Inferenzmethoden

Einheit 1

Verdichtung des logischen Schließens I

Tableauxkalküle

1. Tableauxbeweise
2. Korrektheit und Vollständigkeit
3. Bezug zu Sequenzenkalkülen

Sequenzenkalküle sind ineffizient

- **Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur**

`orL` i	$\Gamma, A \lor B, \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A \land B$	`andR`
	$\Gamma, A, \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash A$	
	$\Gamma, B, \Delta \vdash C$	$\Gamma \vdash B$	

Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen $\mapsto$ Tableauxkalkül

Sequenzenkalküle sind ineffizient

- **Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur**

$$\texttt{orL}\ i \quad \frac{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C}{\begin{array}{c}\Gamma, A, \Delta \vdash C \\ \Gamma, B, \Delta \vdash C\end{array}} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\begin{array}{c}\Gamma \vdash A \\ \Gamma \vdash B\end{array}} \quad \texttt{andR}$$

  Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen $\mapsto$ Tableauxkalkül

- **Sequenzenbeweise enthalten viel Redundanz**
  - Jeder Knoten enthält alle gültigen Annahmen und die Konklusion
  - Regeln zerlegen und kopieren Syntaxbaum von Formeln

  Kalkül sollte direkt auf Syntaxbaum operieren $\mapsto$ Matrix-Kalkül

Sequenzenkalküle sind ineffizient

- **Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur**

$$\begin{array}{llll} \texttt{orL}\ i & \Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \wedge B & \texttt{andR} \\ & \quad \Gamma, A, \Delta \vdash C & \quad \Gamma \vdash A & \\ & \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C & \quad \Gamma \vdash B & \end{array}$$

  Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen $\mapsto$ Tableauxkalkül

- **Sequenzenbeweise enthalten viel Redundanz**
  - Jeder Knoten enthält alle gültigen Annahmen und die Konklusion
  - Regeln zerlegen und kopieren Syntaxbaum von Formeln

  Kalkül sollte direkt auf Syntaxbaum operieren $\mapsto$ Matrix-Kalkül

- **Beweissuche erfordert Vorausschau**
  - Inferenzregeln basieren auf Konnektiven und Quantoren
    - · Welche Hypothese soll zerlegt werden?
    - · Welcher Teil einer Disjunktion soll gezeigt werden?
    - · Welche Substitution soll bei Quantorenzerlegung benutzt werden?
  - Auswahl hat Anwendbarkeit der Regel `axiom` zum Ziel

  Beweisuche sollte auf Abschluß von Beweisästen abzielen

  $\mapsto$ Konnektionsmethode

Verdichtete Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen repräsentieren Sequenzen**
  - **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
  - Keine strukturellen Regeln erforderlich
- **Regeln gruppiert in Klassen ähnlicher Struktur**
  - `andL` und `orR`: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ α**
  - `andR` und `orL`: Dekomposition verzweigt Beweis **Typ β**
  - `allL` und `exR`: Dekomposition instantiiert Variable mit Term **Typ γ**
  - `allR` und `exL`: Dekomposition deklariert neue Variable **Typ δ**
- **Komplementarität ersetzt `axiom` Regel**
  - Gleiche Formeln mit verschiedener Polarität schließen Beweisast ab
- **Effizientere Beweisführung**
  - Weniger Regeln; Komplementaritätstest für Menschen etwas schwerer

Tableauxkalkül historisch

Unabhängig vom Sequenzenkalkül entstanden

- **Begründung über indirekte Beweisführung**
  – Statt $\vdash F$ beweise, daß $\neg F$ nicht gelten kann, also daß alle möglichen Konsequenzen von $\neg F$ zum Widerspruch führen
- **Polarität verkürzt Schreibweise**
  – $X^T \hat{=} X$ ist wahr, $X^F \hat{=} X$ ist falsch
- **Regeln beschreiben logische Gesetze**
  – Wenn $\neg X$ wahr ist, dann ist X falsch
  – Wenn $\neg X$ falsch ist, dann ist X wahr
  – Wenn $X \wedge Y$ wahr ist, dann sind X und Y wahr
  – Wenn $X \vee Y$ falsch ist, dann sind X und Y falsch
  – Wenn $X \Rightarrow Y$ falsch ist, dann ist X wahr und Y falsch
  – Wenn $X \wedge Y$ falsch ist, dann ist X falsch oder Y falsch
  – Wenn $X \vee Y$ wahr ist, dann ist X wahr oder Y wahr
  – Wenn $X \Rightarrow Y$ wahr ist, dann ist X falsch oder Y wahr

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$((\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{Q}) \Rightarrow (\neg \boldsymbol{Q} \Rightarrow \neg \boldsymbol{P}))^{\boldsymbol{F}}$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$\longrightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$

$$(P \Rightarrow Q)^T$$

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P)^F$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$\begin{array}{ccc}
 & ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^{F} & \\
 & | & \\
\longrightarrow & (P \Rightarrow Q)^{T} & \\
 & | & \\
 & (\neg Q \Rightarrow \neg P)^{F} & \\
\swarrow & & \searrow \\
P^{F} & & Q^{T}
\end{array}$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$
\begin{array}{ccc}
 & ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^{F} & \\
 & | & \\
 & (P \Rightarrow Q)^{T} & \\
 & | & \\
\longrightarrow & (\neg Q \Rightarrow \neg P)^{F} & \\
\swarrow & & \searrow \\
P^{F} & & Q^{T} \\
| & & | \\
\neg Q^{T} & & \neg Q^{T} \\
| & & | \\
\neg P^{F} & & \neg P^{F}
\end{array}
$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^{F}$$

$$(P \Rightarrow Q)^{T}$$

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P)^{F}$$

$$\begin{array}{lll}
 & P^{F} & Q^{T} \\
\longrightarrow & \neg Q^{T} & \neg Q^{T} \\
 & \neg P^{F} & \neg P^{F} \\
 & Q^{F} &
\end{array}$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$
\begin{array}{ccc}
 & ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F & \\
 & | & \\
 & (P \Rightarrow Q)^T & \\
 & | & \\
 & (\neg Q \Rightarrow \neg P)^F & \\
 \swarrow & & \searrow \\
P^F & & Q^T \\
| & & | \\
\neg Q^T & & \neg Q^T \\
| & & | \\
\longrightarrow\ \neg P^F & & \neg P^F \\
| & & \\
Q^F & & \\
| & & \\
P^T & &
\end{array}
$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$

$$(P \Rightarrow Q)^T$$

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P)^F$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{P^F} & \qquad\qquad & Q^T \\ \neg Q^T & & \neg Q^T \\ \neg P^F & & \neg P^F \\ Q^F & & \\ \boxed{P^T} & & \\ \times & & \end{array}$$

