Akzeptierbarkeit und ihre Relevanz für meine Arbeit

Teil I: Akzeptierbarkeit

Sebastian Böhne

14.05.2013

Inhaltsverzeichnis

Die Wahrheit: ein Problembegriff

Wissenschaftlichkeit der Mathematik

- Anspruch:

Wissenschaftlichkeit der Mathematik

- Anspruch:
  - Aussagen, die nicht inhaltsleer sind

Wissenschaftlichkeit der Mathematik

- Anspruch:
  - Aussagen, die nicht inhaltsleer sind
  - Übereinstimmung mit den Tatsachen

Wissenschaftlichkeit der Mathematik

- Anspruch:
  - Aussagen, die nicht inhaltsleer sind
  - Übereinstimmung mit den Tatsachen
- Vorschlag zur Lösung: der "strenge" Beweis

"Strenge" Beweise

„The ordinary mathematician bases the idea of truth upon that of rigor; he regards a mathematical proposition as true when he has a rigorous proof of it. But when we examine the nature of this "rigor", we find there is something vague and subjective about it. This is true to such an extent that intelligent persons have maintained that mathematics is not a science at all; that it has no subject matter nor any criterion of truth; and that in the last analysis it is based on purely aestethic considerations. [...] There must be an objective criterion of truth, and the first task of the mathematical logician is to find it." [Curry 1958, S. 3]

Wissenschaftlichkeit der Mathematik

- Anspruch:
  - Aussagen, die nicht inhaltsleer sind
  - Übereinstimmung mit den Tatsachen
- Vorschlag zur Lösung: der "strenge" Beweis
  Aber was ist schon streng?

Wissenschaftlichkeit der Mathematik

- Anspruch:
  - Aussagen, die nicht inhaltsleer sind
  - Übereinstimmung mit den Tatsachen
- Vorschlag zur Lösung: der "strenge" Beweis
  Aber was ist schon streng?
- Ziel ist Objektivität

Wege zur Objektivität

Lösungsversuche:

- Realismus

Maddys Sichtweise

„We are committed to the existence of mathematical objects because they are indispensable to our best theory of the world and we accept that theory." [Maddy 2003, S. 30]

Wege zur Objektivität

Lösungsversuche:

- Realismus
- Idealismus

Urintuition des Idealismus

1. Denkaktivität
2. Apriorischer Charakter
3. Unabhängigkeit von Sprache
4. Objektive Realität oder zumindest transsubjektive Realität

Curry zur objektiven Realität der Urintuition

„Moreover the fourth condition is absolutely vital for intuitionism if it is to give a definition of mathematical truth at all; and the assumption that it is satisfied is an out and out postulate."
[Curry 1958, S. 6]

Wege zur Objektivität

Lösungsversuche:

- Realismus
- Idealismus
- Formalismus

Formale Systeme nach Curry

"Definition" eines formalen Systems

1. Eine Menge von Objekten, genannt Terme. Sie sind bestimmt durch
   - Zeichen
   - Operationen
   - Regeln, mittels derer aus Termen und Operationen neue Terme gewonnen werden können

"Definition" eines formalen Systems

1. Eine Menge von Objekten, genannt Terme. Sie sind bestimmt durch
    - Zeichen
    - Operationen
    - Regeln, mittels derer aus Termen und Operationen neue Terme gewonnen werden können
2. Eine Menge von Aussagen über diese Objekte, d. h. Prädikate, deren Argumente Termeingaben sind

"Definition" eines formalen Systems

1. Eine Menge von Objekten, genannt Terme. Sie sind bestimmt durch
   - Zeichen
   - Operationen
   - Regeln, mittels derer aus Termen und Operationen neue Terme gewonnen werden können
2. Eine Menge von Aussagen über diese Objekte, d. h. Prädikate, deren Argumente Termeingaben sind
3. Eine Teilmenge von beweisbaren Aussagen. Sie sind charakterisiert durch
   - Axiome
   - Ableitungsregeln

Beispiele formaler Systeme

1. Arithmetik

Arithmetik

1. Terme:
    - Das Zeichen ist 0
    - Die Operationen sind die einstellige Nachfolgerfunktion $\cdot'$ sowie die binäre Operation $+$
    - Sind s, t Terme, so auch t' und $s + t$
2. Die Aussagen ergeben sich aus dem einzigen Prädikat "$=$" (in der üblichen Bedeutung)

