Theoretische Informatik II

Einheit 5.5

Elementare Berechenbarkeitstheorie II:

Unlösbare Probleme

1. Beweistechniken für Unlösbarkeit
2. Wichtige unlösbare Probleme
3. Der Satz von Rice
4. Unentscheidbare Probleme für kontextfreie Grammatiken

Gibt es Probleme, die prinzipiell unlösbar sind?

- **Was bedeutet Unlösbarkeit?**
  - Funktionen, die von keinem Computer je berechnet werden können
  - Mengen ($\equiv$ Sprachen $\equiv$ Probleme), die unentscheidbar sind
  - Mengen, die nicht einmal aufzählbar ($\equiv$ semi-entscheidbar) sind

  Also prinzipielle Grenzen für die Fähigkeiten von Computern
  unabhängig davon, welche Fortschritte die Informatik je erzielen wird

- **Warum muß es unlösbare Probleme geben?**

  Kardinalitätsargument: Es gibt mehr Funktionen als Programme
  - Die Menge der (totalen) Funktionen auf $\mathbb{N}$ ist nicht abzählbar (Beweis folgt)
  - Die Menge der Sprachen über Σ^* ist nicht abzählbar
  - Programme sind durch Textketten beschreibbar – also abzählbar

$$\Downarrow$$

Nicht jede Funktion kann berechenbar sein

Cantors Beweis für Überabzählbarkeit von $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$

Die Menge $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ ist ‘überabzählbar’ unendlich

Es ist nicht möglich, alle totalen Funktionen über $\mathbb{N}$ durchzuzählen

Beweis: Wir nehmen an $\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ sei abzählbar

– Dann kann man alle Funktionen über $\mathbb{N}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
f_0	$\boldsymbol{f_0(0)+1}$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$f_0(4)$	...
f_1	$f_1(0)$	$\boldsymbol{f_1(1)+1}$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$f_1(4)$	...
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$\boldsymbol{f_2(2)+1}$	$f_2(3)$	$f_2(4)$	...
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$\boldsymbol{f_3(3)+1}$	$f_3(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion f:$\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ durch $f(x) = f_x(x)+1$

– f ist offensichtlich total, kann aber in der Tabelle nicht vorkommen

– Ansonsten wäre f=f_i für ein i und $f_i(i) = f(i) = f_i(i)+1$ $\checkmark$

Wie beweist man Unlösbarkeit konkret?

- **Ein Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_0$ kann es nicht geben**
  - Jede endlich beschreibbare syntaktische Struktur ist entscheidbar
  - Unlösbare Probleme müssen komplizierte syntaktische Struktur haben
- **Beginne mit konstruierten Gegenbeispielen**
  - Selbstanwendbarkeit: Hält ein Programm auf der eigenen Gödelnummer?

    Direkter Beweis: Unlösbarkeit ist in Fragestellung "hineincodiert"
- **Führe Unlösbarkeit echter Probleme hierauf zurück**
  - Halteproblem: Terminiert ein Programm bei einer beliebigen Eingabe?

    Argument: Man kann dies nicht einmal für eine konkrete Eingabe testen
  - Korrektheitsproblem: Erfüllt ein Programm eine gegebene Spezifikation?
  - Äquivalenzproblem: Berechnen zwei Programme die gleiche Funktion?

    Argument jeweils: Man kann ja nicht einmal die Terminierung überprüfen

Selbstanwendbarkeit ist unentscheidbar

$S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$

- **$\overline{S} = \{i \mid i \notin \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Annahme: $\overline{S}$ ist aufzählbar
  - Dann ist $\overline{S}$ = domain(f) für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - Dann gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_j$ und es folgt

    $$j \in \overline{S} \;\Leftrightarrow\; j \notin \mathrm{domain}(\varphi_j) \;\Leftrightarrow\; j \notin \mathrm{domain}(f) \;\Leftrightarrow\; j \notin \overline{S}$$

  - Dies ist ein Widerspruch. Also kann $\overline{S}$ nicht aufzählbar sein $\surd$

    Kurzer Beweis, da Diagonalisierung bereits in Definition von $\overline{S}$ enthalten

  - $\overline{S}$ wird zuweilen auch **Diagonalisierungssprache L_d** genannt

- **$S = \{i \mid i \in \mathbf{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht entscheidbar**
  - Wenn S entscheidbar wäre, müsste $\overline{S}$ aufzählbar sein $\surd$

Das Halteproblem ist unentscheidbar

Programme können beliebig kompliziert sein und versteckte Endlosschleifen enthalten.

Annahme: $H = \{\langle i,n\rangle \mid n \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ ist entscheidbar

Dann ist $\chi_H{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $\chi_H\langle i,n\rangle = \begin{cases} 1 & n \in \mathrm{domain}(\varphi_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar

Definiere eine neue Funktion $f{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch

$$f(i) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \notin \mathrm{domain}(\varphi_i) \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

$\varphi_i(n)$	0	1	2	3	4	...
φ_0	$\perp$	$\times$	$\times$	$\perp$	$\times$	...
φ_1	$\perp$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	...
φ_3	$\perp$	$\times$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

Dann ist f berechenbar, da $f(i) = \mu_z[\chi_H\langle i,i\rangle = 0]$

Also gibt es ein j mit $f = \varphi_j$

Aber für j gilt: $j \in \mathrm{domain}(\varphi_j) \Leftrightarrow j \in \mathrm{domain}(f) \Leftrightarrow j \notin \mathrm{domain}(\varphi_j)$

Dies ist ein Widerspruch, also kann H nicht entscheidbar sein $\surd$

Terminierung von Programmen ist nicht testbar

Diagonalisierung – was ist die Methode?

