmiersprache**: wende Operationen auf Funktionen an
  - Es reicht, die **Grundfunktionen** und **Operationen** zu benennen
  - **Mathematischer Kalkül** für informatiktypisches ‘Baukastensystem’

# BEISPIELE FÜR BAUKASTENPROGRAMMIERUNG

## ● Addition von 2

- Ergebnis entsteht durch zweifache Addition von 1  $x+2 = x+1+1$
- Abstrahiert: doppelte Anwendung der Nachfolgerfunktion  $x+2 = s(s(x))$
- Die Funktion  $+_2$  ist also die **Komposition** von  $s$  und  $s$   $+_2 \equiv s \circ s$

# BEISPIELE FÜR BAUKASTENPROGRAMMIERUNG

## ● Addition von 2

- Ergebnis entsteht durch zweifache Addition von 1  $x+2 = x+1+1$
- Abstrahiert: doppelte Anwendung der Nachfolgerfunktion  $x+2 = s(s(x))$
- Die Funktion  $+_2$  ist also die **Komposition** von  $s$  und  $s$   $+_2 \equiv s \circ s$

## ● Addition zweier Zahlen $x$ und $y$

- Ergebnis entsteht durch  $y$ -fache Addition von 1  $x+y = x+\underbrace{1 + \dots + 1}_{y\text{-mal}}$
- Iteration muß **rekursiv** beschrieben werden
  - Im Basisfall ( $y=0$ ) ist das Ergebnis  $x$   $x+0 = x$
  - Im Schrittfall verwenden wir die Addition von  $x$  und  $y$ , um die Addition von  $x$  und  $y+1$  zu bestimmen  $x+(y+1) = (x+y)+1$
- Abstrahiert:
  - **Basisfall** ergibt sich durch Anwendung der Projektion  $pr_1^1$  auf  $x$
  - **Schrittfall** ergibt sich durch Anwendung von  $s$  auf das “alte” Ergebnis

# BEISPIELE FÜR BAUKASTENPROGRAMMIERUNG

## ● Addition von 2

- Ergebnis entsteht durch zweifache Addition von 1  $x+2 = x+1+1$
- Abstrahiert: doppelte Anwendung der Nachfolgerfunktion  $x+2 = s(s(x))$
- Die Funktion  $+_2$  ist also die **Komposition** von  $s$  und  $s$   $+_2 \equiv s \circ s$

## ● Addition zweier Zahlen $x$ und $y$

- Ergebnis entsteht durch  $y$ -fache Addition von 1  $x+y = x+\underbrace{1 + \dots + 1}_{y\text{-mal}}$
- Iteration muß **rekursiv** beschrieben werden
  - Im Basisfall ( $y=0$ ) ist das Ergebnis  $x$   $x+0 = x$
  - Im Schrittfall verwenden wir die Addition von  $x$  und  $y$ , um die Addition von  $x$  und  $y+1$  zu bestimmen  $x+(y+1) = (x+y)+1$
- Abstrahiert:
  - **Basisfall** ergibt sich durch Anwendung der Projektion  $pr_1^1$  auf  $x$
  - **Schrittfall** ergibt sich durch Anwendung von  $s$  auf das “alte” Ergebnis

## ● kgV zweier Zahlen $x$ und $y$

- **Suche**, von Null beginnend, die kleinste Zahl  $z$  mit  $x$  teilt  $z$  und  $y$  teilt  $z$



## Funktionen, die aus Grundfunktionen durch Kompositionen und/oder primitive Rekursionen entstehen

### • Grundfunktionen

- **Nachfolgerfunktion**  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $s(x) = x + 1$
- **Projektionsfunktionen**  $pr_k^n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) mit  $pr_k^n(x_1, \dots, x_n) = x_k$
- **Konstantenfunktion**  $c_k^n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ( $0 \leq n$ ) mit  $c_k^n(x_1, \dots, x_n) = k$

## Funktionen, die aus Grundfunktionen durch Kompositionen und/oder primitive Rekursionen entstehen

### • Grundfunktionen

- **Nachfolgerfunktion**  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $s(x) = x + 1$
- **Projektionsfunktionen**  $pr_k^n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) mit  $pr_k^n(x_1, \dots, x_n) = x_k$
- **Konstantenfunktion**  $c_k^n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ( $0 \leq n$ ) mit  $c_k^n(x_1, \dots, x_n) = k$

### • Operationen auf Funktionen

- **Komposition**  $f \circ (g_1, \dots, g_n) : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ( $g_1, \dots, g_n : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ )  
Für  $h = f \circ (g_1, \dots, g_n)$  gilt  $h(x) = f(g_1(x), \dots, g_n(x))$

## Funktionen, die aus Grundfunktionen durch Kompositionen und/oder primitive Rekursionen entstehen

### • Grundfunktionen

- **Nachfolgerfunktion**  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $s(x) = x + 1$
- **Projektionsfunktionen**  $pr_k^n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) mit  $pr_k^n(x_1, \dots, x_n) = x_k$
- **Konstantenfunktion**  $c_k^n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  ( $0 \leq n$ ) mit  $c_k^n(x_1, \dots, x_n) = k$

### • Operationen auf Funktionen

- **Komposition**  $f \circ (g_1, \dots, g_n) : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ( $g_1, \dots, g_n : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ )

Für  $h = f \circ (g_1, \dots, g_n)$  gilt  $h(x) = f(g_1(x), \dots, g_n(x))$

- **Primitive Rekursion**  $Pr[f, g] : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ( $f : \mathbb{N}^{k-1} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ )

Für  $h = Pr[f, g]$  gilt  $h(x, 0) = f(x)$ ,

und  $h(x, y+1) = g(x, y, h(x, y))$

In Programmierschreibweise:  $h(x, y) = \text{if } y=0 \text{ then } f(x) \text{ else } g(x, y-1, h(x, y-1))$

- **Komposition  $\hat{=}$  Folge von Anweisungen**

$Y_1 := g_1(x_1, \dots, x_k) ;$

$\vdots$

$Y_n := g_n(x_1, \dots, x_k) ;$

$h := f(Y_1, \dots, Y_n)$

(Berechne  $h(x_1, \dots, x_k)$  für  $h = f \circ (g_1, \dots, g_n)$ )

(Das Resultat  $h$  entspricht  $h(x_1, \dots, x_k)$ )

- **Primitive Rekursion  $\hat{=}$  umgekehrte Zählschleife**

$h := f(x_1, \dots, x_k) ;$

for  $i := 1$  to  $y$  do  $h := g(x_1, \dots, x_k, i-1, h)$  od

(Berechne  $h(x_1, \dots, x_k, y)$  für  $h = Pr[f, g]$ )