P kann nicht gleichzeitig falsch und wahr sein

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$
\begin{array}{ccc}
 & ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^{F} & \\
 & | & \\
 & (P \Rightarrow Q)^{T} & \\
 & | & \\
 & (\neg Q \Rightarrow \neg P)^{F} & \\
\swarrow & & \searrow \\
P^{F} & & Q^{T} \\
| & & | \\
\neg Q^{T} & & \neg Q^{T} \longleftarrow \\
| & & | \\
\neg P^{F} & & \neg P^{F} \\
| & & | \\
Q^{F} & & Q^{F} \\
| & & \\
P^{T} & & \\
| & & \\
\times & &
\end{array}
$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$

$$(P \Rightarrow Q)^T$$

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P)^F$$

$$\begin{array}{ccc}
P^F & \qquad\qquad & \boxed{Q^T} \\
\neg Q^T & & \neg Q^T \\
\neg P^F & & \neg P^F \\
Q^F & & \boxed{Q^F} \\
P^T & & \times \\
\times & &
\end{array}$$

Q kann nicht gleichzeitig falsch und wahr sein

TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$
$$(P \Rightarrow Q)^T$$
$$(\neg Q \Rightarrow \neg P)^F$$

P^F	Q^T
$\neg Q^T$	$\neg Q^T$
$\neg P^F$	$\neg P^F$
Q^F	Q^F
P^T	$\times$
$\times$	

Alle Zweige widersprüchlich, Originalformel gültig

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))^{F}$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$

$$\longrightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))^{F}$$

$$(P \Rightarrow Q)^{T}$$

$$(\neg Q \Rightarrow P)^{F}$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))^F$$

$$(P \Rightarrow Q)^T$$

$$\longrightarrow \quad (\neg Q \Rightarrow P)^F$$

$$\neg Q^T$$

$$P^F$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P)$

$$
\begin{array}{c}
((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))^{F} \\
| \\
(P \Rightarrow Q)^{T} \\
| \\
(\neg Q \Rightarrow P)^{F} \\
| \\
\longrightarrow \quad \neg Q^{T} \\
| \\
P^{F} \\
| \\
Q^{F}
\end{array}
$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))^F$$

$$(P \Rightarrow Q)^T$$

$$(\neg Q \Rightarrow P)^F$$

$$\neg Q^T$$

$$P^F$$

$$Q^F$$

$$\begin{array}{ccc} P^F & \qquad\qquad & Q^T \end{array}$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))^F$$

$$(P \Rightarrow Q)^T$$

$$(\neg Q \Rightarrow P)^F$$

$$\neg Q^T$$

$$P^F$$

$$\boxed{Q^F}$$

$$P^F \qquad\qquad\qquad \boxed{Q^T}$$

$$\times$$

Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P)$

$$
\begin{array}{ccc}
 & ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))^F & \\
 & | & \\
 & (P \Rightarrow Q)^T & \\
 & | & \\
 & (\neg Q \Rightarrow P)^F & \\
 & | & \\
 & \neg Q^T & \\
 & | & \\
 & P^F & \\
 & | & \\
 & \boxed{Q^F} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
\boxed{P^F} & & Q^T \\
 & & | \\
 & & \times
\end{array}
$$

Offener Zweig liefert Gegenbeispiel P^F, Q^F

Aussagenlogische Tableauxregeln schematisiert

- **Typ α (konjunktiv): Verlängerung des Beweiszweigs**
  - Wenn $\neg X^T$, dann X^F
  - Wenn $\neg X^F$, dann X^T
  - Wenn $X \wedge Y^T$, dann X^T und Y^T
  - Wenn $X \vee Y^F$, dann X^F und Y^F
  - Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann X^T und Y^F

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

- **Typ β (disjunktiv): Verzweigung des Beweises**
  - Wenn $X \wedge Y^F$, dann X^F oder Y^F
  - Wenn $X \vee Y^T$, dann X^T oder Y^T
  - Wenn $X \Rightarrow Y^T$, dann X^F oder Y^T

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

- **Teilformeln bestimmt durch Konnektiv und Polarität**

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	–	–

β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
β_1	X^F	X^T	X^F
β_2	Y^F	Y^T	Y^T

Prädikatenlogische Tableauxregeln

- **Typ γ: Instantiierung einer Variablen**
  - Wenn $\forall x A^T$, dann $A[t/x]^T$ für beliebiges t
  - Wenn $\exists x A^F$, dann $A[t/x]^F$ für beliebiges t

$$\frac{\gamma}{\gamma(t)}$$

- **Typ δ: Deklaration einer neuen Variablen**
  - Wenn $\forall x A^F$, dann $A[a/x]^F$ für ein gewisses, festes a
  - Wenn $\exists x A^T$, dann $A[a/x]^T$ für ein gewisses, festes a
  - Da a unbekannt ist, muß eine neue Variable gewählt werden

$$\frac{\delta}{\delta(a)}$$

- **Teilformeln tabellarisch bestimmt**

γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$	δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$
$\gamma(t)$	$A[t/x]^T$	$A[t/x]^F$	$\delta(a)$	$A[a/x]^F$	$A[a/x]^T$

Tableauxbeweis für $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\boldsymbol{\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^{F}}$$

Tableauxbeweis für $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$
\begin{array}{ll}
\alpha \longrightarrow & \neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F \\
& \quad | \\
& \neg(\forall x Px)^F \\
& \quad | \\
& (Pa \wedge Pb)^F
\end{array}
$$

