# Inferenzmethoden

## Einheit 1

## Verdichtung des logischen Schließens I

## Tableauxkalküle

Cornell University · Founded by Ezra Cornell

Universität Potsdam

1. Tableauxbeweise
2. Korrektheit und Vollständigkeit
3. Bezug zu Sequenzenkalkülen

# Sequenzenkalküle sind ineffizient

- **Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur**

$$\texttt{orL}\ i \quad \Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C \qquad\qquad \Gamma \vdash A \wedge B \quad \texttt{andR}$$
$$\Gamma, A, \Delta \vdash C \qquad\qquad \Gamma \vdash A$$
$$\Gamma, B, \Delta \vdash C \qquad\qquad \Gamma \vdash B$$

**Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen** ↦ Tableauxkalkül

- **Sequenzenbeweise enthalten viel Redundanz**
  - Jeder Knoten enthält alle gültigen Annahmen und die Konklusion
  - Regeln zerlegen und kopieren Syntaxbaum von Formeln

**Kalkül sollte direkt auf Syntaxbaum operieren** ↦ Matrix-Kalkül

- **Beweissuche erfordert Vorausschau**
  - Inferenzregeln basieren auf Konnektiven und Quantoren
    - · Welche Hypothese soll zerlegt werden?
    - · Welcher Teil einer Disjunktion soll gezeigt werden?
    - · Welche Substitution soll bei Quantorenzerlegung benutzt werden?
  - Auswahl hat Anwendbarkeit der Regel `axiom` zum Ziel

**Beweisuche sollte auf Abschluß von Beweisästen abzielen**

↦ Konnektionsmethode

# TABLEAUX-KALKÜLE

## Verdichtete Form des analytischen Sequenzenkalküls

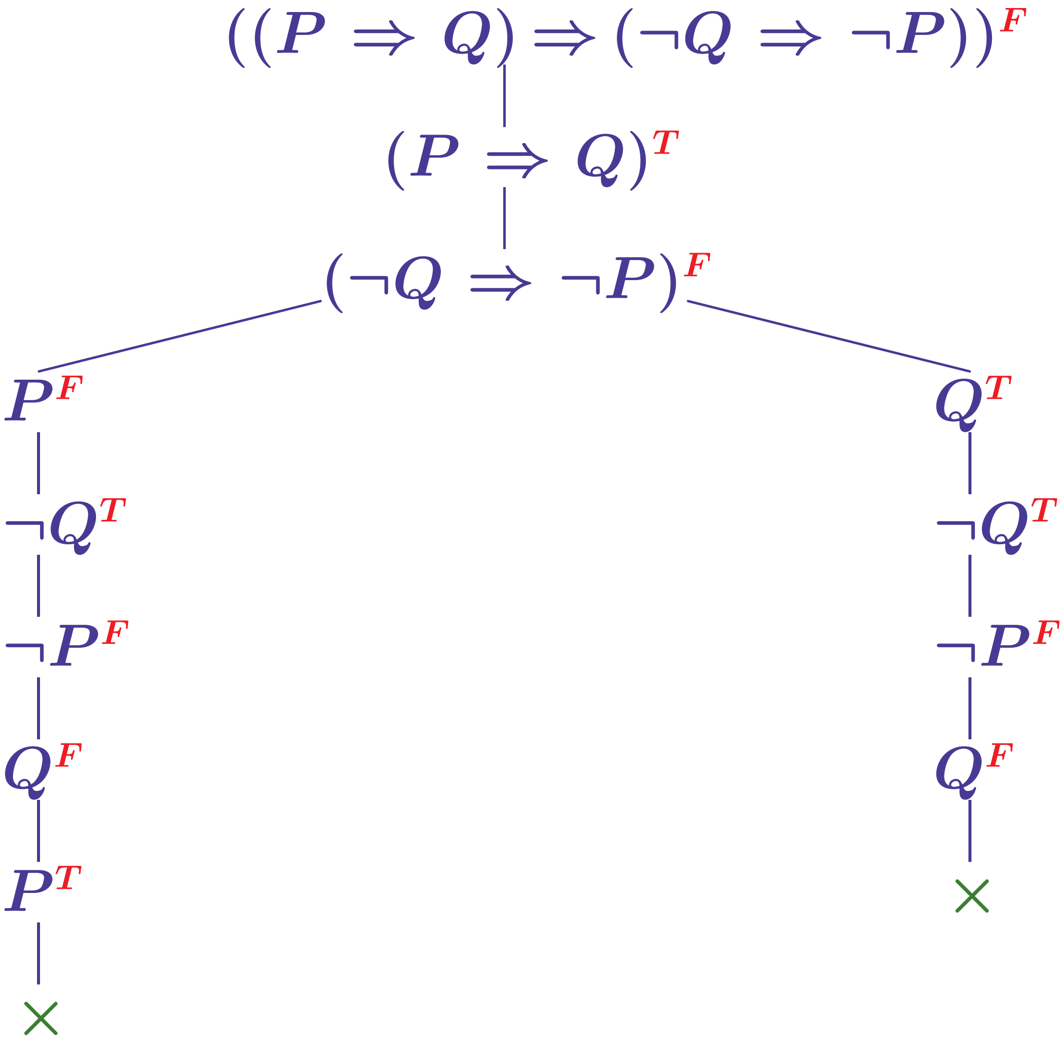
- **Formelmengen repräsentieren Sequenzen**
  - **Polarität** ($X^T$/$X^F$) kennzeichnet Rolle der Formel $X$ (links/rechts)
  - Keine strukturellen Regeln erforderlich
- **Regeln gruppiert in Klassen ähnlicher Struktur**
  - `andL` und `orR`: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ $\alpha$**
  - `andR` und `orL`: Dekomposition verzweigt Beweis **Typ $\beta$**
  - `allL` und `exR`: Dekomposition instantiiert Variable mit Term **Typ $\gamma$**
  - `allR` und `exL`: Dekomposition deklariert neue Variable **Typ $\delta$**
- **Komplementarität ersetzt `axiom` Regel**
  - Gleiche Formeln mit verschiedener Polarität schließen Beweisast ab
- **Effizientere Beweisführung**
  - Weniger Regeln; Komplementaritätstest für Menschen etwas schwerer

