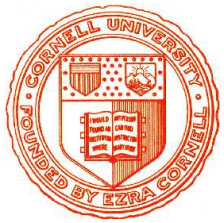
Theoretische Informatik II

Einheit 5.4



Elementare Berechenbarkeitstheorie I:

Grundkonzepte und ihre Eigenschaften

1. Grundgesetze der Berechenbarkeit
2. Berechenbarkeit, Aufzählbarkeit
   und Entscheidbarkeit
3. Abschlußeigenschaften

Elementare Berechenbarkeitstheorie

- **Es gibt viele Fragen zur Berechenbarkeit**
  - Welche Funktionen sind berechenbar und welche nicht?
  - Welche Probleme sind (semi-)entscheidbar und welche nicht?
  - Abschlußeigenschaften: wie kann man Lösungen wiederverwenden?
  - Grenzen des Machbaren: was ist nicht mehr berechenbar?
    Wie kann man nachweisen, daß ein Problem nicht lösbar ist?
- **Antworten hängen nicht vom Berechnungsmodell ab**
  - Berechenbarkeit, (semi-)Entscheidbarkeit, (Zeit-/Platz)Komplexität sind allgemeine Konzepte
- **Löse Theorie von Betrachtung konkreter Modelle**
  - Formuliere Grundeigenschaften (Axiome) berechenbarer Funktionen
  - Beweise diese Eigenschaften mit einem Modell (Turingmaschine)
  - Stütze alle Beweise für Aussagen nur noch auf diese Eigenschaften
    denn sie gelten für alle gleichmächtigen Berechnungsmodelle

Formuliere Theorie berechenbarer Funktionen

- **Es reicht berechenbare Funktionen zu betrachten**
  - (Semi-)Entscheidbarkeit einer Menge ist äquivalent zur Berechenbarkeit ihrer (partiell-)charakteristischen Funktion
- **Es reicht Berechenbarkeit auf Zahlen zu betrachten**
  - Berechenbarkeitskonzepte auf Wörtern und Zahlen sind gleichwertig
    - Zahlen kann man als Wörter (binär oder anders) codieren
    - Wörter über einem Alphabet kann man systematisch numerieren
  - Es ist meist leichter, mit Zahlen zu arbeiten (z.B. Rechenzeit)
  - Programme und Daten sind als Zahlen codierbar
- **Es reicht einstellige Funktionen auf $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ zu betrachten**
  - Funktionen auf Zahlenpaaren und -listen sind einstellig simulierbar

    z.B. ist $f{:}\mathbb{N}\times\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ durch $f'{:}\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ mit $f'\langle i,j\rangle := f(i,j)$ simulierbar

Liefert allgemeine Theorie der Berechenbarkeit

Berechenbare Funktionen lassen sich aufzählen

- **Turingmaschinen sind als Wörter codierbar**
  - Es reicht, Turingmaschinen mit $\Gamma{=}\{0,1,B\}$ und $F{=}\{q_1\}$ zu betrachten
  - Definiere $code(\delta(q,X)) \equiv q\,X\,p\,Y\,D$, falls $\delta(q,X){=}(p,Y,D)$ (ϵ sonst)
  - Codiere die Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ durch das Wort

    $code(\delta(q_0,0))\ code(\delta(q_0,1))\ code(\delta(q_0,B))\ \ldots\ code(\delta(q_n,B))$
  - Codiere Alphabet $\{q_0, .., q_n, 0, 1, B, L, R\}$ als Wörter über $\Delta = \{0,1\}$
- **Wörter über einem Alphabet sind numerierbar**
  - Bestimme lexikographische Ordnung der Wörter über $\Delta = \{x_1, .., x_n\}$