- **Ziel: Konstruktion eines Gegenbeispiels**
  - Zeige, daß eine unendliche Menge M eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit, Abzählbarkeit
- **Methodik**
  - Wir nehmen an, M habe die Eigenschaft P
  - Konstruiere ein x, das von allen Elementen in M verschieden ist
  - Zeige, daß andererseits $x \in M$ aufgrund der Annahme gelten muß
  - Aus dem Widerspruch folgt, daß die Annahme nicht gelten kann
- **Konstruktion: Cantorsches Diagonalverfahren**
  - Trage alle Elemente von M als Zeilen einer Tabelle auf
  - Konstruiere x als Diagonale mit Abweichung an jedem Punkt
  - Also kann x nicht als Zeile vorkommen

Mächtige, aber komplizierte Beweistechnik

Total rekursive Funktionen sind nicht aufzählbar

Annahme: $TR = \{i \mid \varphi_i$ total$\}$ ist aufzählbar

– Da $TR \neq \emptyset$ ist, gibt es eine total rekursive Funktion f mit range(f) = TR

– Somit kann man alle Funktionen aus $\mathcal{TR}$ in eine Tabelle eintragen

	0	1	2	3	4	...
$\varphi_{f(0)}$	$\varphi_{f(0)}(0)+1$	$\varphi_{f(0)}(1)$	$\varphi_{f(0)}(2)$	$\varphi_{f(0)}(3)$	$\varphi_{f(0)}(4)$	...
$\varphi_{f(1)}$	$\varphi_{f(1)}(0)$	$\varphi_{f(1)}(1)+1$	$\varphi_{f(1)}(2)$	$\varphi_{f(1)}(3)$	$\varphi_{f(1)}(4)$	...
$\varphi_{f(2)}$	$\varphi_{f(2)}(0)$	$\varphi_{f(2)}(1)$	$\varphi_{f(2)}(2)+1$	$\varphi_{f(2)}(3)$	$\varphi_{f(2)}(4)$	...
$\varphi_{f(3)}$	$\varphi_{f(3)}(0)$	$\varphi_{f(3)}(1)$	$\varphi_{f(3)}(2)$	$\varphi_{f(3)}(3)+1$	$\varphi_{f(3)}(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...

– Definiere eine neue Funktion $h{:}\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ durch $h(n) = \varphi_{f(n)}(n)+1$

– h ist offensichtlich total und berechenbar, denn $h(n) = u\langle f(n), n\rangle+1$

– Also gibt es ein $i \in TR$ mit $h = \varphi_i$ und damit ein $j \in \mathbb{N}$ mit $i{=}f(j)$

– Für dieses j gilt: $\varphi_{f(j)}(j) = h(j) = \varphi_{f(j)}(j)+1$

– Dies ist ein Widerspruch, also kann TR nicht aufzählbar sein $\checkmark$

WACHSTUMS- UND MONOTONIEARGUMENTE

- **Ziel**
  - Zeige, daß eine Funktion f eine Eigenschaft P nicht besitzt
  - z.B. primitiv rekursiv, berechenbar, maximale Komplexität
- **Wachstumsargument**
  - Zeige, daß f stärker wächst als jede Funktion mit Eigenschaft P
    - · Induktive Analyse des Wachstumsverhaltens von f
    - · Analysiere maximales Wachstum von Funktionen mit Eigenschaft P
  - f kann also die Eigenschaft P nicht selbst besitzen

  Beispiele: Die Ackermann Funktion ist nicht primitiv-rekursiv
  Analyse der Komplexität aufwendiger Funktionen
- **Monotonieargument**
  - Zeige, daß f (streng) monoton ist
  - Zeige, daß P zur Verletzung der Monotonie von f führen würde

  Beispiel: Die Busy-Beaver Funktion ist nicht berechenbar (Beweis folgt)

Das Busy Beaver Problem

Biber stauen Bäche, indem sie Holzstücke in den Bach tragen. Fleißige Biber tragen mehr Holzstücke zusammen als faule. Größere Biber können mehr leisten als kleine.

Die Busy Beaver Funktion bestimmt die Länge der längsten ununterbrochenen Staumauer, die ein Biber ohne eine bereits vorhandene Teilmauer zusammentragen kann.

- **Beschreibe Biber durch Turingmaschinen**
  - Holzstücke werden durch das Symbol 1 (im Englischen $|$) beschrieben
  - $M = (\{1..n\}, \{1\}, \{1, B\}, \delta, 1, B, \emptyset)$ heißt Busy-Beaver TM der Größe n
  - **BBT(n)** sei die Menge aller Busy-Beaver Turingmaschinen der Größe n
- **Beschreibe Produktivität von Bibern**
  - **Produktivität(M)** $= \begin{cases} n & \text{wenn } f_M(\epsilon) = 1^n \\ 0 & \text{wenn } M \text{ bei Eingabe } \epsilon \text{ nicht hält} \end{cases}$
- **Beschreibe maximal mögliche Leistung von Bibern**
  - **BB(n)** $= \max\ \{\text{Produktivität}(M) \mid M \in \text{BBT}(n)\}$

Ist die Busy-Beaver Funktion berechenbar?