Arithmetik

3. Seien im folgenden s, t, u beliebige Terme. Dann erhalten wir die beweisbaren Aussagen durch:
   - Axiome:
     - $0 = 0$
     - $s + 0 = s$
     - $s + t' = (s + t)'$
   - Schlussregeln:
     - Wenn $s = t$, dann $t = s$
     - Wenn $s = t$ und wenn $t = u$, dann $s = u$
     - Wenn $s = t$, dann $s' = t'$
     - Wenn $s = t$, dann $s + u = t + u$
     - Wenn $s = t$, dann $u + s = u + t$

Beispiele formaler Systeme

1. Arithmetik
2. Boolesche Algebra

Boolesche Algebra

1. - Variablen $p_1, p_2, \ldots$
   - $\neg$ und $\Rightarrow$ als logische Operatoren
   - Wenn a und b Terme sind, dann sind auch $\neg a$ und $a \Rightarrow b$ Terme
2. Unäres Prädikat $\vdash$
3. - Für Terme a, b, c
     - $\vdash a \Rightarrow b \Rightarrow a$
     - $\vdash (a \Rightarrow b \Rightarrow c) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$
     - $\vdash (\neg a \Rightarrow \neg b) \Rightarrow (b \Rightarrow a)$
   - Wenn $\vdash a$ und $\vdash a \Rightarrow b$, so $\vdash b$

Beispiele formaler Systeme

1. Arithmetik
2. Boolesche Algebra
3. Gödels System P

Beispiele formaler Systeme

1. Arithmetik
2. Boolesche Algebra
3. Gödels System P
4. ZF

Beispiele formaler Systeme

1. Arithmetik
2. Boolesche Algebra
3. Gödels System P
4. ZF
5. Schach
6. ...

Unwesentliche Eigenschaften formaler Systeme

- Konkreter Aufbau formaler Systeme

Unwesentliche Eigenschaften formaler Systeme

- Konkreter Aufbau formaler Systeme
- Eindeutigkeit

Unwesentliche Eigenschaften formaler Systeme

- Konkreter Aufbau formaler Systeme
- Eindeutigkeit
- Ist ein formales System syntaktisch?

Über die Ontologie formaler Systeme

Abstraktion ohne Mystizismus

„But when we think of it [das formale System in der Repräsentation] as formal system we abstract from all properties peculiar to the representation. Human beings can think abstractly about quite concrete things without inventing mystic abstracta to account for the phenomenon." [Curry 1958, S. 31]

Über die Ontologie formaler Systeme

Ontologie formaler Systeme

„It is unnecessary to inquire further into the meaning of a formal system. It is characteristic of mathematics that it considers only certain essential properties of its objects, regarding others as irrelevant. One of these irrelevant questions is that of the ontology of a formal system. The question of which representation is the real or essential one is a metaphysical matter with which mathematics has no concern. Moreover, since one point of view will sometimes suggest ideas, which are closed to another, it is not in the interests of progress to insist on one sort of representation.“ [Curry 1958, S. 31]

'Definition' der Mathematik

Definition

„Mathematics is the science of formal systems.“ [Curry 1958, S. 56]

Aufteilung der Wahrheit

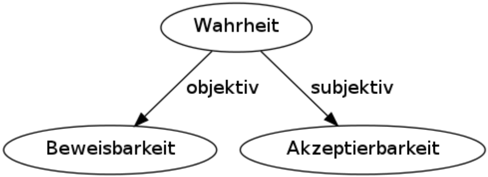

Abbildung: Zergliederung des Wahrheitsbegriffs

Wortwahl von Beweisbarkeit und Akzeptierbarkeit

- Currys Gebrauch

Wortwahl von Beweisbarkeit und Akzeptierbarkeit

- Currys Gebrauch
- Angemessenheit

Wortwahl von Beweisbarkeit und Akzeptierbarkeit

- Currys Gebrauch
- Angemessenheit
- Annehmbarkeit

Wortwahl von Beweisbarkeit und Akzeptierbarkeit

- Currys Gebrauch
- Angemessenheit
- Annehmbarkeit
- Akzeptibilität

Wer akzeptiert was?

- Beweisbarkeit für den klassischen Mathematiker

Wer akzeptiert was?