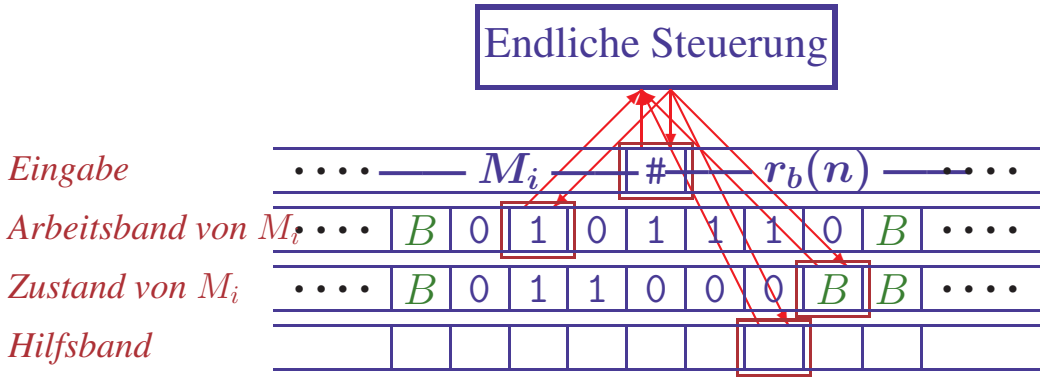
    $\epsilon < x_1 < \ldots < x_n < x_1x_1 < x_1x_2 < \ldots < x_nx_n < x_1x_1x_1 < \ldots$
  - Zähle entsprechend durch: $w_0{:=}\epsilon$, $w_1{:=}x_1$, .. $w_n{:=}x_n$, $w_{n+1}{:=}x_1x_1$, ...
- **Turingmaschinen sind (bijektiv) numerierbar**
  - Zähle Wörter über Δ auf und teste, ob sie Turingmaschinen codieren
  - M_i ist die Turingmaschine, deren Codierung an i-ter Stelle erscheint
  - Die Nummer i wird auch die **Gödelnummer** von M_i genannt

Numerierung von TM liefert zwei Kernaxiome

- **Definiere Numerierung berechenbarer Funktionen:**
  - φ_i ist die von M_i berechnete (partielle) Funktion auf $\mathbb{N}$
    - $\varphi(i) := \varphi_i := r_b^{-1} \circ f_{M_i} \circ r_b$, wobei $r_b : \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$ Binärcodierung von $\mathbb{N}$
  - Φ_i ist die zugehörige Schrittzahlfunktion von M_i
    - $\Phi(i)(n) := \Phi_i(n) := t_{M_i}(r_b(n))$
- **$\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{R}$ is surjektiv, aber nicht bijektiv**
  - Jede programmierbare Funktion hat einen Index
  - Jede berechenbare Funktion hat unendlich viele Programme
- Axiom 1: **Für alle i gilt $\mathrm{domain}(\Phi_i) = \mathrm{domain}(\varphi_i)$**
  - Per Konstruktion ist Φ_i auf den gleichen Eingaben definiert wie φ_i
- Axiom 2: **$\{\langle i, n, t\rangle \mid \Phi_i(n) = t\}$ ist entscheidbar**
  - Simuliere Ausführung von $\varphi_i(n)$ für maximal t Schritte
  - Implementierung benutzt Variante der universellen Maschine (s.u.)

Axiom 3: Die universelle Funktion ist berechenbar

$u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $u\langle i, n\rangle = \varphi_i(n)$ ist berechenbar (UTM Theorem)



- **Benutze 3 Arbeitsbänder + Hilfsbänder**
  - Programmnummer i und Eingabewert n, binär codiert
  - Arbeitsband von M_i
  - Aktueller Zustand von M_i (auf Band, da Anzahl der Zustände nicht limitiert)
- **Generiere und simuliere Programm von M_i**
  - Generiere das Wort, das M_i über Δ codiert; schreibe es auf Band 1
  - Kopiere $r_b(n)$ auf Band 2 und schreibe q_0 auf Band 3
  - Simuliere Einzelschritte von M_i durch Aufsuchen der Befehle auf Band 1
  - Terminiert M_i (Zustand q_1), kopiere die Ausgabe von Band 2 auf Band 1

Axiom 4: Programme sind effektiv kombinierbar

Es gibt eine berechenbare totale Funktion $s{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit

$\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i\rangle$ für alle $m, n, i \in \mathbb{N}$ (SMN Theorem)

