## Wichtige graphentheoretische Definitionen

- Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei $V$ endliche Menge und $E \subseteq \{ \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \}$.

  Ein Graph ist darstellbar als Liste $v_1, ..., v_n, \ \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, ..., \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$.
- Die *Größe* $|G|$ eines Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl $|E|$ seiner Kanten.
- Der *Grad* $g(v)$ eines Knotens $v$ in $G = (V, E)$ ist die Anzahl der von $v$ ausgehenden Kanten.
- Ein *Pfad* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge von jeweils durch eine Kante verbundenen Knoten, also eine Folge $v_1, \ldots, v_k$ von Knoten aus $V$, so daß $\{v_j, v_{j+1}\} \in E$ für alle $j < k$ gilt. $v_1$ heißt *Startknoten*, $v_k$ *Endknoten* des Pfades. Man spricht auch von einem *Pfad von $v_1$ nach $v_k$*.

  Ein Pfad $v_1, \ldots, v_k$ heißt *elementar*, wenn $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$ gilt (Ausnahme: $v_1 = v_k$ ist erlaubt).

  Ein *Kreis* in $G = (V, E)$ ist ein Pfad, dessen Start- und Endknoten identisch ist.
- Ein Knoten $v \in V$ ist *erreichbar* vom Knoten $u \in V$ wenn es einen Pfad von $u$ nach $v$ gibt.
- Der *Komplementärgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G^c = (V, E^c)$ mit $E^c = \{ \{v, v'\} \mid v, v' \in V \wedge v \neq v' \} - E$.
- Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend*, wenn jeder Knoten in $V$ von jedem anderen Knoten über Kanten aus $E$ erreichbar ist.
- Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ ist genau dann *Subgraph* des Graphen $G = (V, E)$ ($H \sqsubseteq G$), wenn alle Ecken und Kanten von $H$ auch Ecken bzw. Kanten in $G$ sind:

  $$(V_H, E_H) \sqsubseteq (V, E) :\Leftrightarrow V_H \subseteq V \wedge E_H \subseteq E$$
- $H = (V_H, E_H)$ ist *isomorph* zu $G = (V, E)$ (kurz: $H \cong G$), wenn die Graphen durch Umbenennung (bijektive Abbildung $h : V_2 \rightarrow V$) ineinander überführt werden können:

  $$(V_H, E_H) \cong (V, E) :\Leftrightarrow \exists h : V \rightarrow V_H . (h \text{ bijektiv} \wedge E_H = \{\{h(u), h(v)\} \mid \{u, v\} \in E\})$$
- Eine *Clique* der Größe $k$ im Graphen $G = (V, E)$ ist eine vollständig verbundene Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$.

  Dabei heißt $V'$ *vollständig verbunden*, wenn gilt: $\forall v, v' \in V'. \, v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E$
- Eine *unabhängige Knotenmenge* der Größe $k$ im Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V| = k$ mit der Eigenschaft $\forall v, v' \in V'. \, v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \notin E$
- Eine *Knotenüberdeckung* (Vertex cover) des Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit der Eigenschaft $\forall \{v, v'\} \in E. \, v \in V' \vee v' \in V'$
- Ein *Eulerkreis* im Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis, der alle Kanten von $G$ genau einmal enthält.
- Ein *Hamiltonscher Kreis* im Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis, der nur aus Kanten aus $E$ besteht und jeden Knoten genau einmal berührt. Eine Beschreibungsmöglichkeit für Kreise sind Permutationen $\pi : \{1..n\} \rightarrow \{1..n\}$ mit der Eigenschaft $\forall i < n. \, \{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E \wedge \{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$
- Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei $V$ endliche Menge und $E \subseteq \{(v, v') \in V \times V' \mid v \neq v' \}$.

  Ein *Hamiltonscher Kreis* im gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist ein gerichteter Kreis, der nur aus Kanten aus $E$ besteht und jeden Knoten genau einmal berührt.

Weitere Konzepte und Beispiele findet man z.B. in


- S. O. Krumke, H. Noltemeier: *Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen*, Teubner 2005.
- C. Meinel, M. Mundhenk: *Mathematische Grundlagen der Informatik*, Teubner 2002.
- K. Denecke: *Algebra und Diskrete Mathematik für Informatiker*, Teubner 2003.