Busy Beaver Problem: Intuitive Analyse

- **Beispiel einer BBT(2) Maschine**

δ	1	B
$\rightarrow$ 1	(2,1,L)	(2,1,R)
2	—	(1,1,L)

Arbeitsweise: $(\epsilon,1,B) \vdash (1,2,B)$
$\vdash (\epsilon,1,11) \vdash (\epsilon,2,B11)$
$\vdash (\epsilon,1,B111) \vdash (1,2,111)$ stop

  – Produktivität ist 3 (4, wenn man alle Holzstücke zählt)

- **BB(n) bekannt für kleine n:** (alle Holzstücke auf dem Band gezählt)

n	1	2	3	4	5	6	...
	1	4	6	13	≥4098	≥3.514*10^{18276}	

http://www.drb.insel.de/~heiner/BB

- **Vollständige Analyse nicht möglich**
  – $|\text{BBT}(n)|$ ist etwa $(|Q|*|\Gamma|*|\{R,L\}|)^{(|Q|*|\Gamma|)} = (4n)^{2n}$
  |BBT(1)|=16, |BBT(2)|=4096, |BBT(3)|=2985984, ...
  – Anzahl möglicher Bandkonfigurationen einer TM ist unbegrenzt

DAS BUSY BEAVER PROBLEM IST UNLÖSBAR

- **BB ist streng monoton:** $\boldsymbol{i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)}$
  - Für alle n gilt $\mathrm{BB}(n+1)>\mathrm{BB}(n)$
    - · Beginne mit BB(n)-Maschine; wechsele am Ende in Zustand n+1
    - · Laufe an das rechte Ende bis zum ersten Blank und schreibe eine 1
  - $i>j \Leftrightarrow \mathrm{BB}(i)>\mathrm{BB}(j)$ folgt nun durch Induktion über $i-j$
- **Für alle n gilt:** $\boldsymbol{\mathrm{BB}(n+5)\geq 2n}$
  - Mit n Zuständen kann man n Einsen generieren
  - Mit 5 Zuständen kann man Einsen verdoppeln (vgl M_4 aus §5.1)
- **BB berechenbar** $\boldsymbol{\Rightarrow \exists \mathrm{k} \in \mathbb{N}.\ \mathrm{BB}(n+2k)\geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n))}$
  - Sei k = Zahl der Zustände der TM über Γ=$\{1, B\}$, die BB berechnet
  - Mit n Zuständen generiere n Einsen
  - Mit $2k$ Zuständen berechne erst BB(n), dann hieraus BB(BB(n))
- **BB kann nicht berechenbar sein**
  - Sonst $\mathrm{BB}(n+5+2k) \geq \mathrm{BB}(\mathrm{BB}(n+5)) \geq \mathrm{BB}(2n)$ für ein k und alle n
  - Für n=$2k$+6 widerspricht $\mathrm{BB}(4k+11) \geq \mathrm{BB}(4k+12)$ der Monotonie $\checkmark$

Beweisführung durch funktionale Reduktion

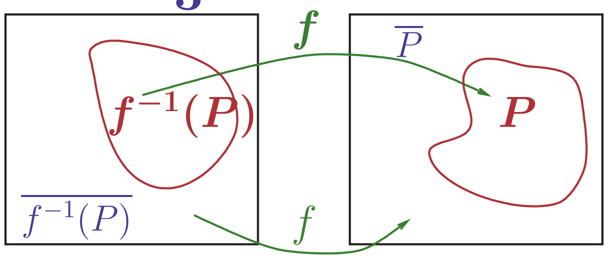
- **Das Halteproblem braucht keinen Diagonalbeweis**
  Die Unentscheidbarkeit von $\boldsymbol{H} = \{\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}\rangle \mid \boldsymbol{n} \in \mathbf{domain}(\boldsymbol{\varphi_i})\}$ läßt sich auf die Unentscheidbarkeit von $S = \{i \mid i \in \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ zurückführen:
  – Annahme: H ist entscheidbar, d.h. χ_H ist berechenbar
  – Wir zeigen, daß die charakteristische Funktion von S berechenbar ist
  · Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $i \in S \Leftrightarrow \langle i, i\rangle \in H$
  · Also ist $\chi_S(i) = \chi_H\langle i, i\rangle$ und damit muß χ_S berechenbar sein
  – Da S aber unentscheidbar ist, ergibt sich ein Widerspruch $\checkmark$

- **Beweis "reduziert" *S* auf *H***
  – Eine Funktion f transformiert Eingaben für S in Eingaben für H
  – Die Transformation f ist berechenbar und es gilt $x \in S \;\Leftrightarrow\; f(x) \in H$
  – Damit transformiert f jede Lösung für H in eine für S