- Beweisbarkeit für den klassischen Mathematiker
- Physikalische Erkenntnisse für den Intuitionisten

Wer akzeptiert was?

- Beweisbarkeit für den klassischen Mathematiker
- Physikalische Erkenntnisse für den Intuitionisten
- ...oder auch nur der einfachere Weg

Wer akzeptiert was?

- Beweisbarkeit für den klassischen Mathematiker
- Physikalische Erkenntnisse für den Intuitionisten
- ...oder auch nur der einfachere Weg
- Vogelperspektive für die Kategorientheorie

Wer akzeptiert was?

- Beweisbarkeit für den klassischen Mathematiker
- Physikalische Erkenntnisse für den Intuitionisten
- ...oder auch nur der einfachere Weg
- Vogelperspektive für die Kategorientheorie
- Typentheorie zur Beweisfindung oder zur klaren Ordnung

Wer akzeptiert was?

- Beweisbarkeit für den klassischen Mathematiker
- Physikalische Erkenntnisse für den Intuitionisten
- ...oder auch nur der einfachere Weg
- Vogelperspektive für die Kategorientheorie
- Typentheorie zur Beweisfindung oder zur klaren Ordnung
- Absurditätssuche!!
- . . .

Macht der Gewohnheit

- Bildbearbeitung in Word

Macht der Gewohnheit

- Bildbearbeitung in Word
- Imperative Programmierung in Prolog

Macht der Gewohnheit

- Bildbearbeitung in Word
- Imperative Programmierung in Prolog
- ...

$\Rightarrow$ Integration von neuen Inhalten

Hat sich ZF durchgesetzt?

- Denken in Mengen

Hat sich ZF durchgesetzt?

- Denken in Mengen
- Kritische Stellen irrelevant für "Standardmathematik"

Hat sich ZF durchgesetzt?

- Denken in Mengen
- Kritische Stellen irrelevant für "Standardmathematik"
- Präzisierung ohnehin schon vorhandener Arbeitsweise

Hat sich ZF durchgesetzt?

- Denken in Mengen
- Kritische Stellen irrelevant für "Standardmathematik"
- Präzisierung ohnehin schon vorhandener Arbeitsweise
- Keine axiomatische Mengenlehre!

Hat sich ZF durchgesetzt?

- Denken in Mengen
- Kritische Stellen irrelevant für "Standardmathematik"
- Präzisierung ohnehin schon vorhandener Arbeitsweise
- Keine axiomatische Mengenlehre!

Achtung: Verhinderung neuer Gedankengänge!

Ich lüge

- Grundlagensysteme sind irrelevant!

Ich lüge

- Grundlagensysteme sind irrelevant!
- Saubere Argumentation und Rückführbarkeit auf Grundlagensysteme sind unerheblich!

Ich lüge

- Grundlagensysteme sind irrelevant!
- Saubere Argumentation und Rückführbarkeit auf Grundlagensysteme sind unerheblich!
- Mathematik ist mehr als "nur" formale Systeme!

Ich lüge

- Grundlagensysteme sind irrelevant!
- Saubere Argumentation und Rückführbarkeit auf Grundlagensysteme sind unerheblich!
- Mathematik ist mehr als "nur" formale Systeme!
- Ein System reicht!
- Die Arbeit mit formalen Systemen ist starr und einschränkend!

Schlusswort Currys zur Akzeptierbarkeit

„This leads to my final plea – a plea for tolerance in matters of acceptability. Acceptability is not so much a matter of right and wrong as of choice of subject matter. Such a choice should be entirely free; and some difference of opinion is not only allowable, but desirable. We are often interested in systems for which the acceptability is hypothetical – even sometimes in those which, like non-desarguesian, non-archimedean, non-this-or-that geometries, are not acceptable for any known purpose. As mathematicians we should know to what sort of systems our theorems – if formalized – belong, but to exclude systems which fail to satisfy this or that criterion of acceptability is not in the interests of progress.“
[Curry 1958, S. 64]

Literatur

Literatur

Haskell B. Curry.
Outlines of a FORMALIST PHILOSOPHY of MATHEMATICS.
North-Holland, 1958.

Penelope Maddy.
Realism in Mathematics.
Clarendon, 2003.

Sebastian Böhne.
Auf dem Weg zu einer Definition der Mathematik.
Hausarbeit zum Forschungsseminar "Was ist Mathematik?", 2011.