(Resultat  $h \hat{=} h(x_1, \dots, x_k, y)$ )

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\mapsto f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2)$

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3](2, 2)$



# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3](2, 2)$

– Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = (s \circ pr_3^3)(2, 1, f_1(2, 1))$

– Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = (s \circ pr_3^3)(2, 1, (s \circ pr_3^3)(2, 0, f_1(2, 0)))$

– Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = (s \circ pr_3^3)(2, 1, (s \circ pr_3^3)(2, 0, pr_1^1(2)))$

– Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = (s \circ pr_3^3)(2, 1, (s \circ pr_3^3)(2, 0, pr_1^1(2)))$

– Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen

– Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = (s \circ pr_3^3)(2, 1, (s \circ pr_3^3)(2, 0, 2))$

- Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen
- Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = (s \circ pr_3^3)(2, 1, s(pr_3^3(2, 0, 2)))$

- Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen
- Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = (s \circ pr_3^3)(2, 1, s(2))$

- Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen
- Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen



# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = (s \circ pr_3^3)(2, 1, 3)$

– Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen

– Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = s(pr_3^3(2, 1, 3))$

- Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen
- Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = s(3)$

- Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen
- Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = 4$

- Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen
- Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = 4$

- Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen
- Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen

- **Analyse des rekursiven Verhaltens:**

- $f_1(x, 0) = pr_1^1(x) = x$

- $f_1(x, y+1) = (s \circ pr_3^3)(x, y, f_1(x, y)) = s(f_1(x, y)) = f_1(x, y) + 1$

# ANALYSE EINER PRIMITIVEN REKURSION

- $f_1 = Pr[pr_1^1, s \circ pr_3^3]$

Was macht  $f_1$ ?

- **Stelligkeitsanalyse:**

$$pr_1^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}, \quad s \circ pr_3^3: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad \mapsto \quad f_1: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

Beispiel:  $f_1(2, 2) = 4$

- Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen
- Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen

- **Analyse des rekursiven Verhaltens:**

- $f_1(x, 0) = pr_1^1(x) = x$

- $f_1(x, y+1) = (s \circ pr_3^3)(x, y, f_1(x, y)) = s(f_1(x, y)) = f_1(x, y) + 1$

**Das ist die Rekursionsgleichung der Addition**

$$\left. \begin{array}{l} x+0 = x \\ x+(y+1) = (x+y)+1 \end{array} \right\} \mapsto f_1 = \mathbf{add} \text{ mit } add(n, m) = n+m$$

# PROGRAMMIERUNG MIT PRIMITIVER REKURSION

Konstruiere primitiv-rekursives Programm für Vorgängerfunktion  $p$

- $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist definiert durch

$$p(n) = n - 1$$

# PROGRAMMIERUNG MIT PRIMITIVER REKURSION

**Konstruiere primitiv-rekursives Programm für Vorgängerfunktion  $p$**

- $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist definiert durch  $p(n) = n \dot{-} 1$
  - **Analysiere rekursives Verhalten der Funktion**
    - $p(0) = 0 \dot{-} 1 = 0$  (Subtraktion liefert niemals weniger als 0!!)
    - $p(y+1) = (y+1) \dot{-} 1 = y$
- In Programmierschreibweise:  $p(y) = \text{if } y=0 \text{ then } 0 \text{ else } y-1$



# PROGRAMMIERUNG MIT PRIMITIVER REKURSION

**Konstruiere primitiv-rekursives Programm für Vorgängerfunktion  $p$**

- $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist definiert durch  $p(n) = n - 1$
- **Analysiere rekursives Verhalten der Funktion**
  - $p(0) = 0 - 1 = 0$  (Subtraktion liefert niemals weniger als 0!!)
  - $p(y+1) = (y+1) - 1 = y$In Programmierschreibweise:  $p(y) = \text{if } y=0 \text{ then } 0 \text{ else } y-1$
- **Beschreibe  $p$  im Schema der primitiven Rekursion**
  - Die Programmiersprache “rekursive Funktionen” verlangt, daß das Beschreibungsschema  $Pr[f, g]$  eingehalten wird
  - Benötigt:  $f: \mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $p(0) = f() = 0 \quad \mapsto f = c_0^0$   
und  $g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $p(y+1) = g(y, p(y)) = y \quad \mapsto g = pr_1^2$

# PROGRAMMIERUNG MIT PRIMITIVER REKURSION

**Konstruiere primitiv-rekursives Programm für Vorgängerfunktion  $p$**

- $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist definiert durch  $p(n) = n - 1$
- **Analysiere rekursives Verhalten der Funktion**
  - $p(0) = 0 - 1 = 0$  (Subtraktion liefert niemals weniger als 0!!)
  - $p(y+1) = (y+1) - 1 = y$In Programmierschreibweise:  $p(y) = \text{if } y=0 \text{ then } 0 \text{ else } y-1$
- **Beschreibe  $p$  im Schema der primitiven Rekursion**
  - Die Programmiersprache “rekursive Funktionen” verlangt, daß das Beschreibungsschema  $Pr[f, g]$  eingehalten wird
  - Benötigt:  $f: \mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $p(0) = f() = 0 \quad \mapsto f = c_0^0$   
und  $g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $p(y+1) = g(y, p(y)) = y \quad \mapsto g = pr_1^2$

**Abstraktes Programm ist**

$$p = Pr[c_0^0, pr_1^2]$$

# PROGRAMMIERUNG PRIMITIV-REKURSIVER FUNKTIONEN

• **Subtraktion**  $sub : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$$sub(n, m) = n \dot{-} m$$

$$- sub(x, 0) = x = pr_1^1(x)$$

$$- sub(x, y+1) = x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 = p(x \dot{-} y) = (p \circ pr_3^3)(x, y, sub(x, y))$$

Abstraktes Programm:  $sub = Pr[pr_1^1, p \circ pr_3^3]$

# PROGRAMMIERUNG PRIMITIV-REKURSIVER FUNKTIONEN

- **Subtraktion**  $sub : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $sub(n, m) = n - m$ 
  - $sub(x, 0) = x = pr_1^1(x)$
  - $sub(x, y+1) = x - (y+1) = (x - y) - 1 = p(x - y) = (p \circ pr_3^3)(x, y, sub(x, y))$Abstraktes Programm:  $sub = Pr[pr_1^1, p \circ pr_3^3]$
- **Multiplikation**  $mul : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $mul(n, m) = n * m$ 
  - $mul(x, 0) = 0 = c_0^1(x)$
  - $mul(x, y+1) = mul(x, y) + x = (add \circ (pr_1^3, pr_3^3))(x, y, mul(x, y))$ $mul = Pr[c_0^1, (add \circ (pr_1^3, pr_3^3))]$