Tableauxbeweis für $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^{F}$$

$\alpha \longrightarrow$

$$\neg(\forall x Px)^{F}$$

$$(Pa \wedge Pb)^{F}$$

$$(\forall x Px)^{T}$$

Tableauxbeweis für $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^{F}$$

$$\neg(\forall x Px)^{F}$$

$\beta \longrightarrow$ $$(Pa \wedge Pb)^{F}$$

$$(\forall x Px)^{T}$$

$$Pa^{F} \qquad\qquad Pb^{F}$$

Tableauxbeweis für $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^{F}$$

$$\neg(\forall x Px)^{F}$$

$$(Pa \wedge Pb)^{F}$$

$$\gamma(\mathrm{a}) \longrightarrow \qquad (\forall x Px)^{T}$$

$$Pa^{F} \qquad\qquad\qquad Pb^{F}$$

$$Pa^{T}$$

Tableauxbeweis für $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$

$$\neg(\forall x Px)^F$$

$$(Pa \wedge Pb)^F$$

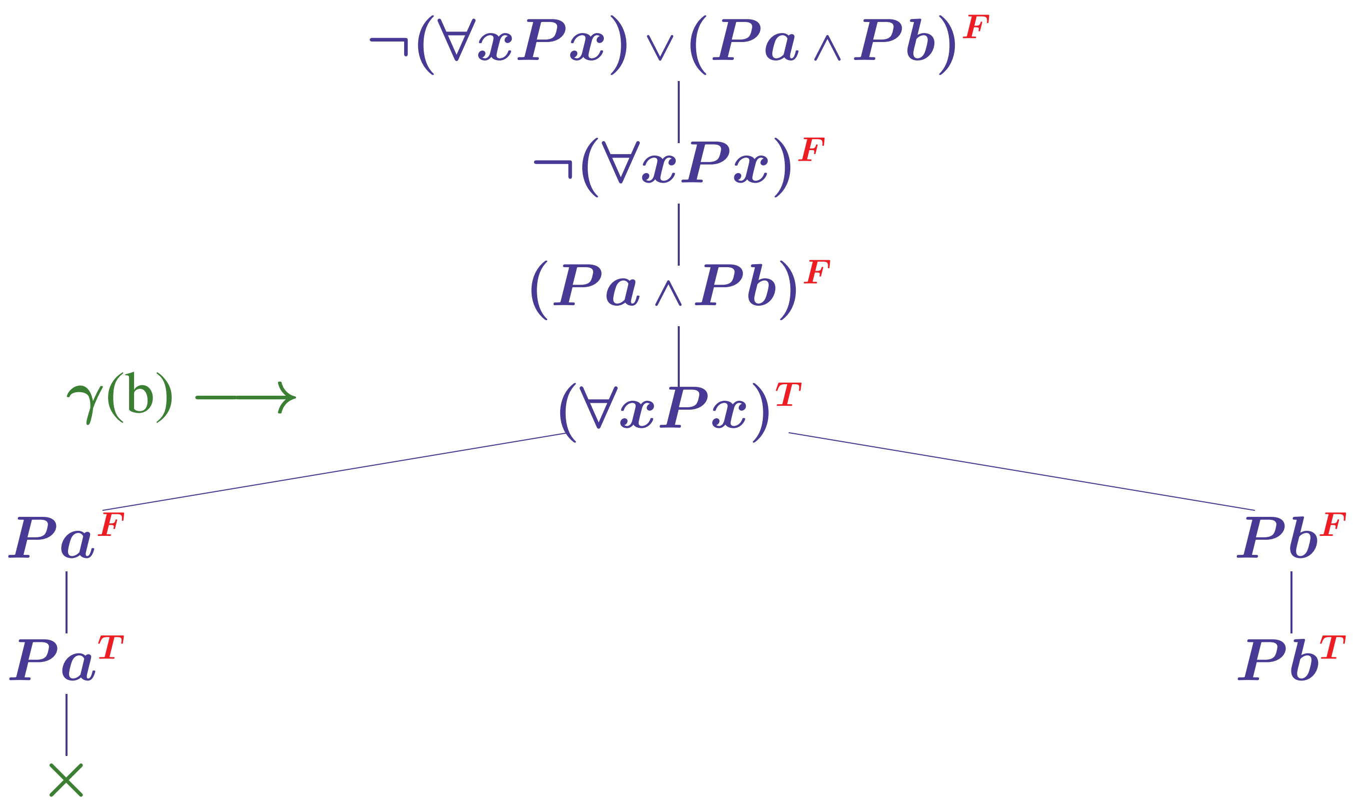
$$(\forall x Px)^T$$

$$\boxed{Pa^F} \qquad\qquad Pb^F$$

$$\boxed{Pa^T}$$

$$\times$$

Tableauxbeweis für $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



Tableauxbeweis für $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^{F}$$

$$\neg(\forall x Px)^{F}$$

$$(Pa \wedge Pb)^{F}$$

$$(\forall x Px)^{T}$$

$$Pa^{F}$$

$$Pa^{T}$$

$$\times$$

$$\boxed{Pb^{F}}$$

$$\boxed{Pb^{T}}$$

$$\times$$

Tableauxbeweis für $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^{F}$$

$$\neg(\forall x Px)^{F}$$

$$(Pa \wedge Pb)^{F}$$

$$(\forall x Px)^{T}$$

$$Pa^{F} \qquad\qquad\qquad Pb^{F}$$

$$Pa^{T} \qquad\qquad\qquad Pb^{T}$$

$$\times \qquad\qquad\qquad \times$$

Zwei verschiedene Instanzen derselben Formel

Beweis für $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x \boldsymbol{Px} \Rightarrow \boldsymbol{Qx}) \Rightarrow ((\forall x \boldsymbol{Px}) \Rightarrow (\forall x \boldsymbol{Qx}))^{F}$$

Beweis für $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$\alpha \longrightarrow \quad (\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

Beweis für $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$\alpha \longrightarrow$ $$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

Beweis für $(\forall x P x \Rightarrow Q x) \Rightarrow ((\forall x P x) \Rightarrow (\forall x Q x))$

$$(\forall x P x \Rightarrow Q x) \Rightarrow ((\forall x P x) \Rightarrow (\forall x Q x))^F$$

$$(\forall x P x \Rightarrow Q x)^T$$

$$(\forall x P x) \Rightarrow (\forall x Q x)^F$$

$$(\forall x P x)^T$$

$$\delta(\text{a}) \longrightarrow \quad (\forall x Q x)^F$$

$$Qa^F$$

Beweis für $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

γ(a) $\longrightarrow$ $$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

$$Pa^T$$

$\forall x Qx$ muß vor den γ-Knoten zerlegt werden

Beweis für $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

γ(a) $\longrightarrow$ $$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

$$Pa^T$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$\forall x Qx$ muß vor den γ-Knoten zerlegt werden

Beweis für $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^{F}$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^{T}$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^{F}$$

$$(\forall x Px)^{T}$$

$$(\forall x Qx)^{F}$$

$$Qa^{F}$$

$$Pa^{T}$$

$$\beta \longrightarrow \quad Pa \Rightarrow Qa^{T}$$

$$Pa^{F} \qquad\qquad Qa^{T}$$

$\forall x Qx$ muß vor den γ-Knoten zerlegt werden

Beweis für $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

$$\boxed{Pa^T}$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$\begin{array}{ccc} \boxed{Pa^F} & \qquad\qquad & Qa^T \\ \times & & \end{array}$$