# TABLEAUXKALKÜL HISTORISCH

## Unabhängig vom Sequenzenkalkül entstanden

- **Begründung über indirekte Beweisführung**
  - Statt $\vdash F$ beweise, daß $\neg F$ nicht gelten kann, also daß alle möglichen Konsequenzen von $\neg F$ zum Widerspruch führen
- **Polarität verkürzt Schreibweise**
  - $X^T \hat{=} X$ ist wahr, $X^F \hat{=} X$ ist falsch
- **Regeln beschreiben logische Gesetze**
  - Wenn $\neg X^T$, dann $X^F$
  - Wenn $\neg X^F$, dann $X^T$
  - Wenn $X \wedge Y^T$, dann $X^T$ und $Y^T$
  - Wenn $X \vee Y^F$, dann $X^F$ und $Y^F$
  - Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann $X^T$ und $Y^F$
  - Wenn $X \wedge Y^F$, dann $X^F$ oder $Y^F$
  - Wenn $X \vee Y^T$, dann $X^T$ oder $Y^T$
  - Wenn $X \Rightarrow Y^T$, dann $X^F$ oder $Y^T$

# Tableauxbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$



$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

$(P \Rightarrow Q)^T$

$(\neg Q \Rightarrow \neg P)^F$

$P^F$ | $Q^T$

$\neg Q^T$ | $\neg Q^T$

$\neg P^F$ | $\neg P^F$

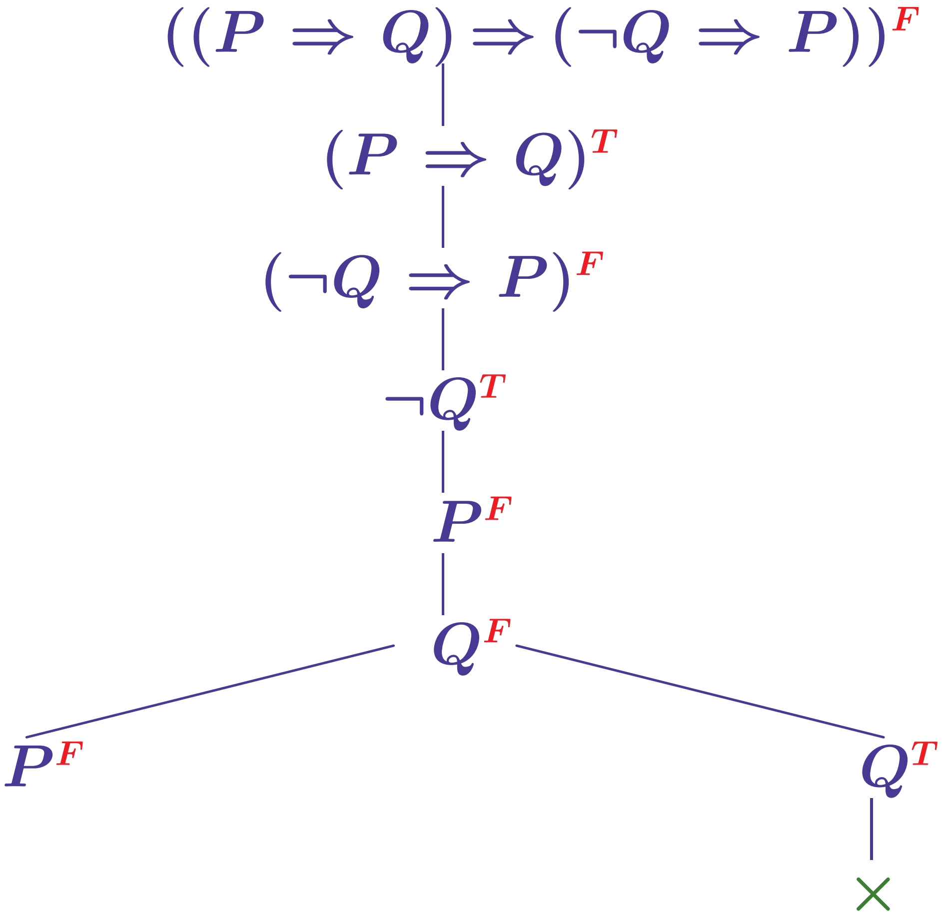
$Q^F$ | $Q^F$

$P^T$ | ×

×

**Alle Zweige widersprüchlich, Originalformel gültig**

# TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$



**Offener Zweig liefert Gegenbeispiel $P^F, Q^F$**

# AUSSAGENLOGISCHE TABLEAUXREGELN SCHEMATISIERT

- **Typ $\alpha$ (konjunktiv): Verlängerung des Beweiszweigs**
  - Wenn $\neg X^T$, dann $X^F$
  - Wenn $\neg X^F$, dann $X^T$
  - Wenn $X \wedge Y^T$, dann $X^T$ und $Y^T$
  - Wenn $X \vee Y^F$, dann $X^F$ und $Y^F$
  - Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann $X^T$ und $Y^F$