Technisches Lemma ohne gute Intuition

- **Konstruiere eine Turingmaschine M für s:**
  - Auf dem Eingabeband stehe die Codierung einer Zahl $\langle m, n\rangle$
  - Konstruiere auf Hilfsband 1 die Codierung der m-ten Turingmaschine M_m
  - Konstruiere auf Hilfsband 2 die Codierung einer Maschine $M_{\langle\rangle}$, welche bei Eingabe einer Zahl i den Wert $f_{M_{\langle\rangle}}(i) = \langle n, i\rangle$ berechnet.
  - Konstruiere auf Hilfsband 3 den Code einer Maschine, die bei Eingabe einer Zahl i zunächst $M_{\langle\rangle}$ simuliert und M_m auf das Ergebnis anwendet.
  - Berechne die Gödelnummer der so aus $\langle m, n\rangle$ konstruierten Maschine
- **Setze $s := f_M$**
  - Per Konstruktion ist die Funktion s berechenbar
  - s ist total, weil M für jede Eingabe $\langle m, n\rangle$ ein Ergebnis produziert
  - Es gilt $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = f_{M_m}(f_{M_{\langle\rangle}}(i)) = \varphi_m\langle n, i\rangle$

Alle Erkenntnisse der Berechenbarkeitstheorie folgen aus nur vier Axiomen

Es gibt Funktionen φ:$\mathbb{N}\to\mathcal{R}$ und Φ:$\mathbb{N}\to\mathcal{R}$ mit

1. φ_i und Φ_i haben immer denselben Definitionsbereich

Intuition: $\varphi_i \hat{=} \varphi(i)$ ist die vom i-ten Programm berechnete Funktion

$\Phi_i \hat{=} \Phi(i)$ ist die zu φ_i gehörende Rechenzeitfunktion

2. Rechenzeit ist entscheidbar

– Man kann für beliebige $i, n, t \in \mathbb{N}$ testen ob $\Phi_i(n) = t$ ist oder nicht

3. Computer sind universelle Maschinen (UTM Theorem)

– Eine Maschine kann alle Programme und Daten verarbeiten

– Die Funktion u :$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $u\langle i, n\rangle = \varphi_i(n)$ ist berechenbar

4. Programme sind effektiv kombinierbar (SMN Theorem)

– Die Nummer des entstehenden Programms kann berechnet werden

– Es gibt eine berechenbare totale Funktion s mit $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i\rangle$

Berechenbare Funktionen sind “effektiv numerierbar”

Zentrale Berechenbarkeitskonzepte neu erklärt

- **Berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$** ("$f$ ist **(partiell) rekursiv**")
  - Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ (Es gibt ein Programm zur Berechnung von f)
  - f heißt **total rekursiv**, wenn f berechenbar und total ist
- **Entscheidbare Menge M** ("M ist **rekursiv**")

  Es gibt ein Programm, das testet, ob ein Element zu M gehört oder nicht
  - Die charakteristische Funktion χ_M ist berechenbar

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in M, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

- **Semi-entscheidbare Menge M**

  Es gibt ein Programm, das testet, ob ein Element zu M gehört, aber nicht immer anhält
  - Die partielle charakteristische Funktion ψ_M ist berechenbar

$$\psi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Neu: (rekursiv) aufzählbare Menge M**

  Es gibt ein Programm, das schrittweise alle Elemente von M generiert
  - $M = \emptyset$ oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion f mit $M = \text{range}(f)$

$$\text{range}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \mathbb{N}\ f(i) = n\}$$

Anmerkungen zur Aufzählbarkeit

- **Nicht identisch mit Abzählbarkeit**
  - M abzählbar, wenn es eine surjektive Funktion f von $\mathbb{N}$ nach M gibt
  - M aufzählbar, wenn M Bild einer berechenbaren Funktion ist
- **Aufzählungen müssen nicht injektiv sein**
  - Die Funktion g mit $g(n) = \begin{cases} n{+}1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$

    zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf
- **Jede Menge hat verschiedene Aufzählungen**
  - $h = \lambda n.2n{+}1$ zählt alle ungeraden Zahlen genau einmal auf
- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**
  - $M = \{x_0, .., x_n\}$ ist Bild von f mit $f(i) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i{\leq}n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - f ist primitiv rekursiv, also berechenbar

Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen für rekursiv aufzählbare Mengen

Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. **M ist aufzählbar**
2. **$M =$ range(f) für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$**
   - **range(f)**= $\{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, f nicht notwendigerweise total
3. **M ist semi-entscheidbar**
4. **$M =$ domain(f) für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$**
   - **domain(f)**= $\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$

Analog für Mengen über Worten, Zahlentupeln, ...