$\forall x Qx$ muß vor den γ-Knoten zerlegt werden

Beweis für $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$\boxed{Qa^F}$$

$$Pa^T$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$\begin{array}{ccc} Pa^F & \qquad\qquad & \boxed{Qa^T} \\ | & & | \\ \times & & \times \end{array}$$

$\forall x Qx$ muß vor den γ-Knoten zerlegt werden

TABLEAUX PRÄZISIERT

- **Signierte Formel**
  - Formel X mit Vorzeichen T oder F, geschrieben als $\mathrm{X}^{\boldsymbol{T}}$ bzw. $\mathrm{X}^{\boldsymbol{F}}$
  - Interpretation: $\boldsymbol{\iota(X^T)} = \iota(X)$, $\boldsymbol{\iota(X^F)} = \iota(\neg X)$
  - X^T und X^F sind komplementär zueinander

- **Analytisches Tableau für signierte Formel $\boldsymbol{F}$**
  - Binärer geordneter Baum $\mathcal{T}$ mit Wurzel F
  - Für jeden Knoten y mit Nachfolger z gibt es einen Vorfahren x mit
    - · Ist x vom Typ α, so ist z entweder α_1 oder α_2
    - · Ist x vom Typ γ, so ist $z = \gamma(t)$ für einen Term t
    - · Ist x vom Typ δ, so ist $z = \delta(a)$ für eine neue Variable a.
  - Für jeden Knoten y mit Nachfolgern z_1 und z_2 gibt es einen Vorfahren x vom Typ β mit $z_1 = \beta_1$ und $z_2 = \beta_2$

- **$\mathcal{T}_1$ direkte Erweiterung von $\mathcal{T}$**
  - $\mathcal{T}_1$ entsteht aus $\mathcal{T}$ durch Anwendung einer Regel auf einen Zweig ϑ von $\mathcal{T}$

- **Zweig ϑ=[F_0,F_1...,F_n] im Tableau**
  - Liste der (signierten) Formeln zwischen Wurzel F_0 und Blatt F_n
  - Interpretation: $\iota(\vartheta) = \begin{cases} \text{wahr} & \iota(F)\text{=wahr für alle } F \in \vartheta \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$

Tableauxbeweise

- **Zweig ϑ=[F_0,F_1...,F_n] im Tableau**
  - Liste der (signierten) Formeln zwischen Wurzel F_0 und Blatt F_n
  - Interpretation: $\iota(\vartheta) = \begin{cases} \text{wahr} & \iota(F)\text{=wahr für alle } F \in \vartheta \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- **Geschlossenes Tableau $\mathcal{T}$**
  - Zweig ϑ ist geschlossen, wenn er ein komplementäres Formelpaar Y^F Y^T enthält
  - Geschlossene Zweige sind unerfüllbar
  - $\mathcal{T}$ ist geschlossen, wenn jeder Zweig geschlossen ist

TABLEAUXBEWEISE

- **Zweig ϑ=[F_0,F_1...,F_n] im Tableau**
  - Liste der (signierten) Formeln zwischen Wurzel F_0 und Blatt F_n
  - Interpretation: $\iota(\vartheta) = \begin{cases} \text{wahr} & \iota(F)\text{=wahr für alle } F \in \vartheta \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- **Geschlossenes Tableau $\mathcal{T}$**
  - Zweig ϑ ist geschlossen, wenn er ein komplementäres Formelpaar Y^F Y^T enthält
  - Geschlossene Zweige sind unerfüllbar
  - $\mathcal{T}$ ist geschlossen, wenn jeder Zweig geschlossen ist
- **Tableauxbeweis für Formel X**
  - Geschlossenes Tableau für X^F

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

– $\iota(X^T) = \iota(X), \quad \iota(X^F) = \iota(\neg X)$

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- **$\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$**
- $\iota(\neg X^T)$ genau dann, wenn $\iota(X^F)$
- $\iota(\neg X^F)$ genau dann, wenn $\iota(X^T)$
- $\iota(X \wedge Y^T)$ genau dann, wenn $\iota(X^T)$ und $\iota(Y^T)$
- $\iota(X \vee Y^F)$ genau dann, wenn $\iota(X^F)$ und $\iota(Y^F)$
- $\iota(X \Rightarrow Y^F)$ genau dann, wenn $\iota(X^T)$ und $\iota(Y^F)$

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- **$\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$**

- $\iota(\neg X^T)$ genau dann, wenn $\iota(X^F)$
- $\iota(\neg X^F)$ genau dann, wenn $\iota(X^T)$
- $\iota(X \wedge Y^T)$ genau dann, wenn $\iota(X^T)$ und $\iota(Y^T)$
- $\iota(X \vee Y^F)$ genau dann, wenn $\iota(X^F)$ und $\iota(Y^F)$
- $\iota(X \Rightarrow Y^F)$ genau dann, wenn $\iota(X^T)$ und $\iota(Y^F)$
- **$\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt**

Korrektheit von Tableauxbeweisen

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

– $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$

– $\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

– $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$

– $\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt

– $\iota(X \wedge Y^F)$ dann $\iota(X^F)$ oder $\iota(Y^F)$
– $\iota(X \vee Y^T)$ genau dann, wenn $\iota(X^T)$ oder $\iota(Y^T)$
– $\iota(X \Rightarrow Y^T)$ genau dann, wenn $\iota(X^F)$ oder $\iota(Y^T)$

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- **$\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt**
- $\iota(X \wedge Y^F)$ dann $\iota(X^F)$ oder $\iota(Y^F)$
- $\iota(X \vee Y^T)$ genau dann, wenn $\iota(X^T)$ oder $\iota(Y^T)$
- $\iota(X \Rightarrow Y^T)$ genau dann, wenn $\iota(X^F)$ oder $\iota(Y^T)$
- **$\iota(\beta)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$ gilt**

Korrektheit von Tableauxbeweisen

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

– $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$

– $\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt

– $\iota(\beta)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$ gilt

Korrektheit von Tableauxbeweisen

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

– $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$

– $\iota(\alpha)$ **gilt genau dann, wenn** $\iota(\alpha_1)$ **und** $\iota(\alpha_2)$ **gilt**