# PROGRAMMIERUNG PRIMITIV-REKURSIVER FUNKTIONEN

- **Subtraktion**  $sub : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $sub(n, m) = n - m$ 
  - $sub(x, 0) = x = pr_1^1(x)$
  - $sub(x, y+1) = x - (y+1) = (x - y) - 1 = p(x - y) = (p \circ pr_3^3)(x, y, sub(x, y))$Abstraktes Programm:  $sub = Pr[pr_1^1, p \circ pr_3^3]$
- **Multiplikation**  $mul : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $mul(n, m) = n * m$ 
  - $mul(x, 0) = 0 = c_0^1(x)$
  - $mul(x, y+1) = mul(x, y) + x = (add \circ (pr_1^3, pr_3^3))(x, y, mul(x, y))$ $mul = Pr[c_0^1, (add \circ (pr_1^3, pr_3^3))]$
- **Exponentiierung**  $exp : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $exp(n, m) = n^m$ 
  - $exp = Pr[c_1^1, (mul \circ (pr_1^3, pr_3^3))]$

# PROGRAMMIERUNG PRIMITIV-REKURSIVER FUNKTIONEN

- **Subtraktion**  $sub : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $sub(n, m) = n - m$ 
  - $sub(x, 0) = x = pr_1^1(x)$
  - $sub(x, y+1) = x - (y+1) = (x - y) - 1 = p(x - y) = (p \circ pr_3^3)(x, y, sub(x, y))$Abstraktes Programm:  $sub = Pr[pr_1^1, p \circ pr_3^3]$
- **Multiplikation**  $mul : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $mul(n, m) = n * m$ 
  - $mul(x, 0) = 0 = c_0^1(x)$
  - $mul(x, y+1) = mul(x, y) + x = (add \circ (pr_1^3, pr_3^3))(x, y, mul(x, y))$ $mul = Pr[c_0^1, (add \circ (pr_1^3, pr_3^3))]$
- **Exponentiierung**  $exp : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $exp(n, m) = n^m$  $exp = Pr[c_1^1, (mul \circ (pr_1^3, pr_3^3))]$
- **Fakultät**  $fak : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   $fak(n) = n! = 1 * 2 * \dots * n$  $fak = Pr[c_1^0, (mul \circ (s \circ pr_1^2, pr_2^2))]$

# PROGRAMMIERUNG PRIMITIV-REKURSIVER FUNKTIONEN

- **Subtraktion**  $sub : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $sub(n, m) = n - m$ 
  - $sub(x, 0) = x = pr_1^1(x)$
  - $sub(x, y+1) = x - (y+1) = (x - y) - 1 = p(x - y) = (p \circ pr_3^3)(x, y, sub(x, y))$Abstraktes Programm:  $sub = Pr[pr_1^1, p \circ pr_3^3]$
- **Multiplikation**  $mul : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $mul(n, m) = n * m$ 
  - $mul(x, 0) = 0 = c_0^1(x)$
  - $mul(x, y+1) = mul(x, y) + x = (add \circ (pr_1^3, pr_3^3))(x, y, mul(x, y))$ $mul = Pr[c_0^1, (add \circ (pr_1^3, pr_3^3))]$
- **Exponentiierung**  $exp : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $exp(n, m) = n^m$  $exp = Pr[c_1^1, (mul \circ (pr_1^3, pr_3^3))]$
- **Fakultät**  $fak : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   $fak(n) = n! = 1 * 2 * \dots * n$  $fak = Pr[c_1^0, (mul \circ (s \circ pr_1^2, pr_2^2))]$
- **Vorzeichen-Funktion**  $sign : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   $sign(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$  $sign = Pr[c_0^0, c_1^2]$

- **Programmierung durch Fallunterscheidung**

$$\text{Sei } h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } t(x) = 0 \\ g(x) & \text{sonst} \end{cases} \quad (f, g, t: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N})$$

**$h$  ist primitiv rekursiv, wenn  $f$ ,  $g$  und  $t$  primitiv rekursiv sind**

Beweis: wende Vorzeichenfunktion auf  $t(x)$  an, multipliziere mit  $f$  und  $g$

$$h(x) = (1 - \text{sign}(t(x))) * f(x) + \text{sign}(t(x)) * g(x)$$

Programmschema:  $h = \text{add} \circ (\text{mul} \circ (\text{sub} \circ (c_1^k, \text{sign} \circ t), f), \text{mul} \circ (\text{sign} \circ t, g))$



# PRIMITIV-REKURSIVE PROGRAMMIERSCHEMATA

- **Programmierung durch Fallunterscheidung**

$$\text{Sei } h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } t(x) = 0 \\ g(x) & \text{sonst} \end{cases} \quad (f, g, t: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N})$$

**$h$  ist primitiv rekursiv, wenn  $f$ ,  $g$  und  $t$  primitiv rekursiv sind**

Beweis: wende Vorzeichenfunktion auf  $t(x)$  an, multipliziere mit  $f$  und  $g$

$$h(x) = (1 - \text{sign}(t(x))) * f(x) + \text{sign}(t(x)) * g(x)$$

Programmschema:  $h = \text{add} \circ (\text{mul} \circ (\text{sub} \circ (c_1^k, \text{sign} \circ t), f), \text{mul} \circ (\text{sign} \circ t, g))$

- **Generelle Summe / Produkt:  $\sum_{i=0}^r f(x, i)$  /  $\prod_{i=0}^r f(x, i)$  primitiv rekursiv, wenn dies für  $f$  gilt** ( $f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ )

Beweis: es gilt  $\sum_{i=0}^0 f(x, i) = f(x, 0)$

$$\text{und } \sum_{i=0}^{y+1} f(x, i) = (\sum_{i=0}^y f(x, i)) + f(x, y + 1)$$

Also  $\Sigma f = Pr[f \circ (pr_1^1, c_0^1), \text{add} \circ (pr_3^3, f \circ (pr_1^3, s \circ pr_2^3))]$  (für  $k=1$ )

$\Pi f = Pr[f \circ (pr_1^1, c_0^1), \text{mul} \circ (pr_3^3, f \circ (pr_1^3, s \circ pr_2^3))]$  (Lösung für  $k > 1$  analog)