- **Formaler Begriff: $\boldsymbol{P' \leq P}$** ("**P' ist reduzierbar auf P**")
  – $\boldsymbol{P' \leq P}$, falls $P' = f^{-1}(P) = \{x \mid f(x) \in P\}$ für ein total berechenbares f
  Achtung: umgangsssprachlich wird zuweilen die Problemstellung P auf P' "reduziert"

Funktionale Reduzierbarkeit $P' \leq P$

- **Ähnlich zu inversen Homomorphismen in $\mathcal{L}_3$**



  – Es gilt $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$

  – Aber: keine syntaktische Restriktion an f

  f muß nur berechenbar und total sein

- **$P' \leq P$ bedeutet "P' ist nicht schwerer als P"**

  – Ist P lösbar, dann kann P' wie folgt gelöst werden

  · Bei Eingabe x bestimme $f(x)$ (f ist die Reduktionsfunktion)

  · Löse $f(x)$ mit der Lösungsmethode für P

  · Wegen $x \in P' \Leftrightarrow f(x) \in P$ überträgt sich das Ergebnis

- **Konsequenzen von Reduzierbarkeit $P' \leq P$**

  – Aus P entscheidbar folgt P' entscheidbar: $\chi_{P'}(x) = \chi_{f^{-1}(P)}(x) = \chi_P(f(x))$

  – **Aus P' unentscheidbar folgt P unentscheidbar**

  – Aus P aufzählbar folgt P' aufzählbar: $\psi_{P'}(x) = \psi_{f^{-1}(P)}(x) = \psi_P(f(x))$

  – **Aus P' nicht aufzählbar folgt P nicht aufzählbar**

Beispiele von Problemreduktion

- $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\} \;\leq\; H = \{\langle i,n\rangle \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$
  – Es gilt $i \in S \Leftrightarrow \langle i,i\rangle \in H$.
  – Wähle $f(i) := \langle i,i\rangle$. Dann ist f total-berechenbar und $S = f^{-1}(H)$

- $\overline{H} = \{\langle i,n\rangle \mid n \notin \text{domain}(\varphi_i)\} \;\leq\; PROG_z = \{i \mid \varphi_i = z\}$
  $(z = c_0^1)$
  – Es gilt $\langle i,n\rangle \in \overline{H} \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\, \Phi_i(n) \neq t$.
  – Da $\Phi = \{\langle i,n,t\rangle \mid \Phi_i(n) = t\}$ entscheidbar ist, ist χ_Φ mit
  $$\chi_\Phi\langle i,n,t\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } \Phi_i(n)=t \\ 0 & \text{falls } \Phi_i(n)\neq t \end{cases} \quad \text{berechenbar}$$
  – Nach dem SMN Theorem gibt es eine total-berechenbare Funktion f mit $\varphi_{f\langle i,n\rangle}(t) = \chi_\Phi\langle i,n,t\rangle$ (vgl §5.4, Folie 10)
  – Es folgt $\langle i,n\rangle \in \overline{H} \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\, \Phi_i(n)\neq t \;\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\, \chi_\Phi\langle i,n,t\rangle = 0$
  $\Leftrightarrow\; \forall t \in \mathbb{N}.\, \varphi_{f\langle i,n\rangle}(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi_{f\langle i,n\rangle} = z$
  $\Leftrightarrow\; f\langle i,n\rangle \in PROG_z$ also $\overline{H} = f^{-1}(PROG_z)$

Unlösbarkeitsbeweise mit Abschlusseigenschaften

- **Reduktion entspricht einer der Abschlußeigenschaften**
  - P, P' entscheidbar, dann auch $P{\cup}P'$, $P{\cap}P'$, $P\backslash P'$, $\overline{P}$, $f^{-1}(P)$
  - P, P' aufzählbar, dann auch $P{\cup}P'$, $P{\cap}P'$, $g(P)$, $g^{-1}(P)$
  - P entscheidbar $\Leftrightarrow$ P und $\overline{P}$ aufzählbar
- **Abschlußeigenschaften lassen sich umkehren**
  - P nicht entscheidbar $\Rightarrow$ $\overline{P}$ nicht entscheidbar
  - P aufzählbar, nicht entscheidbar $\Rightarrow$ $\overline{P}$ nicht aufzählbar /entscheidbar
  - P entscheidbar, $P{\cup}P'$ nicht entscheidbar $\Rightarrow$ P' nicht entscheidbar
  - P entscheidbar, $P\backslash P'$ nicht entscheidbar $\Rightarrow$ P' nicht entscheidbar

  $\vdots$ $\vdots$
- **Gleiche Beweismethodik**
  - Zeige, wie Problem mit bekannten Problemen zusammenhängt

Resultate aus Abschlusseigenschaften

- **$\{\langle i,n\rangle \mid n \notin \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht aufzählbar**
  - $\{\langle i,n\rangle \mid n \notin \mathrm{domain}(\varphi_i)\}$ ist das Komplement des Halteproblems H
  - H ist aufzählbar aber unentscheidbar
  - Also kann $\overline{H}$ nicht aufzählbar sein
- **$PROG_z = \{i \mid \varphi_i = z\}$ ist nicht aufzählbar**
  - Es gilt $\overline{H} \leq PROG_z$ und $\overline{H}$ ist nicht aufzählbar
  - Damit kann $PROG_z$ nicht aufzählbar sein
- **Die Menge der Turingmaschinen M mit $L(M)=\emptyset$ ist nicht aufzählbar**
  - Beweis ist minimale Modifikation von $\overline{H} \leq PROG_z$
- **$PF = \{i \mid \varphi_i \text{ partiell}\}$ ist unentscheidbar**
  - PF ist das Komplement von $TR = \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$
  - TR ist nicht aufzählbar, also kann $PF = \overline{TR}$ nicht entscheidbar sein

Welche Verifikationsprobleme sind entscheidbar?