– $\iota(\beta)$ **gilt genau dann, wenn** $\iota(\beta_1)$ **oder** $\iota(\beta_2)$ **gilt**

– $\iota(\forall x A^T)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^T)$ für alle $u \in \mathcal{U}$

– $\iota(\exists x A^F)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^F)$ für alle $u \in \mathcal{U}$

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

– $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$

– **$\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt**

– **$\iota(\beta)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$ gilt**

– $\iota(\forall x A^T)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^T)$ für alle $u \in \mathcal{U}$
– $\iota(\exists x A^F)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^F)$ für alle $u \in \mathcal{U}$
– $\iota(\forall x A^T)$ genau dann, wenn $\iota(A[t/x]^T)$ für jeden Term t
– $\iota(\exists x A^F)$ genau dann, wenn $\iota(A[t/x]^F)$ für jeden Term t

Korrektheit von Tableauxbeweisen

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- $\iota(\alpha)$ **gilt genau dann, wenn** $\iota(\alpha_1)$ **und** $\iota(\alpha_2)$ **gilt**
- $\iota(\beta)$ **gilt genau dann, wenn** $\iota(\beta_1)$ **oder** $\iota(\beta_2)$ **gilt**
- $\iota(\forall x A^T)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^T)$ für alle $u \in \mathcal{U}$
- $\iota(\exists x A^F)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^F)$ für alle $u \in \mathcal{U}$
- $\iota(\forall x A^T)$ genau dann, wenn $\iota(A[t/x]^T)$ für jeden Term t
- $\iota(\exists x A^F)$ genau dann, wenn $\iota(A[t/x]^F)$ für jeden Term t
- $\iota(\gamma)$ **gilt genau dann, wenn** $\iota(\gamma(t))$ **für jeden Term** t **gilt**

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

– $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$

– $\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt

– $\iota(\beta)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$ gilt

– $\iota(\gamma)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t gilt

Korrektheit von Tableauxbeweisen

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- $\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt
- $\iota(\beta)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$ gilt
- $\iota(\gamma)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t gilt
- $\iota(\exists x A^T)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^T)$ für ein $u \in \mathcal{U}$
- $\iota(\forall x A^F)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^F)$ für ein $u \in \mathcal{U}$

Korrektheit von Tableauxbeweisen

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- **$\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt**
- **$\iota(\beta)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$ gilt**
- **$\iota(\gamma)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t gilt**
- $\iota(\exists x A^T)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^T)$ für ein $u \in \mathcal{U}$
- $\iota(\forall x A^F)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^F)$ für ein $u \in \mathcal{U}$
- $\iota(\exists x A^T)$ genau dann, wenn $\iota_a^u(A[a/x]^T)$ für eine neue Variable a
- $\iota(\forall x A^F)$ genau dann, wenn $\iota_a^u(A[a/x]^F)$ für eine neue Variable a

  Da $u \in \mathcal{U}$ unbekannt ist, wird es durch eine *neue* Variable repräsentiert

  ι_a^u läßt die Interpretation der Variablen x außerhalb von A unverändert

Korrektheit von Tableauxbeweisen

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- $\iota(\alpha)$ **gilt genau dann, wenn** $\iota(\alpha_1)$ **und** $\iota(\alpha_2)$ **gilt**
- $\iota(\beta)$ **gilt genau dann, wenn** $\iota(\beta_1)$ **oder** $\iota(\beta_2)$ **gilt**
- $\iota(\gamma)$ **gilt genau dann, wenn** $\iota(\gamma(t))$ **für jeden Term** t **gilt**
- $\iota(\exists x A^T)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^T)$ für ein $u \in \mathcal{U}$
- $\iota(\forall x A^F)$ genau dann, wenn $\iota_x^u(A^F)$ für ein $u \in \mathcal{U}$
- $\iota(\exists x A^T)$ genau dann, wenn $\iota_a^u(A[a/x]^T)$ für eine neue Variable a
- $\iota(\forall x A^F)$ genau dann, wenn $\iota_a^u(A[a/x]^F)$ für eine neue Variable a

  Da $u \in \mathcal{U}$ unbekannt ist, wird es durch eine *neue* Variable repräsentiert

  ι_a^u läßt die Interpretation der Variablen x außerhalb von A unverändert
- $\iota(\delta)$ **gilt g.d.w.‘** $\iota_a^u(\delta(a))$ **für ein neues** a **und ein** $u \in \mathcal{U}$ **gilt**

  Wichtig: wenn a in einer Formel Y nicht vorkommt, dann ist $\iota_a^u(Y) = \iota(Y)$

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- $\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt
- $\iota(\beta)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$ gilt
- $\iota(\gamma)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t gilt
- $\iota(\delta)$ gilt g.d.w.‘$\iota_a^u(\delta(a))$ für ein neues a und ein $u \in \mathcal{U}$ gilt
  Wichtig: wenn a in einer Formel Y nicht vorkommt, dann ist $\iota_a^u(Y) = \iota(Y)$

Korrektheit von Tableauxbeweisen

Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- $\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt
- $\iota(\beta)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$ gilt
- $\iota(\gamma)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t gilt
- $\iota(\delta)$ gilt g.d.w.‘$\iota_a^u(\delta(a))$ für ein neues a und ein $u \in \mathcal{U}$ gilt

  Wichtig: wenn a in einer Formel Y nicht vorkommt, dann ist $\iota_a^u(Y) = \iota(Y)$

Klassifizierung vereinfacht Tableaux-Verfahren und Nachweis seiner Eigenschaften

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für $\mathbf{X}^{F}$**

  $\hat{=}$ X^{F} unerfüllbar, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für X^{F}

  $\hat{=}$ X^{F} erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^{F} offen

  $\hat{=}$ X^{F} erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^{F} einen erfüllbaren Zweig

Nachweis der Korrektheit

- **Zu zeigen: X gültig, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für $\mathbf{X}^{F}$**

  $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für X^F

  $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen

  $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig

- **Zeige durch strukturelle Induktion: $\mathcal{T}$ Tableaux für F,**

  Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in $\mathcal{T}$ erfüllbar

Nachweis der Korrektheit

- **Zu zeigen: X gültig, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für $\mathbf{X}^{F}$**

  $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für X^F

  $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen

  $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig

- **Zeige durch strukturelle Induktion: $\mathcal{T}$ Tableaux für F,**

  Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in $\mathcal{T}$ erfüllbar

  Basisfall: Hat $\mathcal{T}$ nur einen Knoten F, dann wähle $\vartheta = [F]$

Nachweis der Korrektheit

- **Zu zeigen: X gültig, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für $\mathbf{X}^F$**