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}}$$

- **Typ $\beta$ (disjunktiv): Verzweigung des Beweises**
  - Wenn $X \wedge Y^F$, dann $X^F$ oder $Y^F$
  - Wenn $X \vee Y^T$, dann $X^T$ oder $Y^T$
  - Wenn $X \Rightarrow Y^T$, dann $X^F$ oder $Y^T$

$$\boxed{\begin{array}{c} \beta \\ \hline \beta_1 \mid \beta_2 \end{array}}$$

- **Teilformeln bestimmt durch Konnektiv und Polarität**

| $\alpha$ | $(X \wedge Y)^T$ | $(X \vee Y)^F$ | $(X \Rightarrow Y)^F$ | $\neg X^T$ | $\neg X^F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$<br>$\alpha_2$ | $X^T$<br>$Y^T$ | $X^F$<br>$Y^F$ | $X^T$<br>$Y^F$ | $X^F$<br>– | $X^T$<br>– |

| $\beta$ | $(X \wedge Y)^F$ | $(X \vee Y)^T$ | $(X \Rightarrow Y)^T$ |
|---|---|---|---|
| $\beta_1$<br>$\beta_2$ | $X^F$<br>$Y^F$ | $X^T$<br>$Y^T$ | $X^F$<br>$Y^T$ |

# PRÄDIKATENLOGISCHE TABLEAUXREGELN

- **Typ $\gamma$: Instantiierung einer Variablen**
  - Wenn $\forall x A^T$, dann $A[t/x]^T$ für beliebiges $t$
  - Wenn $\exists x A^F$, dann $A[t/x]^F$ für beliebiges $t$

$$\frac{\boldsymbol{\gamma}}{\boldsymbol{\gamma(t)}}$$

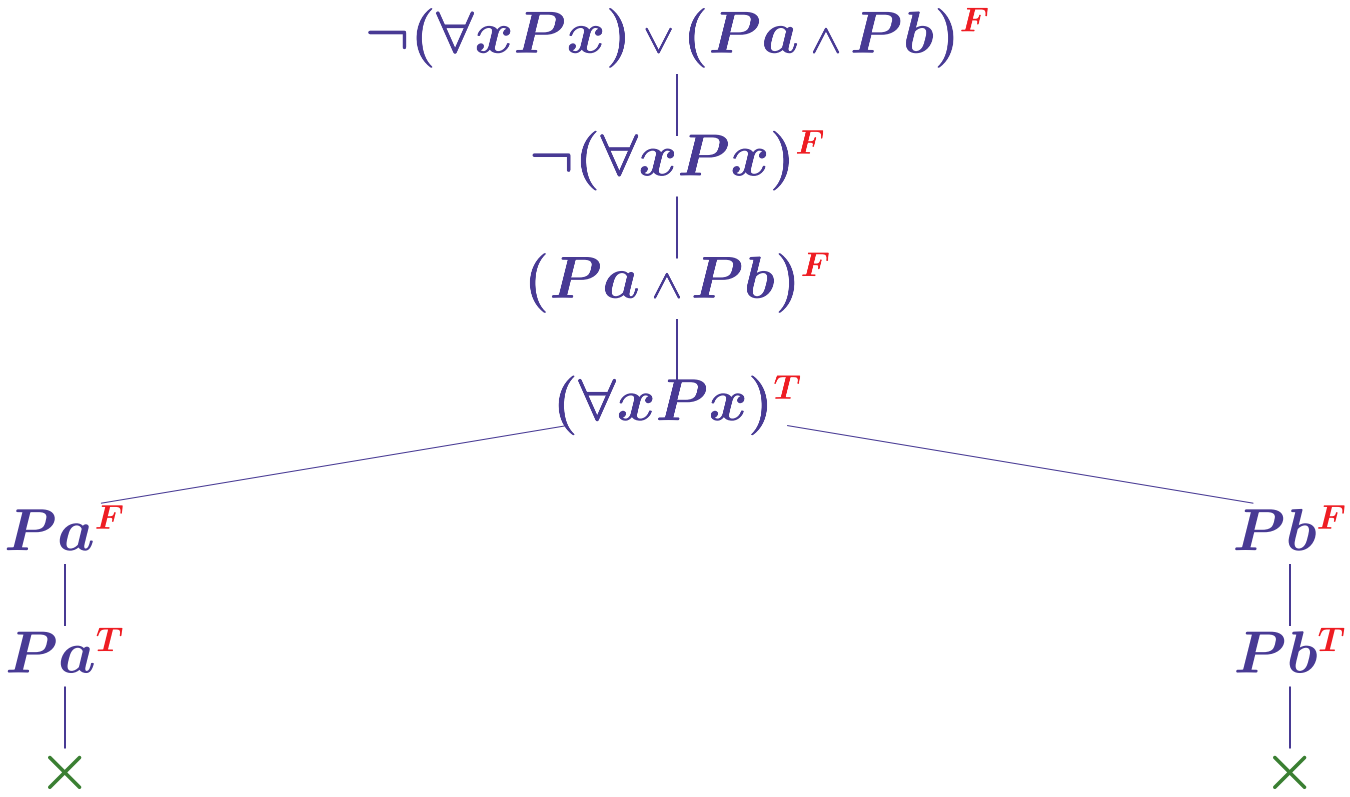
- **Typ $\delta$: Deklaration einer neuen Variablen**
  - Wenn $\forall x A^F$, dann $A[a/x]^F$ für ein gewisses, festes $a$
  - Wenn $\exists x A^T$, dann $A[a/x]^T$ für ein gewisses, festes $a$
  - Da $a$ unbekannt ist, muß eine neue Variable gewählt werden