- **Halteproblem** — unentscheidbar
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es bei bestimmten Eingaben hält oder nicht?
- **Korrektheitsproblem** — unentscheidbar für Nullfunktion
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine bestimmte Funktion berechnet oder nicht?
- **Spezifikationsproblem**
  - Kann man von einem beliebigen Programm entscheiden, ob es eine gegebene Spezifikation erfüllt oder nicht?
- **Äquivalenzproblem**
  - Kann man entscheiden, ob zwei beliebige Programme die gleiche Funktion berechnen oder nicht?

Gibt es eine allgemeine Antwort?

Der Satz von Rice

Keine nichttriviale (extensionale) Eigenschaft berechenbarer Funktionen ist entscheidbar

Für $\emptyset \neq P \subset \mathcal{R}$ ist $L_P = \{i \mid \varphi_i \in P\}$ unentscheidbar

Beweis durch Reduktion von $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ auf L_P

– Sei g die nirgends definierte Funktion (d.h. $g(x)=\perp$ für alle x).

– Falls $g \notin P$, so wähle $f \in P$ beliebig und definiere

$$f'\langle i,x\rangle = f(x) * \psi_S(i) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } i \in S \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

– Da f' berechenbar ist, gibt es nach dem SMN Theorem ein total-berechenbares h mit $f'\langle i,x\rangle = \varphi_{h(i)}(x)$

– Damit $i \in S \Rightarrow \forall x.\, \varphi_{h(i)}(x) = f'\langle i,x\rangle = f(x) \Rightarrow \varphi_{h(i)} = f \in P \Rightarrow h(i) \in L_P$

$i \notin S \Rightarrow \forall x.\, \varphi_{h(i)}(x) = f'\langle i,x\rangle = \perp \Rightarrow \varphi_{h(i)} = g \notin P \Rightarrow h(i) \notin L_P$

– Es folgt: $i \in S \Leftrightarrow h(i) \in L_P$, d.h. $S \leq L_P$. Also ist L_P unentscheidbar. $\surd$

– Falls $g \in P$ wähle ein beliebiges $f \notin P$ und zeige so $S \leq \overline{L_P}$ $\surd$

Anwendungen des Satzes von Rice

Keine Programmeigenschaft kann getestet werden

- $\boldsymbol{MON} = \{i \mid \forall k \in \mathbb{N}\ \ \varphi_i(k) < \varphi_i(k+1)\}$
  – Monotone Funktionen sind unentscheidbar
- $\boldsymbol{EF} = \{i \mid \forall j \in \mathbb{N}\ \ \varphi_i(j) \in \{0,1\}\}$
  – Entscheidungsfunktion zu sein ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_f} = \{i \mid \varphi_i = f\}$
  – Korrektheitsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{PROG_{spec}} = \{i \mid \varphi_i$ **erfüllt Spezifikation** $spec\}$
  – Allgemeines Spezifikationsproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{EQ} = \{\langle i,j\rangle \mid \varphi_i = \varphi_j\}$
  – Äquivalenzproblem ist unentscheidbar
- $\boldsymbol{RG} = \{\langle i,j\rangle \mid j \in \mathbf{range}(\varphi_i)\}$
  – Bildbereiche sind unentscheidbar

Beweise müssen von Hand geführt werden
Rechnerunterstützung nur in Spezialfällen möglich

Das Post'sche Korrespondenzproblem
Codiere Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken

- **Informale Beschreibung**
  - Gegeben eine Liste von Wortpaaren $(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)$ in Σ^+
  - Eine **Korrespondenz** ist eine Indexfolge $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
  - $(u_1, v_1), .., (u_k, v_k)$ heißt **lösbar**, wenn es eine Korrespondenz gibt

- **Beispiele**
  - $K_1 = (1, 101),\ (10, 00),\ (011, 11)$
    Lösbar mit Korrespondenz 1323, denn $u_1u_3u_2u_3 = v_1v_3v_2v_3 = 101110011$
  - $K_2 = (1, 10),\ (101, 01)$
    Unlösbar: alle u_i haben mehr Einsen als Nullen, die v_i sind ausgewogen
  - $K_3 = (001, 0),\ (01, 011),\ (01, 101),\ (10, 001)$
  Lösung 2434421243434434421442134113444212111343412144214113411311312144113

- **Post'sches Korrespondenzproblem, präzisiert**
  - $\boldsymbol{PKP} = \{(u_1, v_1), .., (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \Sigma^+ \wedge \exists i_1, .., i_n.\ u_{i_1}..u_{i_n}{=}v_{i_1}..v_{i_n}\}$