  $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für X^F

  $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen

  $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig

- **Zeige durch strukturelle Induktion: $\mathcal{T}$ Tableaux für F,**

  Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in $\mathcal{T}$ erfüllbar

Basisfall: Hat $\mathcal{T}$ nur einen Knoten F, dann wähle $\vartheta = [F]$

Schrittfall: Sei $\mathcal{T}_1$ direkte Erweiterung von $\mathcal{T}$ mit Wurzel F und $\iota(F)$=wahr

Sei ϑ der Zweig in $\mathcal{T}$ mit $\iota(\vartheta)$=wahr

1. Falls $\mathcal{T}_1$ nicht am Zweig ϑ erweitert, wähle $\vartheta_1{=}\vartheta$
2. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig ϑ mit α_i erweitert, ist der zugehörige α-Knoten auf ϑ und damit $\iota(\alpha_i)$=wahr. Wähle $\vartheta_1{=}\vartheta\circ[\alpha_i]$
3. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig ϑ mit β_1 und β_2 erweitert, ist $\beta\in\vartheta$ damit $\iota(\beta_1)$=wahr oder $\iota(\beta_2)$=wahr. Wähle $\vartheta_1{=}\vartheta\circ[\beta_i]$ entsprechend.
4. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig ϑ mit $\gamma(t)$ erweitert, ist $\gamma\in\vartheta$. Wähle $\vartheta_1{=}\vartheta\circ[\gamma(t)]$
5. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig ϑ mit $\delta(a)$ erweitert, ist $\delta\in\vartheta$, a neu und damit $\iota_a^u(\delta(a))$=wahr für ein $u\in\mathcal{U}$. Wähle $\vartheta_1{=}\vartheta\circ[\delta(a)]$. Dann $\iota_a^u(\vartheta_1)$=wahr.

Vollständigkeit

X gültig, dann hat $\mathbf{X}^{F}$ ein geschlossenes Tableau

X gültig, dann hat $\mathbf{X}^F$ ein geschlossenes Tableau

- **Betrachte vollständige Tableaux**
  - Zweig ϑ ist eine Hintikka-Folge, wenn für alle $x \in \vartheta$ gilt
    - Das Komplement $\bar{x}$ von x ist nicht in ϑ (H0)
    - Ist x vom Typ α, so ist $\alpha_1 \in \vartheta$ und $\alpha_2 \in \vartheta$ (H1)
    - Ist x vom Typ β, so ist $\beta_1 \in \vartheta$ oder $\beta_2 \in \vartheta$ (H2)
    - Ist x vom Typ γ, so ist $\gamma(t) \in \vartheta$ für jeden Term t (H3)
    - Ist x vom Typ δ, so ist $\delta(a) \in \vartheta$ für eine Variable a (H4)
  - Zweig ϑ ist vollständig, wenn ϑ geschlossen oder eine Hintikka-Folge
    Das Tableauxverfahren kann ϑ nicht mehr um neue Formeln erweitern
  - $\mathcal{T}$ ist vollständig, wenn jeder Zweig von $\mathcal{T}$ vollständig ist

VOLLSTÄNDIGKEIT

X gültig, dann hat $\mathbf{X}^F$ ein geschlossenes Tableau

- **Betrachte vollständige Tableaux**
  - Zweig ϑ ist eine Hintikka-Folge, wenn für alle $x \in \vartheta$ gilt
    - Das Komplement $\bar{x}$ von x ist nicht in ϑ (H0)
    - Ist x vom Typ α, so ist $\alpha_1 \in \vartheta$ und $\alpha_2 \in \vartheta$ (H1)
    - Ist x vom Typ β, so ist $\beta_1 \in \vartheta$ oder $\beta_2 \in \vartheta$ (H2)
    - Ist x vom Typ γ, so ist $\gamma(t) \in \vartheta$ für jeden Term t (H3)
    - Ist x vom Typ δ, so ist $\delta(a) \in \vartheta$ für eine Variable a (H4)
  - Zweig ϑ ist vollständig, wenn ϑ geschlossen oder eine Hintikka-Folge
    Das Tableauxverfahren kann ϑ nicht mehr um neue Formeln erweitern
  - $\mathcal{T}$ ist vollständig, wenn jeder Zweig von $\mathcal{T}$ vollständig ist
- **Indirektes Argument auf Ebene der Zweige**
  1. **Für jede Formel X hat $\mathbf{X}^F$ ein vollständiges Tableau**
  2. Ist X gültig, dann ist jedes vollständige Tableau für X^F geschlossen

     $\Leftarrow$ X^F erfüllbar, falls X^F vollständiges und offenes Tableau hat

     $\Leftarrow$ **ϑ vollständiger offener Tableauzweig, dann ϑ erfüllbar**

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT I

Für jede Formel X hat $\mathbf{X}^{F}$ ein vollständiges Tableau

- **Beschreibe systematische Beweismethode**
  – Kritische Bedingung ist Axiom (H3): kann $\mathcal{T}$ nicht geschlossen werden, dann müssen *alle* Instanzen von γ-Formeln müssen erzeugt werden

Nachweis der Vollständigkeit I

Für jede Formel X hat $\mathbf{X}^F$ ein vollständiges Tableau

- **Beschreibe systematische Beweismethode**
  – Kritische Bedingung ist Axiom (H3): kann $\mathcal{T}$ nicht geschlossen werden, dann müssen *alle* Instanzen von γ-Formeln müssen erzeugt werden

  Beginne mit $\mathcal{T} = \mathrm{X}^F$ und erweitere $\mathcal{T}$ rekursiv wie folgt

  – Ist $\mathcal{T}$ geschlossen, dann ist X gültig und die Prozedur hält

  – Ansonsten wähle einen noch nicht benutzten Knoten Y minimaler Tiefe und erweitere jeden offenen Zweig ϑ mit $Y \in \vartheta$ wie folgt

  · Ist Y vom Typ α, dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$

  · Ist Y vom Typ β, dann verzweige ϑ in $\vartheta \cup \{\beta_1\}$ und $\vartheta \cup \{\beta_2\}$

  · Ist Y vom Typ γ, dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\gamma(t), \gamma\}$, wobei t der "erste" Term ist, der noch nicht in ϑ vorkommt

  · Ist Y vom Typ δ, dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\delta(a)\}$, wobei a die erste Variable ist, die nicht in ϑ vorkommt