$$\frac{\boldsymbol{\delta}}{\boldsymbol{\delta(a)}}$$

- **Teilformeln tabellarisch bestimmt**

| $\gamma$ | $\forall x A^T$ | $\exists x A^F$ | $\delta$ | $\forall x A^F$ | $\exists x A^T$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma(t)$ | $A[t/x]^T$ | $A[t/x]^F$ | $\delta(a)$ | $A[a/x]^F$ | $A[a/x]^T$ |

# TABLEAUXBEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$

$\neg(\forall x Px)^F$

$(Pa \wedge Pb)^F$

$(\forall x Px)^T$

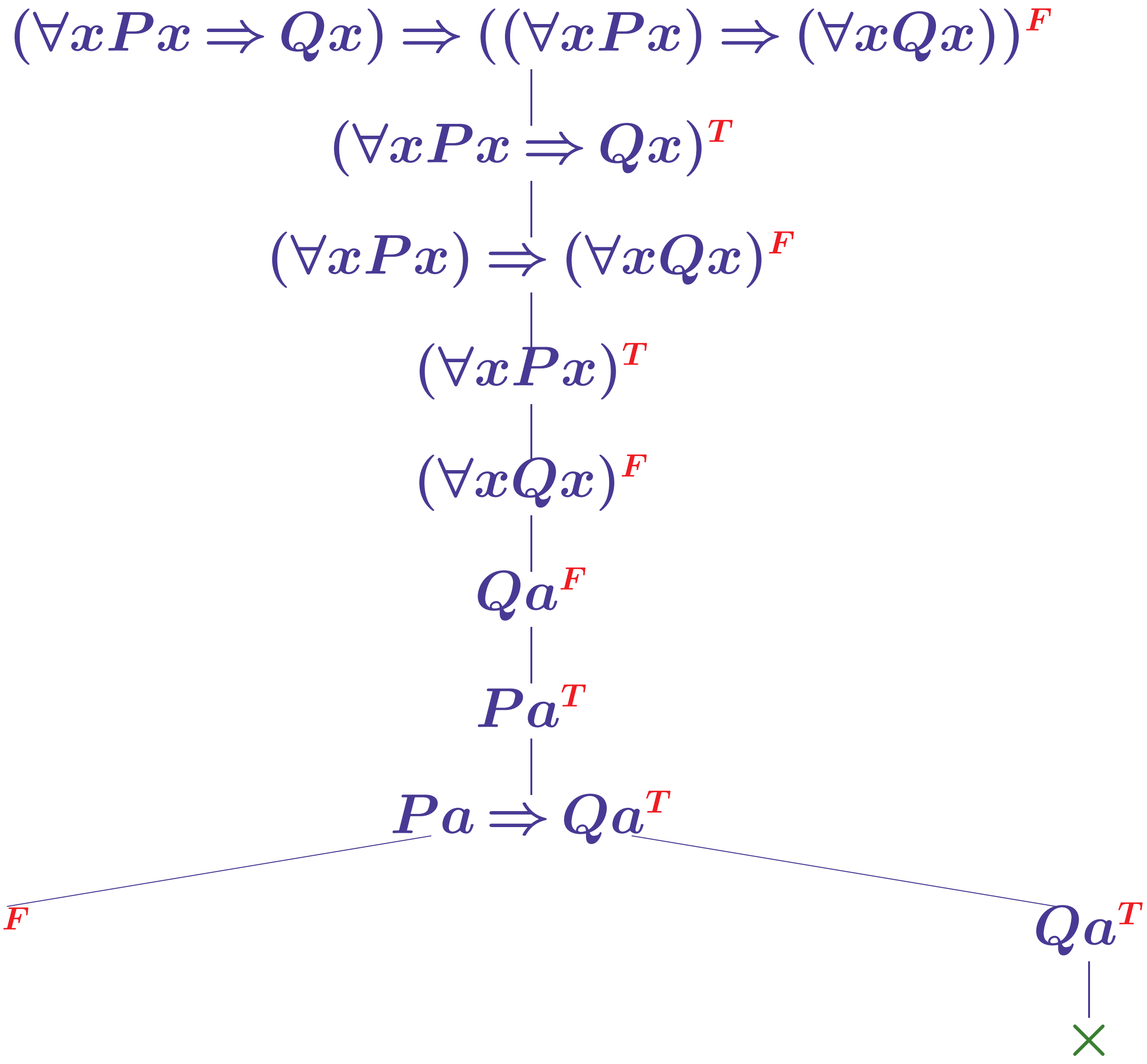
$Pa^F$ $\quad$ $Pb^F$

$Pa^T$ $\quad$ $Pb^T$

× $\quad$ ×

**Zwei verschiedene Instanzen derselben Formel**

# BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$

$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$

$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$

$(\forall x Px)^T$

$(\forall x Qx)^F$

$Qa^F$

$Pa^T$

$Pa \Rightarrow Qa^T$

$Pa^F$ $\times$

$Qa^T$ $\times$

**$\forall x Qx$ muß vor den $\gamma$-Knoten zerlegt werden**

# TABLEAUX PRÄZISIERT

- **Signierte Formel**
  - Formel $X$ mit Vorzeichen $T$ oder $F$, geschrieben als $X^{T}$ bzw. $X^{F}$
  - Interpretation: $\iota(X^{T}) = \iota(X)$, $\iota(X^{F}) = \iota(\neg X)$
  - $X^{T}$ und $X^{F}$ sind komplementär zueinander
- **Analytisches Tableau für signierte Formel $F$**
  - Binärer geordneter Baum $\mathcal{T}$ mit Wurzel $F$
  - Für jeden Knoten $y$ mit Nachfolger $z$ gibt es einen Vorfahren $x$ mit
    - · Ist $x$ vom Typ $\alpha$, so ist $z$ entweder $\alpha_1$ oder $\alpha_2$
    - · Ist $x$ vom Typ $\gamma$, so ist $z = \gamma(t)$ für einen Term $t$
    - · Ist $x$ vom Typ $\delta$, so ist $z = \delta(a)$ für eine neue Variable $a$.
  - Für jeden Knoten $y$ mit Nachfolgern $z_1$ und $z_2$ gibt es einen Vorfahren $x$ vom Typ $\beta$ mit $z_1 = \beta_1$ und $z_2 = \beta_2$
- **$\mathcal{T}_1$ direkte Erweiterung von $\mathcal{T}$**
  - $\mathcal{T}_1$ entsteht aus $\mathcal{T}$ durch Anwendung einer Regel auf einen Zweig $\vartheta$ von $\mathcal{T}$

# TABLEAUXBEWEISE

- **Zweig $\vartheta$=[$F_0$,$F_1$...,$F_n$] im Tableau**