Post'sches Korrespondenzproblem: Aufzählbarkeit

- **(Semi-)Entscheidungsalgorithmus:**
  - **Eingabe**: Wort $w = (u_1, v_1), .., (u_k, v_k) \in (\Sigma \cup \{"(", ")", ","\})^*$
  - Durch Klammerzählung bestimme alle u_i und v_i und die Anzahl k
  - Zähle alle möglichen Indexfolgen $i_1, .., i_n$ mit $i_j \leq k$ auf
    (Verwende Umkehrung der Standardtupelfunktion für Listen $\langle i_1, .., i_n \rangle^*$)
    - Falls $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$, so akzeptiere w (Ausgabe 1)
    - Ansonsten generiere die nächste Indexfolge

- **Algorithmus berechnet ψ_{PKP}**
  - $w \in PKP \Rightarrow$ Es gibt $i_1, .., i_n$ mit $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$
    $\Rightarrow$ Aufzählung endet bei $\langle i_1, .., i_n \rangle^*$ mit Ausgabe 1
  - $w \notin PKP \Rightarrow$ Es gibt keine Korrespondenz
    $\Rightarrow$ Aufzählung terminiert nicht, da Test niemals erfolgreich

UNENTSCHEIDBARKEIT VON PKP

BEWEIS DURCH DOPPELTE REDUKTION (Details im Anhang)

- **Verwende eingeschränkte Version des Problems**
  - $\boldsymbol{MPKP}$ = $\{(u_1,v_1),..,(u_k,v_k) \mid u_i,v_i\in\Sigma^+$
    $\wedge\,\exists n{\geq}2.\ \exists i_2,..,i_n.\ u_1u_{i_2}..u_{i_n} = v_1v_{i_2}..v_{i_n}\}$
- **Zeige: $\boldsymbol{H{\leq}MPKP}$** (also $MPKP$ unentscheidbar)
  - Zeige, daß jede Turingmaschine M als MPKP beschrieben werden kann
    - (u_1,v_1) beschreibt die Erzeugung der Anfangskonfiguration in v_1
    - Weitere Wortpaare entsprechen Konfigurationsübergängen
      wie bei Simulation von Turingmaschinen durch Typ-0 Grammatiken
  - M hält, wenn $MPKP$ eine terminierende Berechnung beschreiben kann
  - Korrespondenz bedeutet, daß jedes Ergebnis eines Konfigurationsübergangs Anfangspunkt des nächsten Übergangs ist
- **Zeige: $\boldsymbol{MPKP{\leq}PKP}$** (technisch)
  - Erzeuge Reduktion, die Gleichheit des ersten Wortpaares erzwingt

Unentscheidbarkeiten auf Grammatiken (HMU §9.5)

Für kontextfreie Grammatiken G, G' sind die folgende Probleme unentscheidbar

1. $L(G) \cap L(G') = \emptyset$
2. $L(G) \cap L(G')$ **unendlich**
3. $L(G) \cap L(G')$ **kontextfrei**
4. $L(G) \subseteq L(G')$
5. $L(G) = L(G')$
6. $L(G) = \Sigma^*$
7. G **mehrdeutig**
8. $\overline{L(G)}$ **kontextfrei**
9. $L(G)$ **regulär**
10. $L(G) \in \mathcal{L}_{DPDA}$

Beweise Unentscheidbarkeiten durch Reduktion

- **Transformiere ein PKP in Grammatiken G und G'**
  - Gegeben $K = (u_1, v_1), .., (u_k, v_k)$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, \$, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere G := $S \to A\$B$,
    $A \to a_1 A u_1, .., A \to a_k A u_k, \quad A \to a_1 u_1, .., A \to a_k u_k$
    $B \to v_1^R B a_1, .., B \to v_k^R B a_k, \quad B \to v_1^R a_1, .., B \to v_k^R a_k$
  - Dann gilt $L(G) = \{a_{i_n}..a_{i_1} u_{i_1}..u_{i_n} \, \$ \, v_{j_m}^R..v_{j_1}^R a_{j_1}..a_{j_m} \mid i_\nu, j_\mu \leq k\}$
  - Konstruiere G' := $S \to a_1 S a_1, .., S \to a_k S a_k, \; S \to T$,
    $T \to 0T0, \; T \to 1T1, \; T \to \$$,
  - Dann gilt $L(G') = \{x^R w \, \$ \, w^R x \mid x \in \{a_1, .., a_k\}^*, w \in \{0, 1\}^*\}$
- **$L(G) \cap L(G') = \emptyset$ ist unentscheidbar**
  - Folgt direkt aus $K \in PKP \;\Leftrightarrow\; i_1..i_n = j_1..j_m$ und $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{j_1}..v_{j_m}$
    $\Leftrightarrow\; L(G) \cap L(G') \neq \emptyset$ ✓
- **$L(G) \cap L(G')$ unendlich ist unentscheidbar**
  - Es gilt $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n} \;\Rightarrow\; u_{i_1}..u_{i_n} u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n} v_{i_1}..v_{i_n} \;\Rightarrow\; \ldots$
  - Es folgt $K \in PKP \;\Leftrightarrow\; L(G) \cap L(G')$ unendlich ✓