# PRIMITIV-REKURSIVE PROGRAMMIERSCHEMATA

- **Programmierung durch beschränkte Suche (Minimierung)**

$$\text{Sei } h(x, y) = \mathbf{Mn}[f](x, y) := \begin{cases} \min\{z \leq y \mid f(x, z) = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ y+1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N})$$

**$h$  ist primitiv rekursiv, wenn  $f$  primitiv rekursiv ist**

# PRIMITIV-REKURSIVE PROGRAMMIERSCHEMATA

- **Programmierung durch beschränkte Suche (Minimierung)**

$$\text{Sei } h(x, y) = \mathbf{Mn}[f](x, y) := \begin{cases} \min\{z \leq y \mid f(x, z) = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ y+1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N})$$

**$h$  ist primitiv rekursiv, wenn  $f$  primitiv rekursiv ist**

$$\text{Beweis: Es ist } h'(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f(x, 0) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = \text{sign}(f(x, 0))$$

$$\text{und } h'(x, y+1) = \begin{cases} h'(x, y) & \text{falls } h'(x, y) \leq y \\ y+1 & \text{falls } h'(x, y) = y+1 \text{ und } f(x, y+1) = 0 \\ y+2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist  $h'$  aus primitiv rekursiven Funktionen mit Fallunterscheidung und primitiver Rekursion konstruierbar und somit selbst **primitiv rekursiv**.

# PRIMITIV-REKURSIVE PROGRAMMIERSCHEMATA

- **Programmierung durch beschränkte Suche (Minimierung)**

$$\text{Sei } h(x, y) = \mathbf{Mn}[f](x, y) := \begin{cases} \min\{z \leq y \mid f(x, z) = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ y+1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N})$$

**$h$  ist primitiv rekursiv, wenn  $f$  primitiv rekursiv ist**

$$\text{Beweis: Es ist } h'(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f(x, 0) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = \text{sign}(f(x, 0))$$

$$\text{und } h'(x, y+1) = \begin{cases} h'(x, y) & \text{falls } h'(x, y) \leq y \\ y+1 & \text{falls } h'(x, y) = y+1 \text{ und } f(x, y+1) = 0 \\ y+2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist  $h'$  aus primitiv rekursiven Funktionen mit Fallunterscheidung und primitiver Rekursion konstruierbar und somit selbst **primitiv rekursiv**.

- **Beschränkte Maximierung  $Max[f]$  analog**

# WEITERE BEISPIELE PRIMITIV-REKURSIVER FUNKTIONEN

- **Absolute Differenz:**  $absdiff : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $absdiff(n, m) = |n - m|$
- **Maximum:**  $max : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $max(n, m) = \begin{cases} n & \text{falls } n \geq m \\ m & \text{sonst} \end{cases}$
- **Minimum:**  $min : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $min(n, m) = \begin{cases} m & \text{falls } n \geq m \\ n & \text{sonst} \end{cases}$
- **Division:**  $div : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $div(n, m) = n \div m$
- **Divisionsrest:**  $mod : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$   $mod(n, m) = n \bmod m$
- **Quadratwurzel:**  $sqrt : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   $sqrt(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
- **Logarithmus:**  $ld : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   $ld(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$
- **Größter gemeinsamer Teiler:**  $ggT : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$
- **Kleinstes gemeinsames Vielfaches:**  $kgV : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

Beweise in Übungen selbst durchführen !

# BERECHNUNGEN AUF ZAHLENPAAREN UND -LISTEN

⋮							
5							
4							
3							
2							
1							
0							
$y/x$	0	1	2	3	4	5	...

# BERECHNUNGEN AUF ZAHLENPAAREN UND -LISTEN

⋮							
5							
4							
3							
2							
1							
0	0						
$y/x$	0	1	2	3	4	5	...

# BERECHNUNGEN AUF ZAHLENPAAREN UND -LISTEN

⋮							
5							
4							
3							
2							
1							
0	0	1					
$y/x$	0	1	2	3	4	5	...



# BERECHNUNGEN AUF ZAHLENPAAREN UND -LISTEN

5							
4							
3							
2							
1	<b>2</b>						
0	<b>0</b>	<b>1</b>					
$y/x$	0	1	2	3	4	5	...

# BERECHNUNGEN AUF ZAHLENPAAREN UND -LISTEN

5							
4							
3							
2	5						
1	2	4					
0	0	1	3				
$y/x$	0	1	2	3	4	5	...

# BERECHNUNGEN AUF ZAHLENPAAREN UND -LISTEN

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
5	<b>20</b>						...
4	<b>14</b>	<b>19</b>					...
3	<b>9</b>	<b>13</b>	<b>18</b>				...
2	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>12</b>	<b>17</b>			...
1	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>11</b>	<b>16</b>		...
0	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	...
$y/x$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	...

# BERECHNUNGEN AUF ZAHLENPAAREN UND -LISTEN

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
5	20						...
4	14	19					...
3	9	13	18				...
2	5	8	12	17			...
1	2	4	7	11	16		...
0	0	1	3	6	10	15	...
$y/x$	0	1	2	3	4	5	...

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &:= (\sum_{i=1}^{x+y} i) + y \\
 &= \\
 &(x+y)(x+y+1) \div 2 + y
 \end{aligned}$$

“Standard-Tupelfunktion”

# BERECHNUNGEN AUF ZAHLENPAAREN UND -LISTEN

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
5	20						...
4	14	19					...
3	9	13	18				...
2	5	8	12	17			...
1	2	4	7	11	16		...
0	0	1	3	6	10	15	...
$y/x$	0	1	2	3	4	5	...

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &:= (\sum_{i=1}^{x+y} i) + y \\
 &= \\
 &= (x+y)(x+y+1) \div 2 + y
 \end{aligned}$$

“Standard-Tupelfunktion”

- $\langle \rangle: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  ist primitiv-rekursiv und bijektiv
- Die Umkehrfunktionen  $\pi_i^2 := pr_i^2 \circ \langle \rangle^{-1}$  sind primitiv-rekursiv

# BERECHNUNGEN AUF ZAHLENPAAREN UND -LISTEN

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
5	20						...
4	14	19					...
3	9	13	18				...
2	5	8	12	17			...
1	2	4	7	11	16		...
0	0	1	3	6	10	15	...
$y/x$	0	1	2	3	4	5	...

$$\langle x, y \rangle := \left( \sum_{i=1}^{x+y} i \right) + y$$

$$= (x+y)(x+y+1) \div 2 + y$$

“**Standard-Tupelfunktion**”

