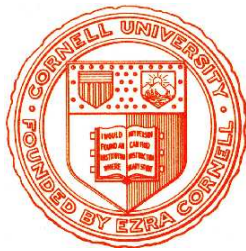


Inferenzmethoden

Einheit 3

Verdichtung des logischen Schließens II

Matrix-Beweise



1. Verdichtung von Tableauxbeweisen
2. Der Matrixkalkül
3. Zweidimensionale Repräsentation

- **Bestimme relevante Beweisinformation**

- Welche komplementären Teilformeln schließen einen Beweisweig ab?
- Welche Terme sind für γ -Variablen einzusetzen?
- In welcher Reihenfolge sind Beweisregeln anzuwenden?

Information reicht, um Tableauxbeweis ohne Suche zu rekonstruieren

- **Kompakte Beweisrepräsentation**

- Nur atomare Teilformeln (**Literale**) sind beweisrelevant
- Beweisweige repräsentierbar durch “**Pfade**” im Formelbaum
- Beweisführung im Formelbaum vermeidet Erzeugung von Formelkopien

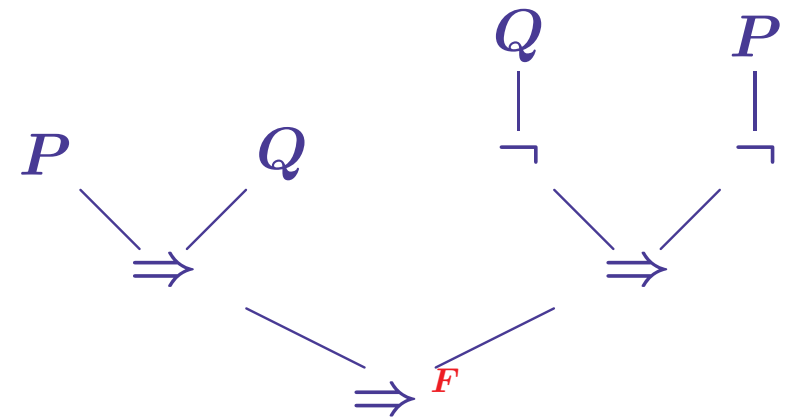
- **Zielorientiertes Vorgehen**

- Verfolge **Konnektionen** bei Suche nach komplementären Literalen
- Gezielte Instantiierung von Quantoren durch **Unifikation**
- **Reduktionsordnung** bestimmt durch Baumordnung und Substitution

MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis

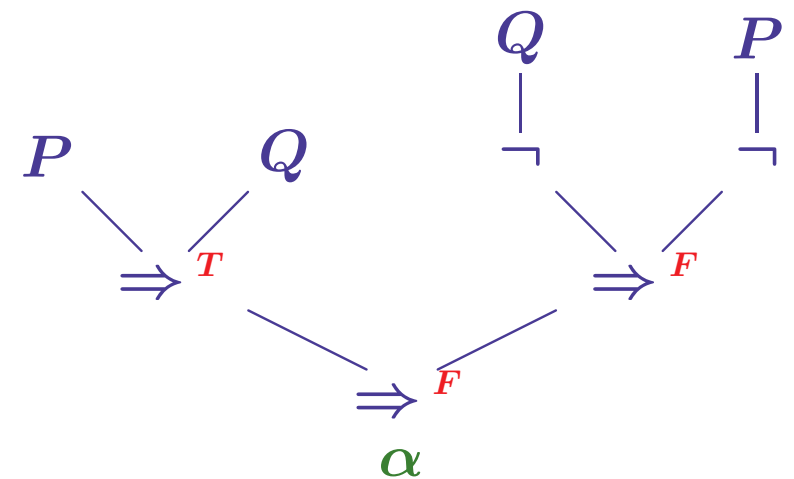
$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$



MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

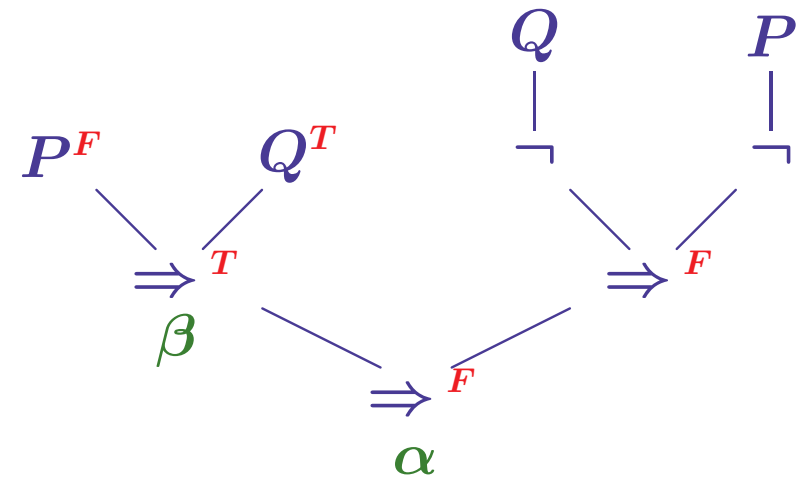
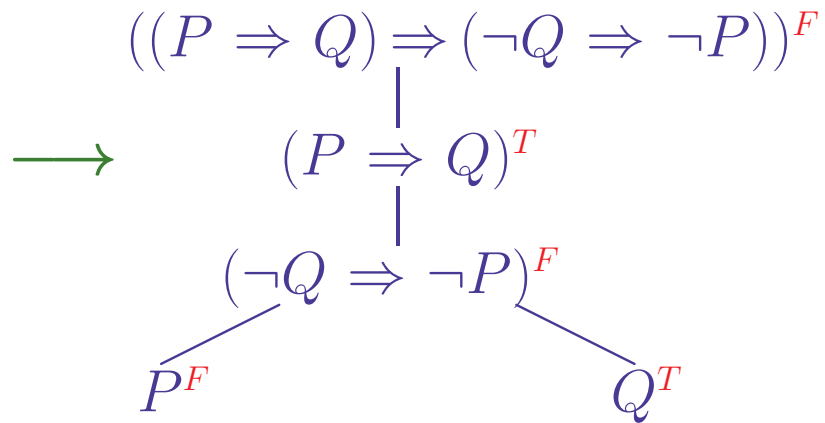
Tableauxbeweis

$$\begin{array}{c} \longrightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F \\ | \\ (P \Rightarrow Q)^T \\ | \\ (\neg Q \Rightarrow \neg P)^F \end{array}$$



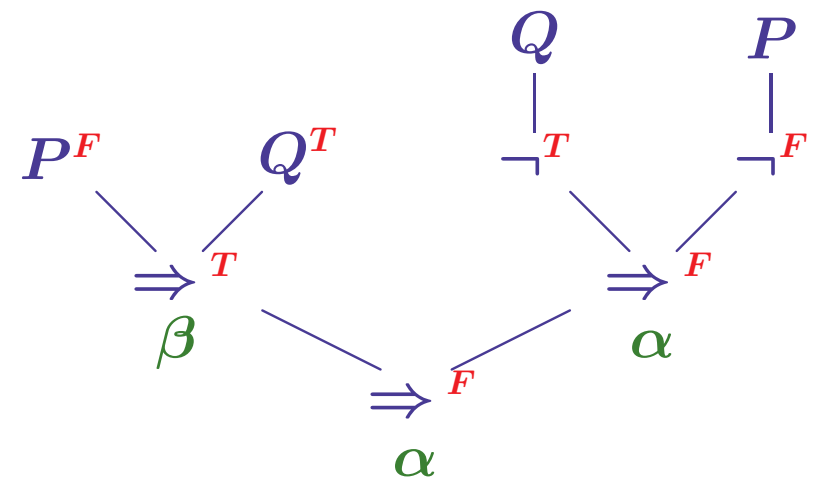
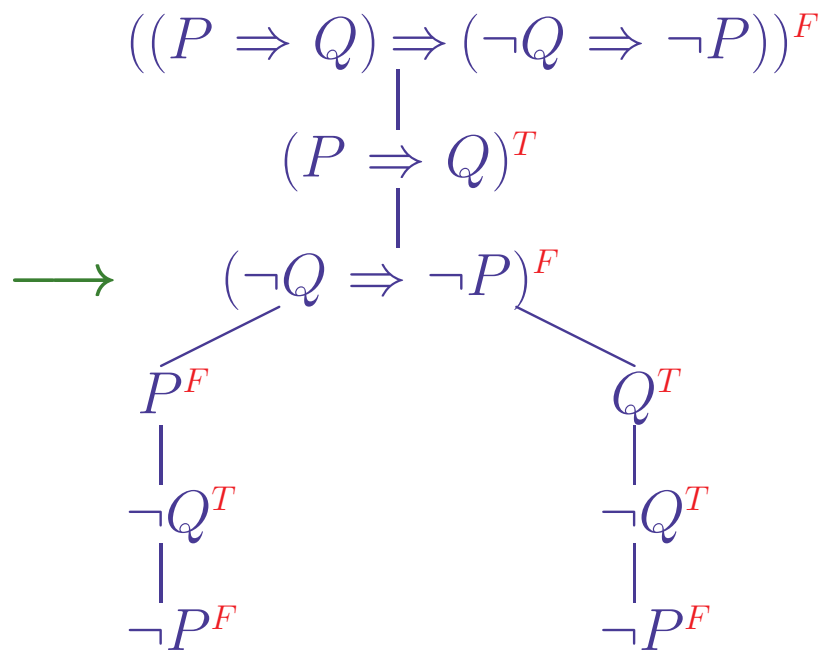
MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis



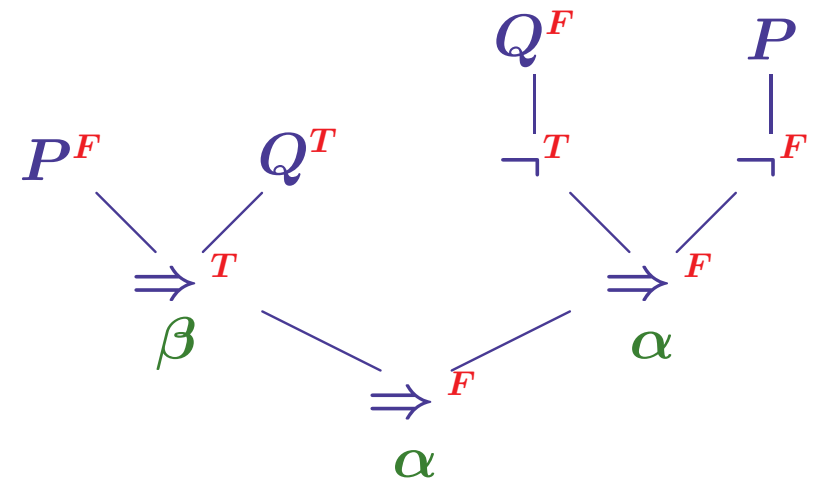
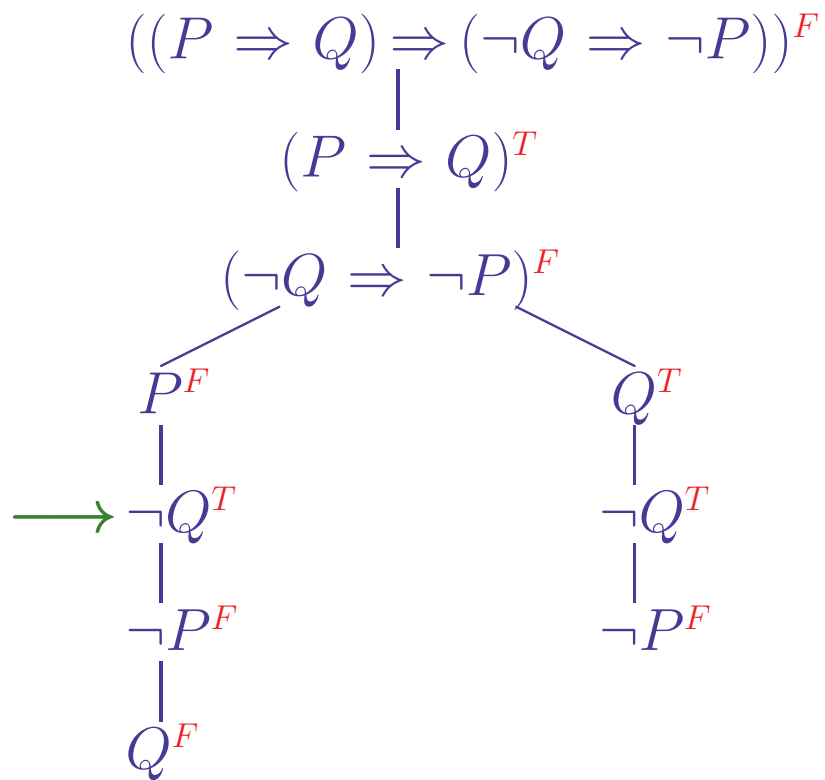
MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis



MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis



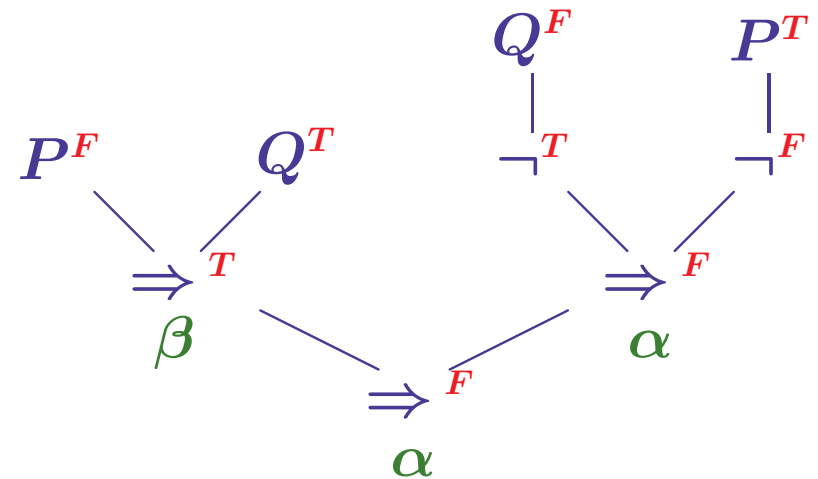
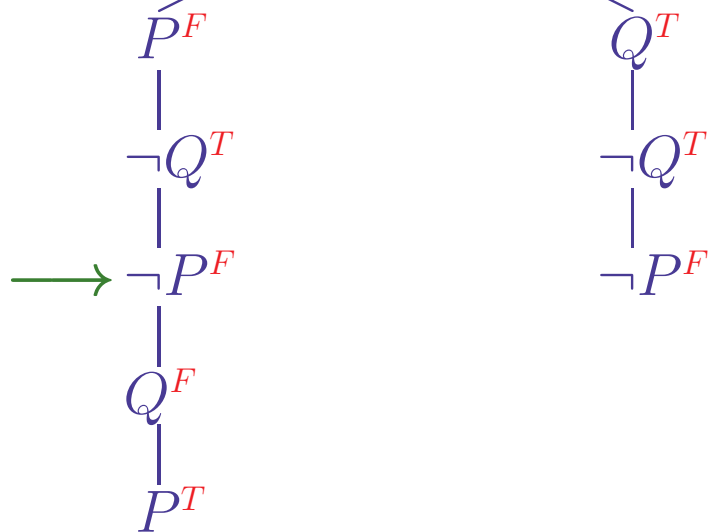
MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$