Nachweis der Vollständigkeit I

Für jede Formel X hat $\mathbf{X}^{F}$ ein vollständiges Tableau

- **Beschreibe systematische Beweismethode**
  - Kritische Bedingung ist Axiom (H3): kann $\mathcal{T}$ nicht geschlossen werden, dann müssen *alle* Instanzen von γ-Formeln müssen erzeugt werden

    Beginne mit $\mathcal{T} = \mathsf{X}^{F}$ und erweitere $\mathcal{T}$ rekursiv wie folgt
    - Ist $\mathcal{T}$ geschlossen, dann ist X gültig und die Prozedur hält
    - Ansonsten wähle einen noch nicht benutzten Knoten Y minimaler Tiefe und erweitere jeden offenen Zweig ϑ mit $Y \in \vartheta$ wie folgt
      - · Ist Y vom Typ α, dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$
      - · Ist Y vom Typ β, dann verzweige ϑ in $\vartheta \cup \{\beta_1\}$ und $\vartheta \cup \{\beta_2\}$
      - · Ist Y vom Typ γ, dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\gamma(t), \gamma\}$, wobei t der "erste" Term ist, der noch nicht in ϑ vorkommt
      - · Ist Y vom Typ δ, dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\delta(a)\}$, wobei a die erste Variable ist, die nicht in ϑ vorkommt

Vollständigkeit: γ-Formeln werden kopiert und immer wieder neu instantiiert

Verfahren erzeugt unendliches Tableau, wenn X nicht gültig ist

Verfahren ist sehr ineffizient, nur für theoretische Betrachtungen relevant

Nachweis der Vollständigkeit II

ϑ vollständig und offen $\Rightarrow$ ϑ erfüllbar

Nachweis der Vollständigkeit II

ϑ vollständig und offen $\Rightarrow$ ϑ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**
  - Ist ϑ vollständig und offen, dann ist ϑ eine Hintikka-Folge
  - Wähle $\mathcal{U}$ als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
  - Definiere $\iota(P)(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } P(t_1, ..., t_n)^T \in \vartheta \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
  - ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0

Nachweis der Vollständigkeit II

ϑ vollständig und offen $\Rightarrow$ ϑ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**
  - Ist ϑ vollständig und offen, dann ist ϑ eine Hintikka-Folge
  - Wähle $\mathcal{U}$ als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
  - Definiere $\iota(P)(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls } P(t_1, ..., t_n)^T \in \vartheta \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
  - ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0
- **Zeige $\iota(F)$=wahr für alle $F \in \vartheta$**

  Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel F

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

ϑ vollständig und offen $\Rightarrow$ ϑ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**
  - Ist ϑ vollständig und offen, dann ist ϑ eine Hintikka-Folge
  - Wähle $\mathcal{U}$ als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
  - Definiere $\iota(P)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls } P(t_1, \ldots, t_n)^T \in \vartheta \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
  - ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0
- **Zeige $\iota(F)$=wahr für alle $F \in \vartheta$**

  Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel F

  Basisfall: F atomar, dann $\iota(F)$=wahr per Konstruktion

Nachweis der Vollständigkeit II

ϑ vollständig und offen $\Rightarrow$ ϑ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**
  - Ist ϑ vollständig und offen, dann ist ϑ eine Hintikka-Folge
  - Wähle $\mathcal{U}$ als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
  - Definiere $\iota(P)(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} \mathsf{wahr} & \text{falls } P(t_1, ..., t_n)^T \in \vartheta \\ \mathsf{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
  - ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0
- **Zeige $\iota(F)$=wahr für alle $F \in \vartheta$**

  Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel F

  Basisfall: F atomar, dann $\iota(F)$=wahr per Konstruktion

  Schrittfall: Es gelte $\iota(X)$=wahr für alle Teilformeln X von F mit $X \in \vartheta$
  - Ist F vom Typ α, so ist $\alpha_1 \in \vartheta$ und $\alpha_2 \in \vartheta$ wegen Axiom H1

    Nach Induktionsannahme ist $\iota(\alpha_1)$=$\iota(\alpha_2)$=wahr und damit $\iota(F)$=wahr
  - Für F vom Typ β folgt $\iota(\beta_1)$=wahr oder $\iota(\beta_2)$=wahr, also $\iota(F)$=wahr
  - Für F vom Typ γ folgt $\iota(\gamma(t))$=wahr für jeden Term t, also $\iota(F)$=wahr
  - Für x vom Typ δ folgt $\iota(\delta(a))$=wahr für eine Variable a, also $\iota(F)$=wahr

Varianten von Tableauxbeweisen

- **Atomar geschlossene Tableaux**
  - $\mathcal{T}$ atomar geschlossen, wenn jeder Zweig ein komplementäres Paar atomarer Formeln enthält
  - Ist X gültig, dann gibt es ein atomar geschlossenes Tableau für X^F
  - Es reicht, atomare Formeln (Literale) auf Komplementarität zu prüfen

Varianten von Tableauxbeweisen

- **Atomar geschlossene Tableaux**
  - $\mathcal{T}$ atomar geschlossen, wenn jeder Zweig ein komplementäres Paar atomarer Formeln enthält
  - Ist X gültig, dann gibt es ein atomar geschlossenes Tableau für X^F
  - Es reicht, atomare Formeln (Literale) auf Komplementarität zu prüfen

- **Block Tableaux**
  - Lokale Sicht: Knoten im Beweis enthalten alle unverarbeiteten Formeln
  - Modifizierte Beweisregeln verarbeiten Menge von signierten Formeln

$$\frac{S,\alpha}{S,\alpha_1,\alpha_2} \qquad \frac{S,\beta}{S,\beta_1 \mid S,\beta_2} \qquad \frac{S,\gamma}{S,\gamma,\gamma(t)} \qquad \frac{S,\delta}{S,\delta(a)} \qquad \frac{S,X^T,X^F}{\times}$$

  - Block Tableaux können analytische Tableaux simulieren und umgekehrt
  - Block Tableaux sind isomorph zu analytischen Sequenzenbeweisen