- $\langle \rangle : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  ist primitiv-rekursiv und bijektiv
- Die Umkehrfunktionen  $\pi_i^2 := pr_i^2 \circ \langle \rangle^{-1}$  sind primitiv-rekursiv
- $\langle \rangle$  kann iterativ auf  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  und auf  $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  fortgesetzt werden
  - $\langle x, y, z \rangle^3 = \langle x, \langle y, z \rangle \rangle, \dots, \langle x_1 \dots x_k \rangle^* = \langle k, \langle x_1, \dots, x_k \rangle^k \rangle$
  - Alle Funktionen sind bijektiv und primitiv-rekursiv
  - Alle Umkehrfunktionen  $\pi_i^k$  und  $\pi_i^*$  sind primitiv-rekursiv

# BERECHNUNGEN AUF ZAHLENPAAREN UND -LISTEN

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...
5	20						...
4	14	19					...
3	9	13	18				...
2	5	8	12	17			...
1	2	4	7	11	16		...
0	0	1	3	6	10	15	...
$y/x$	0	1	2	3	4	5	...

$$\langle x, y \rangle := \left( \sum_{i=1}^{x+y} i \right) + y$$

$$= (x+y)(x+y+1) \div 2 + y$$

“**Standard-Tupelfunktion**”

- $\langle \rangle : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  ist primitiv-rekursiv und bijektiv
- Die Umkehrfunktionen  $\pi_i^2 := pr_i^2 \circ \langle \rangle^{-1}$  sind primitiv-rekursiv
- $\langle \rangle$  kann iterativ auf  $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  und auf  $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$  fortgesetzt werden
  - $\langle x, y, z \rangle^3 = \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$ , ...,  $\langle x_1 \dots x_k \rangle^* = \langle k, \langle x_1, \dots, x_k \rangle^k \rangle$
  - Alle Funktionen sind bijektiv und primitiv-rekursiv
  - Alle Umkehrfunktionen  $\pi_i^k$  und  $\pi_i^*$  sind primitiv-rekursiv

**Jede Funktion  $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  kann einstellig simuliert werden**

- Wähle  $g := f \circ (\pi_1^2, \pi_2^2)$ , dann gilt  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  und  $g(\langle x, y \rangle) = f(x, y)$

# REICHEN PRIMITIV-REKURSIVE FUNKTIONEN AUS?

- Definiere “**Ackermann-**”Funktionen  $A_n$  iterativ

$$A_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x=0 \\ 2 & \text{falls } x=1 \\ x+2 & \text{sonst} \end{cases} \quad \begin{aligned} A_{n+1}(0) &:= 1 \\ A_{n+1}(x+1) &:= A_n(A_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

Jede einzelne der Funktionen  $A_n$  ist primitiv-rekursiv



# REICHEN PRIMITIV-REKURSIVE FUNKTIONEN AUS?

- Definiere “**Ackermann-**”Funktionen  $A_n$  iterativ

$$A_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x=0 \\ 2 & \text{falls } x=1 \\ x+2 & \text{sonst} \end{cases} \quad \begin{aligned} A_{n+1}(0) &:= 1 \\ A_{n+1}(x+1) &:= A_n(A_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

Jede einzelne der Funktionen  $A_n$  ist primitiv-rekursiv

- Das Wachstumsverhalten der  $A_n$  steigt mit  $n$

$$A_1(x) = 2x \quad (x \geq 1)$$

$$A_2(x) = 2^x$$

$$A_3(x) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\dots^2})})}}_{x\text{-mal}}$$

# REICHEN PRIMITIV-REKURSIVE FUNKTIONEN AUS?

- Definiere “**Ackermann-**”Funktionen  $A_n$  iterativ

$$A_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x=0 \\ 2 & \text{falls } x=1 \\ x+2 & \text{sonst} \end{cases} \quad \begin{aligned} A_{n+1}(0) &:= 1 \\ A_{n+1}(x+1) &:= A_n(A_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

Jede einzelne der Funktionen  $A_n$  ist primitiv-rekursiv

- Das Wachstumsverhalten der  $A_n$  steigt mit  $n$

$$A_1(x) = 2x \quad (x \geq 1) \quad A_4(0) = 1$$

$$A_2(x) = 2^x \quad A_4(1) = 2$$

$$A_3(x) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\dots^2})})}}_{x\text{-mal}} \quad A_4(2) = 2^2 = 4$$

# REICHEN PRIMITIV-REKURSIVE FUNKTIONEN AUS?

- Definiere “**Ackermann-**”Funktionen  $A_n$  iterativ

$$A_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x=0 \\ 2 & \text{falls } x=1 \\ x+2 & \text{sonst} \end{cases} \quad \begin{aligned} A_{n+1}(0) &:= 1 \\ A_{n+1}(x+1) &:= A_n(A_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

Jede einzelne der Funktionen  $A_n$  ist primitiv-rekursiv

- Das Wachstumsverhalten der  $A_n$  steigt mit  $n$

$$\begin{array}{lll} A_1(x) = 2x \quad (x \geq 1) & A_4(0) = 1 & A_4(3) = 2^{2^{2^2}} = 65536 \\ A_2(x) = 2^x & A_4(1) = 2 & A_4(4) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\dots^2})})}}_{65536\text{-mal}} \\ A_3(x) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\dots^2})})}}_{x\text{-mal}} & A_4(2) = 2^2 = 4 & \end{array}$$

# REICHEN PRIMITIV-REKURSIVE FUNKTIONEN AUS?

- Definiere “**Ackermann-**”Funktionen  $A_n$  iterativ

$$A_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x=0 \\ 2 & \text{falls } x=1 \\ x+2 & \text{sonst} \end{cases} \quad \begin{aligned} A_{n+1}(0) &:= 1 \\ A_{n+1}(x+1) &:= A_n(A_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

Jede einzelne der Funktionen  $A_n$  ist primitiv-rekursiv

- Das Wachstumsverhalten der  $A_n$  steigt mit  $n$

$$\begin{array}{lll} A_1(x) = 2x \quad (x \geq 1) & A_4(0) = 1 & A_4(3) = 2^{2^{2^2}} = 65536 \\ A_2(x) = 2^x & A_4(1) = 2 & A_4(4) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\dots^2})})}}_{65536\text{-mal}} \\ A_3(x) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\dots^2})})}}_{x\text{-mal}} & A_4(2) = 2^2 = 4 & A_4(5) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\dots^2})})}}_{A_4(4)\text{-mal}} \end{array}$$