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss

- **M aufzählbar $\Rightarrow$ M=range(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M aufzählbar
  - Falls $M=\emptyset$ dann ist M = range($f_\perp$), wobei $f_\perp(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ✓
  - Andernfalls M = range(f) für ein berechenbares, totales f ✓
- **M=range(f) für ein berechenbares f $\Rightarrow$ M semi-entscheidbar**
  - Es sei M=range(f) für ein berechenbares, möglicherweise partielles f
  - Dann ist $m \in M$ genau dann, wenn $m=f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$
  - Für $i \in \mathbb{N}$ mit $f=\varphi_i$ ist $\psi_M(m)$ = sign (min$\{\langle n,t\rangle \mid \Phi_i(n)=t \wedge \varphi_i(n)=m\}$)

    Standardtrick: simultanes Durchzählen von Eingabewerten und Rechenzeitschranken
  - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist ψ_M berechenbar ✓
- **M semi-entscheidbar $\Rightarrow$ M=domain(f) für ein berechenbares f**
  - Es sei M semi-entscheidbar.
  - Dann ist ψ_M berechenbar und $M=\{i \in \mathbb{N} \mid \psi_M(i) = 1\}$ = domain(ψ_M) ✓

Beweis der Äquivalenz durch Ringschluss (II)

- **M=domain(f) für ein berechenbares $f \Rightarrow M$ aufzählbar**
  - Es sei M = domain(f) = $\{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f
  - Falls $M=\emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar ✓
  - Andernfalls gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f=\varphi_i$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$
  - Wir konstruieren eine berechenbare totale Funktion g mit M=range(g)

    Es sei $g\langle n,t\rangle = \begin{cases} n & \text{falls } \Phi_i(n)=t, \\ n_0 & \text{sonst} \end{cases}$

    Standardtrick: Zerlegen der Eingabe mit Umkehrfunktionen der Standardtupelfunktion
  - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist g total und berechenbar
  - M=range(g): Es gilt $n \in M$=domain(φ_i)

    $\Leftrightarrow$ es gibt eine Rechenzeit t mit $\Phi_i(n)=t$

    $\Leftrightarrow$ es gibt ein t mit $g\langle n,t\rangle = n$

    $\Leftrightarrow$ $n \in$ range(g) ✓

Wichtige entscheidbare und aufzählbare Mengen

- **Sei $f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar**
  - **range(f) ist aufzählbar** Charakterisierung #2
  - **domain(f) ist aufzählbar** Charakterisierung #4
  - **graph(f) ist aufzählbar (entscheidbar, wenn f total ist)**
    Bei Eingabe $\langle i,j\rangle$ teste $f(i){=}j$ (hält immer, wenn f total)
- **$\{\langle i,n,t\rangle \mid \Phi_i(n){=}t\}$ ist entscheidbar** Axiom 2
- **$\{\langle i,n,y\rangle \mid \varphi_i(n){=}y\}$ ist aufzählbar**
  - Graph der universellen Funktion
- **$H = \{\langle i,n\rangle \mid n \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist aufzählbar**
  - Definitionsbereich der universellen Funktion (Halteproblem)
- **$S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist aufzählbar**
  - Definitionsbereich von $\lambda i.u\langle i,i\rangle$ (Selbstanwendbarkeitsproblem)

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit

M entscheidbar $\Leftrightarrow$ M und $\overline{M}$ aufzählbar

$\Rightarrow$ Es sei M entscheidbar. Dann ist χ_M:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ berechenbar

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und $\overline{M}$ aufzählbar ✓

$\Leftarrow$ Seien M und $\overline{M}$ aufzählbar

Falls $M=\emptyset$ oder $\overline{M}=\emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar ✓

Andernfalls M=range(f) und $\overline{M}$=range(g) wobei f, g total berechenbar

Definiere h:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \min\{i \mid f(i)=n \vee g(i)=n\}$

Dann ist h berechenbar und total, da $n \in M$ oder $n \in \overline{M}$ für jedes n gilt.