$\mapsto$ **Der Sequenzenkalkül ist korrekt und vollständig**

Block Tableaux Regeln vs. Sequenzenregeln

T	F	$-L$	$-R$
$\dfrac{S, A \wedge B^T}{S, A^T, B^T}$	$\dfrac{S, A \wedge B^F}{S, A^F \mid S, B^F}$	$\dfrac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \wedge B}{\Gamma \vdash \Phi, A \mid \Gamma \vdash \Phi, B}$
$\dfrac{S, A \vee B^T}{S, A^T \mid S, B^T}$	$\dfrac{S, A \vee B^F}{S, A^F, B^F}$	$\dfrac{\Gamma, A \vee B \vdash \Phi}{\Gamma, A \vdash \Phi \mid \Gamma, B \vdash \Phi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B}{\Gamma \vdash \Phi, A, B}$
$\dfrac{S, A \Rightarrow B^T}{S, A^F \mid S, B^T}$	$\dfrac{S, A \Rightarrow B^F}{S, A^T, B^F}$	$\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, A \mid \Gamma, B \vdash \Phi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, A \Rightarrow B}{\Gamma, A \vdash \Phi, B}$
$\dfrac{S, \neg A^T}{S, A^F}$	$\dfrac{S, \neg A^F}{S, A^T}$	$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \neg A}{\Gamma, A \vdash \Phi}$
$\dfrac{S, \forall x A^T}{S, A[t/x]^T}$	$\dfrac{S, \forall x A^F}{S, A[a/x]^F}$	$\dfrac{\Gamma, \forall x A \vdash \Phi}{\Gamma, A[t/x] \vdash \Phi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \forall x A}{\Gamma \vdash \Phi, A[a/x]}$
$\dfrac{S, \exists x A^T}{S, A[a/x]^T}$	$\dfrac{S, \exists x A^F}{S, A[t/x]^F}$	$\dfrac{\Gamma, \exists x A \vdash \Phi}{\Gamma, A[a/x] \vdash \Phi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \Phi, \exists x A}{\Gamma \vdash \Phi, A[t/x]}$
$\dfrac{S, X^T, X^F}{\times}$		$\dfrac{\Gamma, X \vdash \Phi, X}{\times}$	

Die Analogie gilt auch für Refinement Logik

T	F	$-L$	$-R$
$\dfrac{S,A\wedge B^T}{S,A^T,\ B^T}$	$\dfrac{S,A\wedge B^F}{S,A^F \mid S,B^F}$	$\dfrac{H,\ A\wedge B\vdash C}{H,\ A,\ B\vdash C}$	$\dfrac{H\vdash A\wedge B}{H\vdash A \mid H\vdash B}$
$\dfrac{S,A\vee B^T}{S,A^T \mid S,B^T}$	$\dfrac{S,A\vee B^F}{S,A^F,B^F}$	$\dfrac{H,\ A\vee B\vdash C}{H,A\vdash C \mid H,B\vdash C}$	$\dfrac{H\vdash A\vee B\ *}{H\vdash A\ \Vert\vert\ H\vdash B}$
$\dfrac{S,A\Rightarrow B^T}{S,A^F \mid S,B^T}$	$\dfrac{S,A\Rightarrow B^F}{S,A^T,B^F}$	$\dfrac{H,\ A\Rightarrow B\vdash C\ *}{H\vdash A \mid H,B\vdash C}$	$\dfrac{H\vdash A\Rightarrow B}{H,A\vdash B}$
$\dfrac{S,\neg A^T}{S,A^F}$	$\dfrac{S,\neg A^F}{S,A^T}$	$\dfrac{H,\ \neg A\vdash C\ *}{H\vdash A}$	$\dfrac{H\vdash\neg A}{H,\ A\vdash \mathsf{ff}}$
$\dfrac{S,\forall x A^T}{S,A[t/x]^T}$	$\dfrac{S,\forall x A^F}{S,A[a/x]^F}$	$\dfrac{H,\ \forall x A\vdash C}{H,\ A[t/x]\vdash C}$	$\dfrac{H\vdash\forall x A}{H\vdash A[a/x]}$
$\dfrac{S,\exists x A^T}{S,A[a/x]^T}$	$\dfrac{S,\exists x A^F}{S,A[t/x]^F}$	$\dfrac{H,\ \exists x A\vdash C}{H,\ A[a/x]\vdash C}$	$\dfrac{H\vdash\exists x A}{H\vdash A[t/x]}$
$\dfrac{S,X^T,X^F}{\times}$		$\dfrac{H,\ X\vdash X}{\times}$	$\dfrac{H\vdash X\vee\neg X\ *}{\times}$

* *Bedingung, nur eine einzige Konklusion zu verwenden führt zu geringfügigen Abweichungen und* `magic` *Regel*

Sequenzenkalkül vs. Block Tableaux

- **Formal ineinander übersetzbar**
  - Block Tableaux verwalten nur eine Menge von (signierten) Formeln
  - Antezedentformel X wird zu Vorzeichen T
  - Sukzedentformel X wird zu Vorzeichen F
  - Logische Regeln werden identisch
  - Strukturelle Regeln werden durch Verarbeitung von Mengen erfaßt

- **Grundlegende Ideen sehr verschieden**

	Tableaux – indirekter Beweis	Sequenzen – direkter Beweis
Ziel	X^F: Suche Widerlegung für X	$\vdash X$: Suche Beweis für X
α-Schritt	Widerlegung braucht α_1 *und* α_2	Beweis muß α_1 *oder* α_2 zeigen
β-Schritt	Widerlegung braucht β_1 *oder* β_2	Beweis muß β_1 *und* β_2 zeigen
Abschluß	Keine Widerlegung möglich	(Partieller) Beweis erfolgreich
Offenes Blatt	Gegenbeispiel gefunden	Kein Beweis möglich

Automatisches Beweisen mit Tableaux

- **Systematische Prozedur ist unpraktikabel**
  - Auswahl zu zerlegender Formeln mit Breitensuche
  - γ-Formeln werden “der Reihe nach” instantiiert
  - Extrem lange Beweise auch für kleine Formeln
  - Menschen gehen erheblich zielorienterter / effizienter vor
- **Viele Schritte sind schematisch**
  - Ziel der Regelanwendungen ist Erzeugung komplementärer Formelpaare
  - Identifizierung komplementärer Formelteile bestimmt, welche Teilformeln wann zerlegt werden und mit welchen Termen γ-Formeln instantiiert werden
  - Da auf jede Formel nur eine Regel anwendbar ist, liegen alle Beweisschritte fest, sobald komplementäre Formelteile und Substitutionen bekannt sind
  - Bestimmung dieser Information ist das Ziel von Matrixmethoden
- **Alternativ: Analytische Tableaux mit freien Variablen**
  - Formeln werden bis zu Literalen zerlegt
  - γ-Formeln werden mit freien Variablen instantiiert
  - Substitution für freie Variablen wird im Komplementaritätstest bestimmt