# REICHEN PRIMITIV-REKURSIVE FUNKTIONEN AUS?

- Definiere “**Ackermann-**”Funktionen  $A_n$  iterativ

$$A_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x=0 \\ 2 & \text{falls } x=1 \\ x+2 & \text{sonst} \end{cases} \quad \begin{aligned} A_{n+1}(0) &:= 1 \\ A_{n+1}(x+1) &:= A_n(A_{n+1}(x)) \end{aligned}$$

Jede einzelne der Funktionen  $A_n$  ist primitiv-rekursiv

- Das Wachstumsverhalten der  $A_n$  steigt mit  $n$

$$\begin{array}{lll} A_1(x) = 2x \quad (x \geq 1) & A_4(0) = 1 & A_4(3) = 2^{2^{2^2}} = 65536 \\ A_2(x) = 2^x & A_4(1) = 2 & A_4(4) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\dots^2})})}}_{65536\text{-mal}} \\ A_3(x) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\dots^2})})}}_{x\text{-mal}} & A_4(2) = 2^2 = 4 & A_4(5) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\dots^2})})}}_{A_4(4)\text{-mal}} \end{array}$$

- Definiere  $A(x) := A_x(x)$  (**Große Ackermann-Funktion**)

- $A$  wächst extrem stark, ist aber **total** (auf jeder Eingabe definiert)
- $A$  ist intuitiv berechenbar **kann aber nicht primitiv-rekursiv sein**

# WARUM KANN $A$ NICHT PRIMITIV-REKURSIV SEIN ?

- Betrachte **Schachtelungstiefe** einer Funktion

Anzahl der ineinander verschachtelten Rekursionen

- Funktionen ohne primitive Rekursion  $\mapsto$  **Tiefe 0**
- Komposition mit Funktionen der Tiefe  $n$   $\mapsto$  **Tiefe  $n$**
- Primitive Rekursion mit Funktionen der Tiefe  $n$   $\mapsto$  **Tiefe  $n+1$**

Jede primitiv-rekursive Funktion hat eine begrenzte Schachtelungstiefe

# WARUM KANN $A$ NICHT PRIMITIV-REKURSIV SEIN ?

- Betrachte **Schachtelungstiefe** einer Funktion

Anzahl der ineinander verschachtelten Rekursionen

- Funktionen ohne primitive Rekursion  $\mapsto$  **Tiefe 0**
- Komposition mit Funktionen der Tiefe  $n$   $\mapsto$  **Tiefe  $n$**
- Primitive Rekursion mit Funktionen der Tiefe  $n$   $\mapsto$  **Tiefe  $n+1$**

Jede primitiv-rekursive Funktion hat eine begrenzte Schachtelungstiefe

- **Beispiele**

- Tiefe 1: Addition *add*, Vorgänger *p*, Signum *sign*
- Tiefe 2: Multiplikation *mul*, Subtraktion *sub*
- Tiefe 3: Exponentiation *exp*, Fakultät *fak*

# WARUM KANN $A$ NICHT PRIMITIV-REKURSIV SEIN ?

- **Betrachte Schachtelungstiefe einer Funktion**

Anzahl der ineinander verschachtelten Rekursionen

- Funktionen ohne primitive Rekursion  $\mapsto$  **Tiefe 0**
- Komposition mit Funktionen der Tiefe  $n$   $\mapsto$  **Tiefe  $n$**
- Primitive Rekursion mit Funktionen der Tiefe  $n$   $\mapsto$  **Tiefe  $n+1$**

Jede primitiv-rekursive Funktion hat eine begrenzte Schachtelungstiefe

- **Beispiele**

- Tiefe 1: Addition *add*, Vorgänger *p*, Signum *sign*
- Tiefe 2: Multiplikation *mul*, Subtraktion *sub*
- Tiefe 3: Exponentiation *exp*, Fakultät *fak*

- **Die Schachtelungstiefe von  $A$  ist unbegrenzbar**

- Die Berechnung von  $A(x)$  benötigt Schachtelungstiefe  $x$
- **$A$  kann nicht primitiv-rekursiv sein**

Präzises formales Argument ist sehr aufwendig (mögliches Projektthema)



# WIE KANN MAN DIE ACKERMANNFUNKTION BERECHNEN?

- **Intuitiver Berechnungsmechanismus einfach**
  - Schrittweise Abarbeitung der Rekursion
  - Verarbeitung von Rekursionsstacks fest in Compilern verankert

# WIE KANN MAN DIE ACKERMANNFUNKTION BERECHNEN?

- **Intuitiver Berechnungsmechanismus einfach**

- Schrittweise Abarbeitung der Rekursion
- Verarbeitung von Rekursionsstacks fest in Compilern verankert

- **$A$  ist in im Stil rekursiver Funktionen programmierbar**

(mögliches Projektthema)

- Beschreibe Abarbeitungsfunktion  $\delta$  eines Berechnungsstacks für  $A$  unter Verwendung der Standardtupelfunktion auf Listen über  $\mathbb{N}$

$$\delta \langle w \ n \ 0 \rangle^* = \langle w \ 1 \rangle^* \quad A_n(0) = 1$$

$$\delta \langle w \ 0 \ 1 \rangle^* = \langle w \ 2 \rangle^* \quad A_0(1) = 2$$

$$\delta \langle w \ 0 \ (x+2) \rangle^* = \langle w \ (x+4) \rangle^* \quad A_0(x+2) = x+4$$

$$\delta \langle w \ (n+1)(x+1) \rangle^* = \langle w \ x \ (n+1) \ x \rangle^* \quad A_{n+1}(x+1) = A_n(A_{n+1}(x))$$

- $\delta$  ist primitiv-rekursiv

(Beschreibung des Programms aufwendig)

# WIE KANN MAN DIE ACKERMANNFUNKTION BERECHNEN?

- **Intuitiver Berechnungsmechanismus einfach**

- Schrittweise Abarbeitung der Rekursion
- Verarbeitung von Rekursionsstacks fest in Compilern verankert

- **$A$  ist in im Stil rekursiver Funktionen programmierbar**

(mögliches Projektthema)

- Beschreibe Abarbeitungsfunktion  $\delta$  eines Berechnungsstacks für  $A$  unter Verwendung der Standardtupelfunktion auf Listen über  $\mathbb{N}$

$$\delta \langle w \ n \ 0 \rangle^* = \langle w \ 1 \rangle^* \quad A_n(0) = 1$$

$$\delta \langle w \ 0 \ 1 \rangle^* = \langle w \ 2 \rangle^* \quad A_0(1) = 2$$

$$\delta \langle w \ 0 \ (x+2) \rangle^* = \langle w \ (x+4) \rangle^* \quad A_0(x+2) = x+4$$

$$\delta \langle w \ (n+1) \ (x+1) \rangle^* = \langle w \ x \ (n+1) \ x \rangle^* \quad A_{n+1}(x+1) = A_n(A_{n+1}(x))$$