  - Liste der (signierten) Formeln zwischen Wurzel $F_0$ und Blatt $F_n$
  - Interpretation: $\iota(\vartheta) = \begin{cases} \text{wahr} & \iota(F)\text{=wahr für alle } F \in \vartheta \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- **Geschlossenes Tableau $\mathcal{T}$**
  - Zweig $\vartheta$ ist geschlossen, wenn er ein komplementäres Formelpaar $Y^F$ $Y^T$ enthält
  - Geschlossene Zweige sind unerfüllbar
  - $\mathcal{T}$ ist geschlossen, wenn jeder Zweig geschlossen ist
- **Tableauxbeweis für Formel $X$**
  - Geschlossenes Tableau für $X^F$

# KORREKTHEIT VON TABLEAUXBEWEISEN

## Sind bewiesene Formeln semantisch gültig?

**Analysiere Interpretation signierter Formeln**

- $\iota(X^T) = \iota(X), \quad \iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- $\iota(\alpha)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$ gilt
- $\iota(\beta)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$ gilt
- $\iota(\gamma)$ gilt genau dann, wenn $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term $t$ gilt
- $\iota(\delta)$ gilt g.d.w.‘$\iota_a^u(\delta(a))$ für ein neues $a$ und ein $u \in \mathcal{U}$ gilt

  Wichtig: wenn $a$ in einer Formel $Y$ nicht vorkommt, dann ist $\iota_a^u(Y) = \iota(Y)$

**Klassifizierung vereinfacht Tableaux-Verfahren und Nachweis seiner Eigenschaften**

# NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: $X$ gültig, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für $\mathbf{X}^F$**

  $\hat{=}$ $X^F$ unerfüllbar, wenn $\mathcal{T}$ geschlossenes Tableaux für $X^F$

  $\hat{=}$ $X^F$ erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für $X^F$ offen

  $\hat{=}$ $X^F$ erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für $X^F$ einen erfüllbaren Zweig

- **Zeige durch strukturelle Induktion: $\mathcal{T}$ Tableaux für $F$,**

  **Ist $F$ erfüllbar, dann ist ein Zweig $\vartheta$ in $\mathcal{T}$ erfüllbar**

  Basisfall: Hat $\mathcal{T}$ nur einen Knoten $F$, dann wähle $\vartheta = [F]$

  Schrittfall: Sei $\mathcal{T}_1$ direkte Erweiterung von $\mathcal{T}$ mit Wurzel $F$ und $\iota(F)$=wahr