Mehrdeutigkeit ist unentscheidbar

- **G mehrdeutig ist unentscheidbar**
  - Gegeben $K = (u_1, v_1), .., (u_k, v_k)$ über $\Sigma = \{0, 1\}$
  - Wähle Terminalalphabet $:= \{0, 1, a_1, .., a_k\}$
  - Konstruiere $G :=\ S{\to}A,\ \ S{\to}B,$

    $A{\to}a_1Au_1, .., A{\to}a_kAu_k,\ A{\to}a_1u_1, .., A{\to}a_ku_k$

    $B{\to}a_1Bv_1, .., B{\to}a_kBv_k,\ B{\to}a_1v_1, .., B{\to}a_kv_k$
  - Wir zeigen **$K \in PKP \Leftrightarrow G$ mehrdeutig**

    $\Rightarrow$: Es gelte $u_{i_1}..u_{i_n} = v_{i_1}..v_{i_n}$. Dann sind

    $S \longrightarrow A \longrightarrow a_{i_1}Au_{i_1} \longrightarrow a_{i_2}a_{i_1}Au_{i_1}u_{i_2}... \longrightarrow a_{i_n}..a_{i_2}a_{i_1}u_{i_1}u_{i_2}..u_{i_n}$

    $S \longrightarrow B \longrightarrow a_{i_1}Bv_{i_1} \longrightarrow a_{i_2}a_{i_1}Bv_{i_1}v_{i_2}... \longrightarrow a_{i_n}..a_{i_2}a_{i_1}v_{i_1}v_{i_2}..v_{i_n}$

    verschiedene (Links-)Ableitungen desselben Wortes in G $\surd$

    $\Leftarrow$: Jedes $w \in L(G)$ besitzt nur eine Ableitung aus A bzw. aus B.

    Hat w zwei (Links-)Ableitungen in G, so muß die erste mit

    $S \longrightarrow A$ und die zweite mit $S \longrightarrow B$ beginnen.

    Es folgt $a_{i_n}..a_{i_2}a_{i_1}u_{i_1}u_{i_2}..u_{i_n} = w = a_{i_n}..a_{i_2}a_{i_1}v_{i_1}v_{i_2}..v_{i_n}$

    Also $K \in PKP$ $\surd$

Rückblick: Beweistechniken für Unlösbarkeit

- **Diagonalisierung** (Nur für maschinennah formulierte Probleme)
  – Gegenbeispielkonstruktion für Klassen unendlicher Objekte
  – Konstruiere ein Objekt, das sich von jedem anderen Objekt der Klasse an einer Stelle unterscheidet, und somit nicht zur Klasse gehören kann
- **Wachstums- und Monotonieargumente** (Oft aufwendig)
  – Funktion wächst stärker als jede berechenbare Funktion und kann daher nicht selbst berechenbar sein
  – Berechenbarkeit von f würde zu $f(x)>f(x)$ für ein $x \in \mathbb{N}$ führen
- **Reduktion: Rückführung auf bekanntes Problem**
  – Lösung des Problems würde Lösung eines unlösbaren Problems liefern
  – Insbesondere Komplement: $\overline{P}$ unentscheidbar $\Rightarrow$ P unentscheidbar
  $\overline{P}$ unentscheidbar aber aufzählbar $\Rightarrow$ P nicht aufzählbar
- **Anwendung allgemeiner theoretischer Resultate**
  – Nichttriviale extensionale Programmeigenschaften sind unentscheidbar

ANHANG

BEWEISE $MPKP \leq PKP$

- **Reduktion erzwingt erstes Wortpaar als Anfang**
  - Erweitere Alphabet Σ zu Σ' = $\Sigma \cup \{\#, \$\}$
  - Modifiziere Wörter $w = a_1...a_n$ zu $\hat{w} = a_1\#a_2\#...\#a_n$
  - Definiere Abbildung f durch

    $f(\,(u_1,v_1),..(u_k,v_k)\,) = \underbrace{(\#\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_1,v'_1)}, \underbrace{(\hat{u}_1\#, \#\hat{v}_1)}_{(u'_2,v'_2)}, .. \underbrace{(\hat{u}_k\#, \#\hat{v}_k)}_{(u'_{k+1},v'_{k+1})}, \underbrace{(\$, \#\$)}_{(u'_{k+2},v'_{k+2})}$

- **Zeige $K \in MPKP \Leftrightarrow f(K) \in PKP$**
  - $K \in MPKP \Rightarrow$ Es gibt $i_2, ..., i_n$ mit $u_1u_{i_2}..u_{i_n} = v_1v_{i_2}..v_{i_n}$

    $\Rightarrow \underbrace{\#\hat{u}_1\#}_{u'_1}\underbrace{\hat{u}_{i_2}\#}_{u'_{i_2+1}}..\#\underbrace{\hat{u}_{i_n}\#}_{u'_{i_n+1}}\underbrace{\$}_{u'_{k+2}} = \underbrace{\#\hat{v}_1}_{v'_1}\underbrace{\#\hat{v}_{i_2}}_{v'_{i_2+1}}\#..\underbrace{\#\hat{v}_{i_n}}_{v'_{i_n+1}}\underbrace{\#\$}_{v'_{k+2}}$