- $\delta$  ist primitiv-rekursiv (Beschreibung des Programms aufwendig)

und  $A(x) = \delta^k \langle x \ x \rangle^*$ , wobei  $k$  die kleinste Zahl ist mit  $\pi_1^2(\delta^k \langle x \ x \rangle^*) = 1$ , d.h. der Stack  $\delta^k \langle x \ x \rangle^*$  enthält nur eine Zahl – das Ergebnis

- Berechnung terminiert, da in jedem  $\delta$ -Schritt entweder die erste bearbeitete Zahl im Stack oder die Anzahl der Zahlen kleiner wird

- **Ackermann Funktion ist mit Suche programmierbar**
  - Suche das kleinste  $k$ , für das die Eigenschaft  $\pi_1^2(\delta^j \langle xx \rangle^*) = 1$  gilt
  - Minimierung wie  $Mn_g[f]$ , aber **ohne Obergrenze  $g$  für Suchschritte**

- **Ackermann Funktion ist mit Suche programmierbar**

- Suche das kleinste  $k$ , für das die Eigenschaft  $\pi_1^2(\delta^j \langle xx \rangle^*) = 1$  gilt
- Minimierung wie  $Mn_g[f]$ , aber **ohne Obergrenze  $g$  für Suchschritte**

- **Zusätzliche Operation Minimierung  $\mu f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ( $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ )**

Für  $h = \mu f$  gilt 
$$h(x) = \begin{cases} \min\{y \mid f(x, y) = 0\} & \text{falls dies existiert und alle} \\ & f(x, i) \text{ für } i < y \text{ definiert sind} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Kurzschreibweise auch:  $h(x) = \mu_z[f(x, z) = 0]$  “ $\mu$ -Operator”

- Funktionen die aus den Grundfunktionen durch Komposition, primitive Rekursion oder Minimierung entstehen, heißen **( $\mu$ -)rekursiv**

- **Ackermann Funktion ist mit Suche programmierbar**

- Suche das kleinste  $k$ , für das die Eigenschaft  $\pi_1^2(\delta^j \langle xx \rangle^*) = 1$  gilt
- Minimierung wie  $Mn_g[f]$ , aber **ohne Obergrenze  $g$  für Suchschritte**

- **Zusätzliche Operation Minimierung  $\mu f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  ( $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ )**

Für  $h = \mu f$  gilt 
$$h(x) = \begin{cases} \min\{y \mid f(x, y) = 0\} & \text{falls dies existiert und alle} \\ & f(x, i) \text{ für } i < y \text{ definiert sind} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Kurzschreibweise auch:  $h(x) = \mu_z [f(x, z) = 0]$       “ $\mu$ -Operator”

- Funktionen die aus den Grundfunktionen durch Komposition, primitive Rekursion oder Minimierung entstehen, heißen **( $\mu$ -)rekursiv**

- **Minimierung  $\hat{=}$  Suche mit While-schleife**

(Berechne  $h(x_1, \dots, x_k)$  für  $h = \mu f$ )

```

y := 0;
while f(x1, . . . , xk, y) ≠ 0 do y := y + 1 od; (unbegrenzte Suche)
h := y
    
```

(Resultat  $h \hat{=} h(x_1, \dots, x_k)$ )

# ANALYSE $\mu$ -REKURSIVER FUNKTIONEN

- $f_2 = \mu c_1^2$

# ANALYSE $\mu$ -REKURSIVER FUNKTIONEN

- $f_2 = \mu c_1^2$

$$f_2(x) = \begin{cases} \min\{y \mid c_1^2(x, y) = 0\} & \text{falls } y \text{ existiert und alle} \\ & c_1^2(x, i), i < y \text{ definiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \min\{y \mid 1 = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \perp$$



# ANALYSE $\mu$ -REKURSIVER FUNKTIONEN

- $f_2 = \mu c_1^2$

$$f_2(x) = \begin{cases} \min\{y \mid c_1^2(x, y) = 0\} & \text{falls } y \text{ existiert und alle} \\ & c_1^2(x, i), i < y \text{ definiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \min\{y \mid 1 = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \perp$$

- $f_3 = \mu \text{ add}$

# ANALYSE $\mu$ -REKURSIVER FUNKTIONEN

- $f_2 = \mu c_1^2$   $f_2(x) = \begin{cases} \min\{y \mid c_1^2(x, y) = 0\} & \text{falls } y \text{ existiert und alle} \\ & c_1^2(x, i), i < y \text{ definiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$   
 $= \begin{cases} \min\{y \mid 1 = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$   
 $= \perp$
- $f_3 = \mu \text{ add}$   $f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

# ANALYSE $\mu$ -REKURSIVER FUNKTIONEN

- $f_2 = \mu c_1^2$       $f_2(x) = \begin{cases} \min\{y \mid c_1^2(x, y) = 0\} & \text{falls } y \text{ existiert und alle} \\ & c_1^2(x, i), i < y \text{ definiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$   
 $= \begin{cases} \min\{y \mid 1 = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$   
 $= \perp$
- $f_3 = \mu \text{ add}$       $f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$
- $f_4 = \mu h$ , wobei  $h(x, y) = 0$ , falls  $x=y$ , und  $h(x, y) = \perp$ , sonst

# ANALYSE $\mu$ -REKURSIVER FUNKTIONEN

- $f_2 = \mu c_1^2$ 

$$f_2(x) = \begin{cases} \min\{y \mid c_1^2(x, y) = 0\} & \text{falls } y \text{ existiert und alle} \\ & c_1^2(x, i), i < y \text{ definiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \min\{y \mid 1 = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \perp$$

- $f_3 = \mu \text{ add}$ 

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- $f_4 = \mu h$ , wobei  $h(x, y) = 0$ , falls  $x=y$ , und  $h(x, y) = \perp$ , sonst

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

$h(x, y) = 0$  für  $x = y$ , aber  $h$  ist undefiniert für  $x > 0$  und  $y < x$