  Sei $\vartheta$ der Zweig in $\mathcal{T}$ mit $\iota(\vartheta)$=wahr

  1. Falls $\mathcal{T}_1$ nicht am Zweig $\vartheta$ erweitert, wähle $\vartheta_1$=$\vartheta$
  2. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig $\vartheta$ mit $\alpha_i$ erweitert, ist der zugehörige $\alpha$-Knoten auf $\vartheta$ und damit $\iota(\alpha_i)$=wahr. Wähle $\vartheta_1$=$\vartheta\circ[\alpha_i]$
  3. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig $\vartheta$ mit $\beta_1$ und $\beta_2$ erweitert, ist $\beta \in \vartheta$ damit $\iota(\beta_1)$=wahr oder $\iota(\beta_2)$=wahr. Wähle $\vartheta_1$=$\vartheta\circ[\beta_i]$ entsprechend.
  4. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig $\vartheta$ mit $\gamma(t)$ erweitert, ist $\gamma \in \vartheta$. Wähle $\vartheta_1$=$\vartheta\circ[\gamma(t)]$
  5. Falls $\mathcal{T}_1$ am Zweig $\vartheta$ mit $\delta(a)$ erweitert, ist $\delta \in \vartheta$, $a$ neu und damit $\iota_a^u(\delta(a))$=wahr für ein $u \in \mathcal{U}$. Wähle $\vartheta_1$=$\vartheta\circ[\delta(a)]$. Dann $\iota_a^u(\vartheta_1)$=wahr.

# VOLLSTÄNDIGKEIT

## $X$ gültig, dann hat $\mathbf{X}^{F}$ ein geschlossenes Tableau

- **Betrachte vollständige Tableaux**
  - Zweig $\vartheta$ ist eine Hintikka-Folge, wenn für alle $x \in \vartheta$ gilt
    - · Das Komplement $\bar{x}$ von $x$ ist nicht in $\vartheta$ (H0)
    - · Ist $x$ vom Typ $\alpha$, so ist $\alpha_1 \in \vartheta$ und $\alpha_2 \in \vartheta$ (H1)
    - · Ist $x$ vom Typ $\beta$, so ist $\beta_1 \in \vartheta$ oder $\beta_2 \in \vartheta$ (H2)
    - · Ist $x$ vom Typ $\gamma$, so ist $\gamma(t) \in \vartheta$ für jeden Term $t$ (H3)
    - · Ist $x$ vom Typ $\delta$, so ist $\delta(a) \in \vartheta$ für eine Variable $a$ (H4)
  - Zweig $\vartheta$ ist vollständig, wenn $\vartheta$ geschlossen oder eine Hintikka-Folge

    Das Tableauxverfahren kann $\vartheta$ nicht mehr um neue Formeln erweitern
  - $\mathcal{T}$ ist vollständig, wenn jeder Zweig von $\mathcal{T}$ vollständig ist
- **Indirektes Argument auf Ebene der Zweige**

  1. **Für jede Formel $X$ hat $\mathbf{X}^{F}$ ein vollständiges Tableau**
  2. Ist $X$ gültig, dann ist jedes vollständige Tableau für $X^{F}$ geschlossen

     $\Leftarrow$ $X^{F}$ erfüllbar, falls $X^{F}$ vollständiges und offenes Tableau hat

     $\Leftarrow$ **$\vartheta$ vollständiger offener Tableauzweig, dann $\vartheta$ erfüllbar**

# NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT I

## **Für jede Formel $X$ hat $\mathbf{X}^{F}$ ein vollständiges Tableau**

- **Beschreibe systematische Beweismethode**
  - Kritische Bedingung ist Axiom (H3): kann $\mathcal{T}$ nicht geschlossen werden, dann müssen *alle* Instanzen von $\gamma$-Formeln müssen erzeugt werden

    Beginne mit $\mathcal{T} = \mathrm{X}^{F}$ und erweitere $\mathcal{T}$ rekursiv wie folgt
    - Ist $\mathcal{T}$ geschlossen, dann ist $X$ gültig und die Prozedur hält
    - Ansonsten wähle einen noch nicht benutzten Knoten $Y$ minimaler Tiefe und erweitere jeden offenen Zweig $\vartheta$ mit $Y \in \vartheta$ wie folgt
      - · Ist $Y$ vom Typ $\alpha$, dann erweitere $\vartheta$ zu $\vartheta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$
      - · Ist $Y$ vom Typ $\beta$, dann verzweige $\vartheta$ in $\vartheta \cup \{\beta_1\}$ und $\vartheta \cup \{\beta_2\}$
      - · Ist $Y$ vom Typ $\gamma$, dann erweitere $\vartheta$ zu $\vartheta \cup \{\gamma(t), \gamma\}$, wobei $t$ der "erste" Term ist, der noch nicht in $\vartheta$ vorkommt
      - · Ist $Y$ vom Typ $\delta$, dann erweitere $\vartheta$ zu $\vartheta \cup \{\delta(a)\}$, wobei $a$ die erste Variable ist, die nicht in $\vartheta$ vorkommt

  Vollständigkeit: $\gamma$-Formeln werden kopiert und immer wieder neu instantiiert