    $\Rightarrow 1, i_2{+}1, .., i_n{+}1, k{+}2$ löst $f(K)$ also $f(K) \in PKP$
  - $f(K) \in PKP \Rightarrow$ Es gibt $i_1, ..., i_n$ mit $u'_{i_1}..u'_{i_n} = v'_{i_1}..v'_{i_n}$

    $\Rightarrow i_1{=}1$, da nur u'_1, v'_1 dasselbe Anfangssymbol haben

    $i_n{=}k{+}2$, da nur u'_{k+2}, v'_{k+2} dasselbe Endsymbol haben

    $\Rightarrow 1, i_2{-}1, .., i_{n-1}{-}1$ löst K also $K \in MPKP$ $\checkmark$

$H \leq MPKP$: Transformation

Transformiere M,w in eine Korrespondenz K

(Eingaben (i,n) des Halteproblems werden zunächst in M_i, w_n transformiert)

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, $w \in \Sigma^*$. Bestimme $K := f(M, w)$ wie folgt

– Wähle Alphabet $\Delta := \Gamma \cup Q \cup \{\#\}$ für das MPKP

– Erzeuge Anfangskonfiguration in $(u_1, v_1) := (\#,\ \# q_0 w \#)$

– Beschreibe Konfigurationsübergänge durch Wortpaare

- $(q\,X,\ Y\,p)$ für $\delta(q, X) = (p, Y, R)$
- $(q\,\#,\ Y\,p\#)$ für $\delta(q, B) = (p, Y, R)$
- $(Z\,q\,X,\ p\,Z\,Y)$ für $Z \in \Gamma$ und $\delta(q, X) = (p, Y, L)$
- $(Z\,q\,\#,\ p\,Z\,Y\,\#)$ für $Z \in \Gamma$ und $\delta(q, B) = (p, Y, L)$

– Ergänze “Kopierregeln” (X, X) für alle $X \in \Gamma \cup \{\#\}$

– Ergänze “Löschregeln” $(X\,q_f, q_f)$, $(q_f\,Y, q_f)$ und $(X\,q_f\,Y, q_f)$
für alle $X, Y \in \Gamma$, $q_f \in F$

– Ergänze “Abschlußregel” $(q_f\,\#\,\#,\ \#)$ für alle $q_f \in F$

$H \leq MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(1) Zeige: M hält bei Eingabe $w \;\Rightarrow\; f(M,w) \in MPKP$

- Da M bei Eingabe w anhält, gibt es o.B.d.A. eine Konfigurationsfolge $\kappa_0{=}(\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t{=}(x_0..x_m, q_f, y_0..y_n)$ für ein $q_f \in F$
- Mit Überführungs- und Kopierregeln bauen wir folgendes Wortpaar auf
  - $u = \#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}$
  - $v = \#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}$
- Mit der Löschregel $(x_m\, q_f, q_f)$ erzeugen wir daraus
  - $\#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f$
  - $\#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}q_f$
- Mit den Kopierregeln bekommen wir
  - $\#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#$
  - $\#q_0w\#\kappa_1\# \ldots \#\kappa_t\#x_0..x_{m-1}x_m\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-1}\, q_f\, y_0..y_n\#$
- Mit den Lösch- und Kopierregeln ergibt sich
  - $\#q_0w\# \ldots \#x_0..x_{m-1}\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-2}\, q_f\, y_0..y_n\# \ldots \#q_f\, y_n\#$
  - $\#q_0w\# \ldots \#x_0..x_{m-1}\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-2}\, q_f\, y_0..y_n\# \ldots \#q_f\, y_n\#q_f\#$
- Mit der Abschlußregel ergibt sich schließlich
  - $\#q_0w\# \ldots \#x_0..x_{m-1}\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-2}\, q_f\, y_0..y_n\# \ldots \#q_f\, y_n\#q_f\#\#$
  - $\#q_0w\# \ldots \#x_0..x_{m-1}\, q_f\, y_0..y_n\#x_0..x_{m-2}\, q_f\, y_0..y_n\# \ldots \#q_f\, y_n\#q_f\#\#$ $\checkmark$

$H{\leq}MPKP$: Korrektheit der Transformation f

(2) Zeige: $f(M,w) \in MPKP \;\Rightarrow\; M$ hält auf w

– Es gelte $f(M,w) \in MPKP$

– Also gibt es $i_2, .., i_n$ mit $u_1 u_{i_2}..u_{i_n} = v_1 v_{i_2}..v_{i_n}$

– Wegen der Struktur der Korrespondenzen muß

$u_1 u_{i_2}..u_{i_n}$ mit $\#q_0 w\#$ beginnen und mit $q_f\#\#$ enden

– Wegen der Überführungsregeln gilt $\#u_{i_2} \hat{=} v_1$, $\#u_{i_3} \hat{=} v_{i_2}$, ...

– Aus der Korrespondenz können wir daher eine Konfigurationsfolge

$\kappa_0{=}(\epsilon, q_0, w) \vdash \kappa_1 \ldots \vdash \kappa_t{=}(x_0..x_m, q_f, y_0..y_n)$ für ein $q_f \in F$ konstruieren

– Also hält M bei Eingabe w an $\checkmark$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\textbf{$H{\leq}MPKP$, also ist $MPKP$ unentscheidbar}}$