Damit ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(h(n)) = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar ✓

Aufzählbarkeit vs. Entscheidbarkeit II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
  - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt in §5.5)
- **Jede endliche Menge ist entscheidbar (und aufzählbar)**
  - Für $M = \{x_1, .., x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n{=}x_1 \vee \ldots \vee n{=}x_n \,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  - χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar ✓
- **M ist aufzählbar g.d.w. es eine entscheidbare Menge M' gibt mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\, \langle n, y\rangle \in M'\}$** (Projektionssatz)

  $\Rightarrow$: Falls $M{=}\emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\, \langle n, y\rangle \in \emptyset\}$ ✓
  - Andernfalls ist $M{=}\text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f und $\text{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\, \langle n, y\rangle \in \text{graph}(f)\}$ ✓

  $\Leftarrow$: Es sei $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\, \langle n, y\rangle \in M'\}$ für ein entscheidbares M'
  - Dann ist $\psi_M(y) = \text{sign}\,(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \langle n, y\rangle \in M'\}{+}1)$
    $= \text{sign}\,(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \chi_{M'}\langle n, y\rangle{=}1\}{+}1)$ berechenbar ✓

Abschlusseigenschaften aufzählbarer Mengen

Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- $M \cup M'$: **Vereinigung**
  - Seien M=range(h) und M'=range(h') aufzählbar
  - Definiere g durch $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
  - Dann ist g berechenbar und range(g) = $M \cup M'$ aufzählbar
- $M \cap M'$: **Durchschnitt**
  - Es ist $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$. Also ist $\psi_{M \cap M'}$ berechenbar

    In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn n $\in M \cap M'$
- $f(M)$: **Bild einer berechenbaren Funktion**
  - Definiere g durch $g(n) = f(h(n))$
  - Dann ist g berechenbar und range(g) = $f(M)$ aufzählbar
- $f^{-1}(M)$: **Urbild einer berechenbaren Funktion**
  - Es ist $\psi_{f^{-1}(M)}(n) = \psi_M(f(n))$. Also ist $\psi_{f^{-1}(M)}$ berechenbar.

Kein Abschluß unter Komplement oder Differenz

Abschlusseigenschaften entscheidbarer Mengen

Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter

- $M \cup M'$: **Vereinigung**
  - Beweisidee: $\chi_{M \cup M'}(n) = \text{sign}(\chi_M(n) + \chi_{M'}(n))$.
- $M \cap M'$: **Durchschnitt**
  - Beweisidee: $\chi_{M \cap M'}(n) = \chi_M(n) * \chi_{M'}(n)$.
- $\overline{M}$: **Komplement**
  - Beweisidee: $\chi_{\overline{M}}(n) = 1 - \chi_M(n)$.
- M-M': **Differenz**
  - Beweisidee: $M\text{-}M' = M \cap \overline{M'}$
- $f^{-1}(M)$: **Urbild einer berechenbaren totalen Funktion**
  - Beweisidee: $\chi_{f^{-1}(M)}(n) = \chi_M(f(n))$.

Kein Abschluß unter Bild berechenbarer Funktionen

Rückblick elementare Berechenbarkeitstheorie

- **Es gibt 3 Grundkonzepte der Berechenbarkeit**
  - – Berechenbare Funktionen, entscheidbare und aufzählbare Mengen
  - – Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen

  Alle Konzepte sind beschreibbar durch berechenbare Funktionen auf $\mathbb{N}$
  - – Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, f, f^{-1}
  - – Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter $\cup$, $\cap$, , -, f^{-1}
- **Alle Theorie stützt sich auf nur vier Gesetze**
  1. Numerierbarkeit von berechenbaren Funktionen und Rechenzeiten
  2. Entscheidbarkeit der Rechenzeit
  3. Berechenbarkeit der universellen Funktion
  4. Effektive Kombinierbarkeit berechenbarer Funktionen

  Jedes Berechenbarkeitsmodell erfüllt diese Axiome

Mehr Details in Vossen & Witt §9 und den dort angegebenen Referenzen