  Verfahren erzeugt unendliches Tableau, wenn $X$ nicht gültig ist

  Verfahren ist sehr ineffizient, nur für theoretische Betrachtungen relevant

# NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

## $\vartheta$ vollständig und offen $\Rightarrow$ $\vartheta$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation $\iota$**
  - Ist $\vartheta$ vollständig und offen, dann ist $\vartheta$ eine Hintikka-Folge
  - Wähle $\mathcal{U}$ als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
  - Definiere $\iota(P)(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } P(t_1, ..., t_n)^T \in \vartheta \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
  - $\iota$ ist wohldefiniert wegen Axiom H0
- **Zeige $\iota(F)$=wahr für alle $F \in \vartheta$**

  Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel $F$

  Basisfall: $F$ atomar, dann $\iota(F)$=wahr per Konstruktion

  Schrittfall: Es gelte $\iota(X)$=wahr für alle Teilformeln $X$ von $F$ mit $X \in \vartheta$
  - Ist $F$ vom Typ $\alpha$, so ist $\alpha_1 \in \vartheta$ und $\alpha_2 \in \vartheta$ wegen Axiom H1

    Nach Induktionsannahme ist $\iota(\alpha_1)$=$\iota(\alpha_2)$=wahr und damit $\iota(F)$=wahr
  - Für $F$ vom Typ $\beta$ folgt $\iota(\beta_1)$=wahr oder $\iota(\beta_2)$=wahr, also $\iota(F)$=wahr
  - Für $F$ vom Typ $\gamma$ folgt $\iota(\gamma(t))$=wahr für jeden Term $t$, also $\iota(F)$=wahr
  - Für $x$ vom Typ $\delta$ folgt $\iota(\delta(a))$=wahr für eine Variable $a$, also $\iota(F)$=wahr

# VARIANTEN VON TABLEAUXBEWEISEN

- **Atomar geschlossene Tableaux**
  - $\mathcal{T}$ atomar geschlossen, wenn jeder Zweig ein komplementäres Paar atomarer Formeln enthält
  - Ist $X$ gültig, dann gibt es ein atomar geschlossenes Tableau für $X^F$
  - Es reicht, atomare Formeln (Literale) auf Komplementarität zu prüfen
- **Block Tableaux**
  - Lokale Sicht: Knoten im Beweis enthalten alle unverarbeiteten Formeln
  - Modifizierte Beweisregeln verarbeiten Menge von signierten Formeln

$$\frac{S,\alpha}{S,\alpha_1,\alpha_2} \qquad \frac{S,\beta}{S,\beta_1 \mid S,\beta_2} \qquad \frac{S,\gamma}{S,\gamma,\gamma(t)} \qquad \frac{S,\delta}{S,\delta(a)} \qquad \frac{S,X^T,X^F}{\times}$$

  - Block Tableaux können analytische Tableaux simulieren und umgekehrt
  - Block Tableaux sind isomorph zu analytischen Sequenzenbeweisen

↦ **Der Sequenzenkalkül ist korrekt und vollständig**

# BLOCK TABLEAUX REGELN VS. SEQUENZENREGELN

| $T$ | $F$ | $-L$ | $-R$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{S, A \wedge B^T}{S, A^T,\ B^T}$ | $\frac{S, A \wedge B^F}{S, A^F \mid S, B^F}$ | $\frac{\Gamma,\ A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma,\ A,\ B \vdash \Phi}$ | $\frac{\Gamma \vdash \Phi,\ A \wedge B}{\Gamma \vdash \Phi,\ A \mid \Gamma \vdash \Phi,\ B}$ |
| $\frac{S, A \vee B^T}{S, A^T \mid S, B^T}$ | $\frac{S, A \vee B^F}{S, A^F, B^F}$ | $\frac{\Gamma,\ A \vee B \vdash \Phi}{\Gamma,\ A \vdash \Phi \mid \Gamma,\ B \vdash \Phi}$ | $\frac{\Gamma \vdash \Phi,\ A \vee B}{\Gamma \vdash \Phi,\ A, B}$ |
| $\frac{S, A \Rightarrow B^T}{S, A^F \mid S, B^T}$ | $\frac{S, A \Rightarrow B^F}{S, A^T, B^F}$ | $\frac{\Gamma,\ A \Rightarrow B \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi,\ A \mid \Gamma,\ B \vdash \Phi}$ | $\frac{\Gamma \vdash \Phi,\ A \Rightarrow B}{\Gamma,\ A \vdash \Phi,\ B}$ |
| $\frac{S, \neg A^T}{S, A^F}$ | $\frac{S, \neg A^F}{S, A^T}$ | $\frac{\Gamma,\ \neg A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi,\ A}$ | $\frac{\Gamma \vdash \Phi,\ \neg A}{\Gamma,\ A \vdash \Phi}$ |
| $\frac{S, \forall x A^T}{S, A[t/x]^T}$ | $\frac{S, \forall x A^F}{S, A[a/x]^F}$ | $\frac{\Gamma,\ \forall x A \vdash \Phi}{\Gamma,\ A[t/x] \vdash \Phi}$ | $\frac{\Gamma \vdash \Phi,\ \forall x A}{\Gamma \vdash \Phi,\ A[a/x]}$ |
| $\frac{S, \exists x A^T}{S, A[a/x]^T}$ | $\frac{S, \exists x A^F}{S, A[t/x]^F}$ | $\frac{\Gamma,\ \exists x A \vdash \Phi}{\Gamma,\ A[a/x] \vdash \Phi}$ | $\frac{\Gamma \vdash \Phi,\ \exists x A}{\Gamma \vdash \Phi,\ A[t/x]}$ |
| $\frac{S, X^T, X^F}{\times}$ | | $\frac{\Gamma,\ X \vdash \Phi,\ X}{\times}$ | |