# WICHTIGE KLASSEN REKURSIVER FUNKTIONEN

- **$\mathcal{R}$ : Menge der ( $\mu$ -)rekursiven Funktionen**
- Grundfunktionen und alle Funktionen, die hieraus durch (mehrfache) Komposition, primitive Rekursion oder Minimierung entstehen
- $\mu$ -rekursive Funktionen können **partiell** sein (nicht überall definiert)
- **$\mathcal{TR}$ : Menge der totalen rekursiven Funktionen**
- $A$  ist total rekursiv, aber nicht primitiv-rekursiv
- **$\mathcal{PR}$ : Menge der primitiv-rekursiven Funktionen**
- Grundfunktionen und alle Funktionen, die hieraus durch (evtl. mehrfache) Komposition oder primitive Rekursion entstehen
- **Primitiv-rekursive Funktionen sind total** (terminieren immer)

# WIE MÄCHTIG SIND REKURSIVE FUNKTIONEN?

- **$\mathcal{PR}$  und  $\mathcal{TR}$  sind echte Unterklassen von  $\mathcal{R}$**

- Offensichtlich gilt

$$\mathcal{PR} \subseteq \mathcal{TR} \subseteq \mathcal{R}$$

- Nicht alle rekursiven Funktionen sind total (z.B.  $f_3 = \mu \text{ add}$ )

$$\mathcal{TR} \neq \mathcal{R}$$

- $A$  ist total rekursiv, aber nicht primitiv-rekursiv

$$\mathcal{PR} \neq \mathcal{TR}$$

# WIE MÄCHTIG SIND REKURSIVE FUNKTIONEN?

- **$\mathcal{PR}$  und  $\mathcal{TR}$  sind echte Unterklassen von  $\mathcal{R}$**

- Offensichtlich gilt

$$\mathcal{PR} \subseteq \mathcal{TR} \subseteq \mathcal{R}$$

- Nicht alle rekursiven Funktionen sind total (z.B.  $f_3 = \mu \text{ add}$ )

$$\mathcal{TR} \neq \mathcal{R}$$

- $A$  ist total rekursiv, aber nicht primitiv-rekursiv

$$\mathcal{PR} \neq \mathcal{TR}$$

- **Rekursive Funktionen sind Turing-berechenbar:  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$**

- Alle Grundfunktionen sind konventionell programmierbar

- Komposition, Primitive Rekursion und  $\mu$ -Operator sind programmierbar

- Alle Computerprogramme sind auf Turing-Maschinen simulierbar

# WIE MÄCHTIG SIND REKURSIVE FUNKTIONEN?

- **$\mathcal{PR}$  und  $\mathcal{TR}$  sind echte Unterklassen von  $\mathcal{R}$**

- Offensichtlich gilt  $\mathcal{PR} \subseteq \mathcal{TR} \subseteq \mathcal{R}$
- Nicht alle rekursiven Funktionen sind total (z.B.  $f_3 = \mu \text{ add}$ )  $\mathcal{TR} \neq \mathcal{R}$
- $A$  ist total rekursiv, aber nicht primitiv-rekursiv  $\mathcal{PR} \neq \mathcal{TR}$

- **Rekursive Funktionen sind Turing-berechenbar:  $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$**

- Alle Grundfunktionen sind konventionell programmierbar
- Komposition, Primitive Rekursion und  $\mu$ -Operator sind programmierbar
- Alle Computerprogramme sind auf Turing-Maschinen simulierbar

- **Turing-berechenbare Funktionen sind rekursiv:  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}$**

- Codiere Konfigurationen (Worttupel) als Zahlentupel
- Simuliere Konfigurationsübergänge  $\vdash$  als primitiv-rekursive Funktionen
- Beschreibe Terminierung von  $\vdash^*$  als Suche nach Endkonfiguration
- Semantik der Turingmaschine ist Iteration von  $\vdash$  bis Terminierung



# KONSEQUENZEN DER ÄQUIVALENZBEWEISE

- **In Berechenbarkeitsbeweisen können Turingmaschinen und  $\mu$ -rekursive Funktionen verwendet werden**

# KONSEQUENZEN DER ÄQUIVALENZBEWEISE

- **In Berechenbarkeitsbeweisen können Turingmaschinen und  $\mu$ -rekursive Funktionen verwendet werden**
- **Kleene Normalform Theorem:**
  - **Für jede berechenbare Funktion  $h$  kann man primitiv-rekursive Funktionen  $f$  und  $g$  konstruieren, so daß  $h(x) = g(x, \mu f(x))$** 
    - Betrachte Simulation der TM für  $h$  als  $\mu$ -rekursive Funktion
    - $f$  ist die Funktion, die Terminierung charakterisiert
    - $\mu f$  berechnet die Anzahl der Schritte bis zur Terminierung
    - $g$  berechnet die Iteration der Konfigurationsübergänge

# KONSEQUENZEN DER ÄQUIVALENZBEWEISE

- **In Berechenbarkeitsbeweisen können Turingmaschinen und  $\mu$ -rekursive Funktionen verwendet werden**
- **Kleene Normalform Theorem:**
  - **Für jede berechenbare Funktion  $h$  kann man primitiv-rekursive Funktionen  $f$  und  $g$  konstruieren, so daß  $h(x) = g(x, \mu f(x))$** 
    - Betrachte Simulation der TM für  $h$  als  $\mu$ -rekursive Funktion
    - $f$  ist die Funktion, die Terminierung charakterisiert
    - $\mu f$  berechnet die Anzahl der Schritte bis zur Terminierung
    - $g$  berechnet die Iteration der Konfigurationsübergänge
- **Berechenbare Funktionen können mit einer einzigen unbegrenzten Schleife auskommen**

# REKURSIVE FUNKTIONEN IM RÜCKBLICK

- **Abstrakte Definition von Berechenbarkeit**
  - Kalkül beschreibt Funktionen ohne direkte Benennung der Argumente
  - Bausteine: Grundfunktionen  $s$ ,  $pr_k^n$ ,  $c_k^n$  und Operatoren  $\circ$ ,  $Pr$ ,  $\mu$
  - Rekursive Funktionen sind Turing-mächtig
- **Primitiv-rekursive Funktionen als wichtige Unterklasse**
  - Abstraktes Programm darf keine Minimierung enthalten
  - Fast alle wichtigen Funktionen sind primitiv-rekursiv
  - Fast alle Programmier Techniken erhalten primitive Rekursivität
  - Es gibt totale berechenbare Funktionen, die nicht primitiv-rekursiv sind
- **Minimierung ist der mächtigste Mechanismus**
  - Oft einfacher und eleganter als Anwendung der primitiven Rekursion
  - Terminierung im Allgemeinfall nicht gesichert
  - Theoretisch braucht jede rekursive Funktion maximal eine Minimierung

Mehr in Lewis & Papadimitriou §4.7, Weihrauch §1.3 und den auf der Webseite genannten Skripten