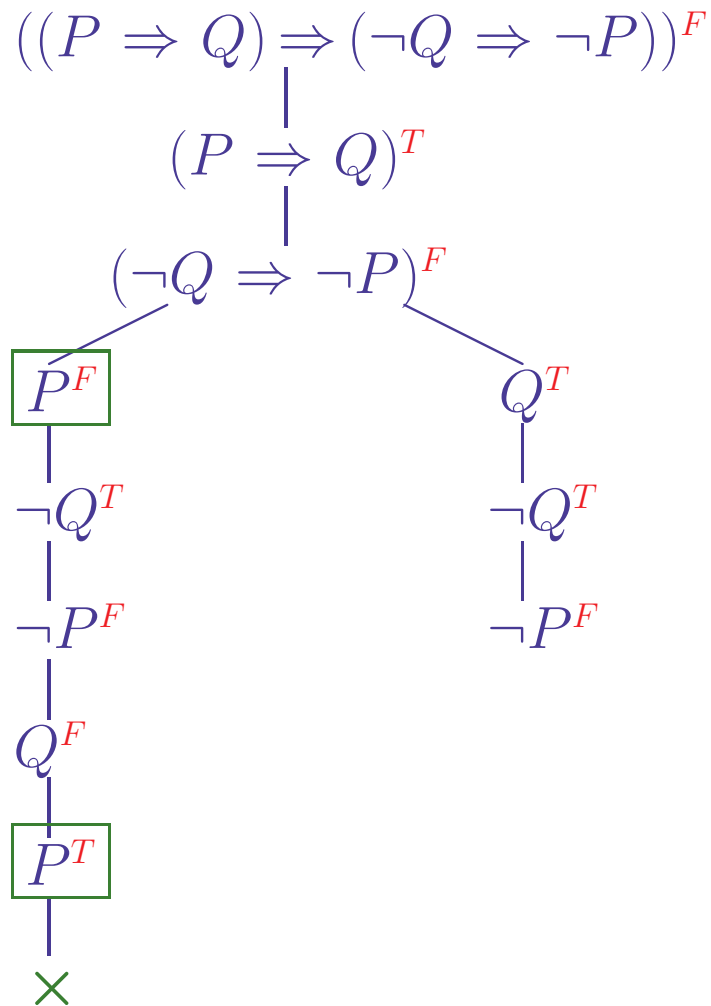
$$(P \Rightarrow Q)^T$$

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P)^F$$

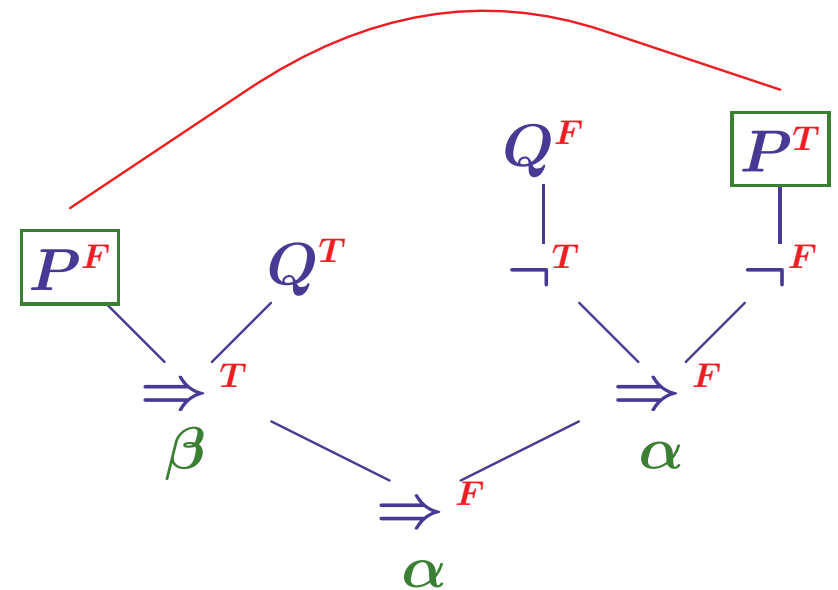


MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis



