Entscheidbare Sprachen

Dr. Eva Richter

04.Mai 2012

Grenzen algorithmischen Problemlösens

- Turingmaschinen und λ-Kalkül als Berechenbarkeitsmodelle
- Church-Turing-These berechtigt dazu, Begriff „Algorithmus“ über Turingmaschinen zu definieren
- Welche Grenzen algorithmischen Problemlösen gibt es?
  Von welcher Art und welchem Umfang sind Probleme, die mit Algorithmen lösbar sind?
- für einige Probleme ist offensichtlich, dass und wie man sie lösen kann
- weniger offensichtlich, dass es (durchaus praktische) Probleme gibt, die nicht algorithmisch lösbar sind

Warum interessiert uns das?

1. weiß man, dass ein Problem nicht lösbar ist, muss man es vereinfachen oder abändern (Änderungen müssen unter Umständen gerechtfertigt werden)
2. Beweis für Unlösbarkeit liefert u.U. Hinweise, wie man abschwächen muss.
3. Blick auf die unlösbaren Dinge gibt Anregungen für die Lösung von offenbar lösbaren Problemen
4. Grenzen der maschinellen Berechenbarkeit sind auch aus philosophischer Sicht interessant

Eigenschaften einer Menge M

Turing-akzeptierbar wenn es eine Turingmaschine gibt, die anhält wenn die Eingabe zu M gehört und akzeptiert

entscheidbar wenn es eine Turingmaschine gibt, die bei jeder Eingabe akzeptiert oder zurückweist

aufzählbar wenn es eine Turingmaschine gibt, die alle Elemente von M aufzählt

Wortproblem für endliche Automaten

Satz

$A_{DEA} = \{< B, w >|$
B ist ein endlicher Automat, der w akzeptiert$\}$ *ist entscheidbar.*

$M =$

„Auf Eingabe von $< B, w >$

1. simuliere B auf Eingabe w
2. falls B in einem akzeptierenden Zustand anhält – accept falls B in einem nicht akzeptierenden Zustand hält – reject“

Wortproblem für reguläre Sprachen

Satz

$A_{NEA} = \{< B, w >|\ B \text{ ist NEA, der } w \text{ akzeptiert}\}$ *ist entscheidbar.*

Beweis: Konvertieren des NEA in einen DEA. $\square$

Satz

$A_{REX} = \{< R, w >|\ R \text{ ist regulärer Ausdruck, der } w \text{ generiert}\}$ *ist entscheidbar*

Beweis: Konvertieren von R in einen endlichen Automaten. $\square$

Leerheitsproblem regulärer Sprachen

Satz

$E_{DEA} = \{< A >|\ A \text{ ist ein DEA und } L(A) = \emptyset\}$ *ist entscheidbar.*

Beweis: Ein endlicher Automat akzeptiert eine Zeichenkette, genau dann, wenn es einen Pfad vom Startzustand zu einem akzeptierenden Zustand gibt.

$M =$ „Auf Eingabe $< A >$

1. Markiere den Startzustand von A
2. Wiederhole bis keine neuen Zustände markiert werden: markiere jeden Zustand, der von einem bereits markierten Zustand aus erreichbar ist
3. Falls kein akzeptierender Zustand markiert ist, accept, sonst reject.“

$\square$

Gleichheit von zwei regulären Sprachen

Satz

$EQ_{DEA} = \{< A, B > \mid A$ und B sind DEA und $L(A) = L(B)\}$ ist entscheidbar.

- baue DEA C, der ein Wort genau dann akzeptiert, wenn es von A aber nicht von B oder von B aber nicht von A akzeptiert wird
- Sprache von C ist $L(A) \triangle L(B)$

1. konstruiere C
2. lasse M für E_{DEA} auf C laufen
3. accept wenn M akzeptiert, sonst reject

Wortproblem kontextfreier Sprachen

Satz

$A_{CFG} = \{< G, w >|\ G$ kontextfreie Grammatik, die w erzeugt$\}$ ist entscheidbar

- alle Ableitungen aus G ausprobieren, ob sie zu w führen,funktioniert nicht, falls $w \notin L(G)$
- für Entscheider nur endlich viele Ableitungen ausprobieren
- falls G in Chomskynormalform, braucht man für Wortlänge n genau $2n - 1$ Schritte

Wortproblem kontextfreier Sprachen–Beweis

$S =$

„auf Eingabe $< G, w >$

1. konvertiere G in eine äquivalente Grammatik in CNF
2. zähle alle Ableitungen mit $2n - 1$ Schritten auf, wobei $n = |w|$, außer wenn $n = 0$, dann betrachte alle Ableitungen der Länge 1
3. falls eine der Ableitungen w erzeugt, accept– sonst reject.

Folgerung

$A_{PDA} = \{< A, w >|\ A$ Kellerautomat und w Wort mit $w \in L(A)\}$ ist entscheidbar.

Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen

Satz

$E_{CFG} = \{< G >|\ G$ ist kontextfreie Grammatik und $L(G) = \emptyset\}$ ist entscheidbar.

$R =$ „Auf Eingabe $< G >$, wobei G eine kontextfreie Grammatik ist

1. Markiere alle Terminale von G.
2. Wiederhole bis keine neuen Nichtterminale markiert werden:
3. - Markiere jedes Nichtterminal A, für das G eine Produktion $A \rightarrow U_1 U_2 \ldots U_k$ enthält und $U_1, \ldots, U_k$ bereits markiert sind.
4. wenn das Startsymbol nicht markiert ist, accept; sonst reject.

Gleichheitsproblem für kontextfreie Sprachen

$EQ_{CFG} = \{< G, H >|$
G und H sind kontextfreie Grammatiken und $L(G) = L(H)\}$.

- für analoges Problem für endliche Automaten haben wir Entscheidungsprozedur für E_{DEA} für C mit $L(C) = L(A) \triangle L(B)$ verwendet
- funktioniert aber nicht, da kontextfreie Sprachen unter Durchschnittsbildung oder Mengendifferenz *nicht* abgeschlossen sind

Satz

EQ_{CFG} ist nicht entscheidbar.

Relation der Sprachklassen