# Die Analogie gilt auch für Refinement Logik

| $T$ | $F$ | $-L$ | $-R$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{S, A \wedge B^T}{S, A^T, B^T}$ | $\frac{S, A \wedge B^F}{S, A^F \mid S, B^F}$ | $\frac{H,\ A \wedge B \vdash C}{H,\ A,\ B \vdash C}$ | $\frac{H \vdash A \wedge B}{H \vdash A \mid H \vdash B}$ |
| $\frac{S, A \vee B^T}{S, A^T \mid S, B^T}$ | $\frac{S, A \vee B^F}{S, A^F, B^F}$ | $\frac{H,\ A \vee B \vdash C}{H, A \vdash C \mid H, B \vdash C}$ | $\frac{H \vdash A \vee B\ *}{H \vdash A\ \mid\mid\mid\ H \vdash B}$ |
| $\frac{S, A \Rightarrow B^T}{S, A^F \mid S, B^T}$ | $\frac{S, A \Rightarrow B^F}{S, A^T, B^F}$ | $\frac{H,\ A \Rightarrow B \vdash C\ *}{H \vdash A \mid H, B \vdash C}$ | $\frac{H \vdash A \Rightarrow B}{H, A \vdash B}$ |
| $\frac{S, \neg A^T}{S, A^F}$ | $\frac{S, \neg A^F}{S, A^T}$ | $\frac{H,\ \neg A \vdash C\ *}{H \vdash A}$ | $\frac{H \vdash \neg A}{H,\ A \vdash \mathsf{ff}}$ |
| $\frac{S, \forall x A^T}{S, A[t/x]^T}$ | $\frac{S, \forall x A^F}{S, A[a/x]^F}$ | $\frac{H,\ \forall x A \vdash C}{H,\ A[t/x] \vdash C}$ | $\frac{H \vdash \forall x A}{H \vdash A[a/x]}$ |
| $\frac{S, \exists x A^T}{S, A[a/x]^T}$ | $\frac{S, \exists x A^F}{S, A[t/x]^F}$ | $\frac{H,\ \exists x A \vdash C}{H,\ A[a/x] \vdash C}$ | $\frac{H \vdash \exists x A}{H \vdash A[t/x]}$ |
| $\frac{S, X^T, X^F}{\times}$ | | $\frac{H,\ X \vdash X}{\times}$ | $\frac{H \vdash X \vee \neg X\ *}{\times}$ |

* *Bedingung, nur eine einzige Konklusion zu verwenden führt zu geringfügigen Abweichungen und* `magic` *Regel*

# SEQUENZENKALKÜL VS. BLOCK TABLEAUX

- **Formal ineinander übersetzbar**
  - Block Tableaux verwalten nur eine Menge von (signierten) Formeln
  - Antezedentformel $X$ wird zu Vorzeichen $T$
  - Sukzedentformel $X$ wird zu Vorzeichen $F$
  - Logische Regeln werden identisch
  - Strukturelle Regeln werden durch Verarbeitung von Mengen erfaßt

- **Grundlegende Ideen sehr verschieden**

| | Tableaux – indirekter Beweis | Sequenzen – direkter Beweis |
|---|---|---|
| Ziel | $X^F$: Suche Widerlegung für $X$ | $\vdash X$: Suche Beweis für $X$ |
| $\alpha$-Schritt | Widerlegung braucht $\alpha_1$ *und* $\alpha_2$ | Beweis muß $\alpha_1$ *oder* $\alpha_2$ zeigen |
| $\beta$-Schritt | Widerlegung braucht $\beta_1$ *oder* $\beta_2$ | Beweis muß $\beta_1$ *und* $\beta_2$ zeigen |
| Abschluß | Keine Widerlegung möglich | (Partieller) Beweis erfolgreich |
| Offenes Blatt | Gegenbeispiel gefunden | Kein Beweis möglich |

# AUTOMATISCHES BEWEISEN MIT TABLEAUX

- **Systematische Prozedur ist unpraktikabel**
  - Auswahl zu zerlegender Formeln mit Breitensuche
  - $\gamma$-Formeln werden “der Reihe nach” instantiiert
  - Extrem lange Beweise auch für kleine Formeln
  - Menschen gehen erheblich zielorienterter / effizienter vor
- **Viele Schritte sind schematisch**
  - Ziel der Regelanwendungen ist Erzeugung komplementärer Formelpaare
  - Identifizierung komplementärer Formelteile bestimmt, welche Teilformeln wann zerlegt werden und mit welchen Termen $\gamma$-Formeln instantiiert werden
  - Da auf jede Formel nur eine Regel anwendbar ist, liegen alle Beweisschritte fest, sobald komplementäre Formelteile und Substitutionen bekannt sind
  - Bestimmung dieser Information ist das Ziel von Matrixmethoden
- **Alternativ: Analytische Tableaux mit freien Variablen**
  - Formeln werden bis zu Literalen zerlegt
  - $\gamma$-Formeln werden mit freien Variablen instantiiert
  - Substitution für freie Variablen wird im Komplementaritätstest bestimmt