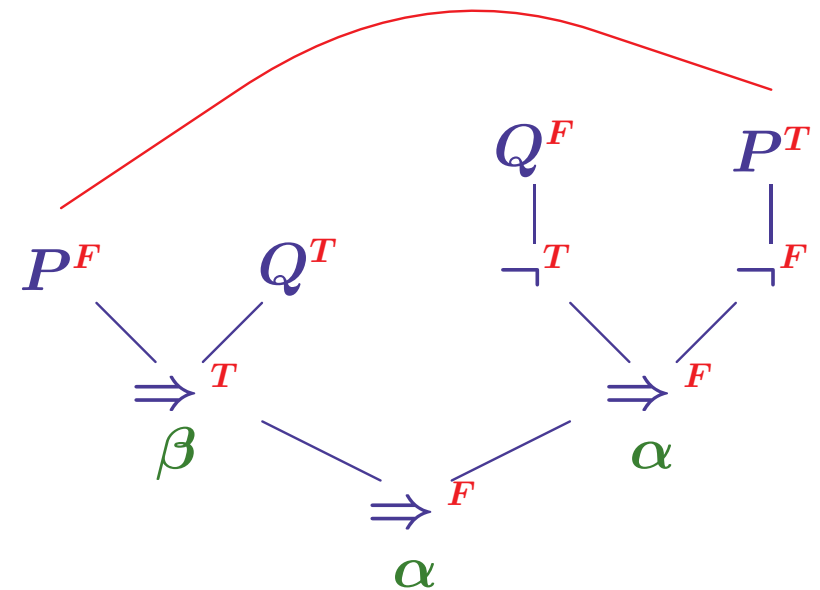
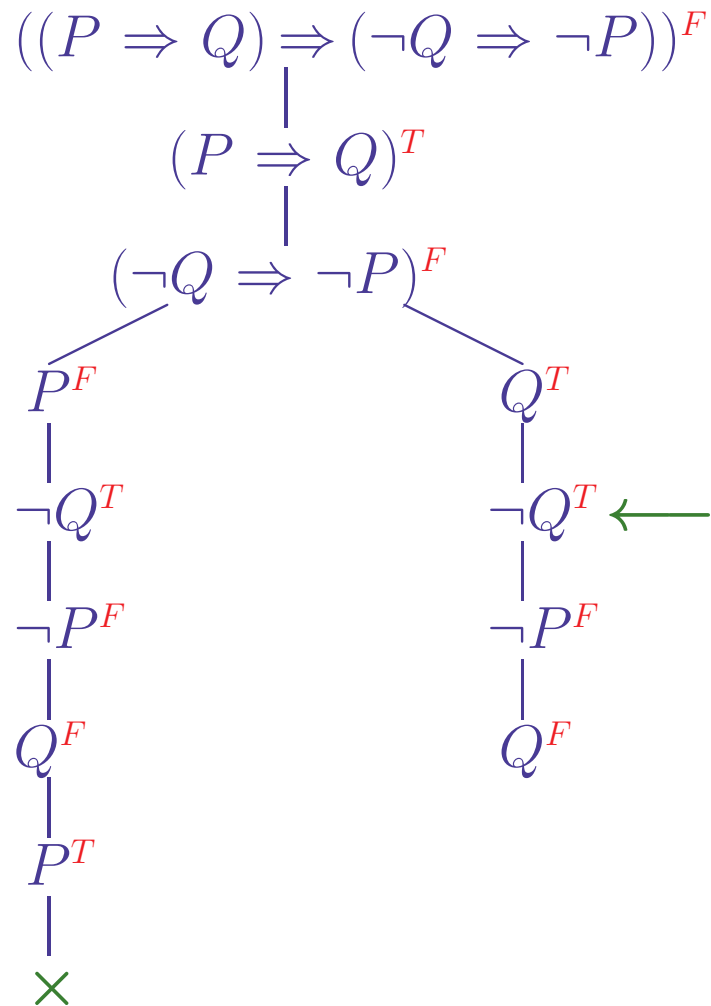
Zweig geschlossen



**Komplementäre Literale
sind in α -Beziehung**

MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis

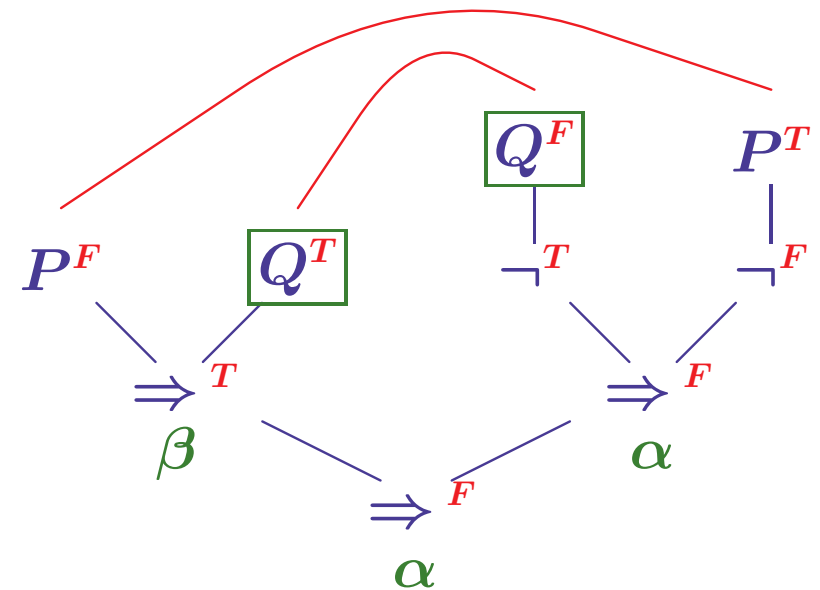
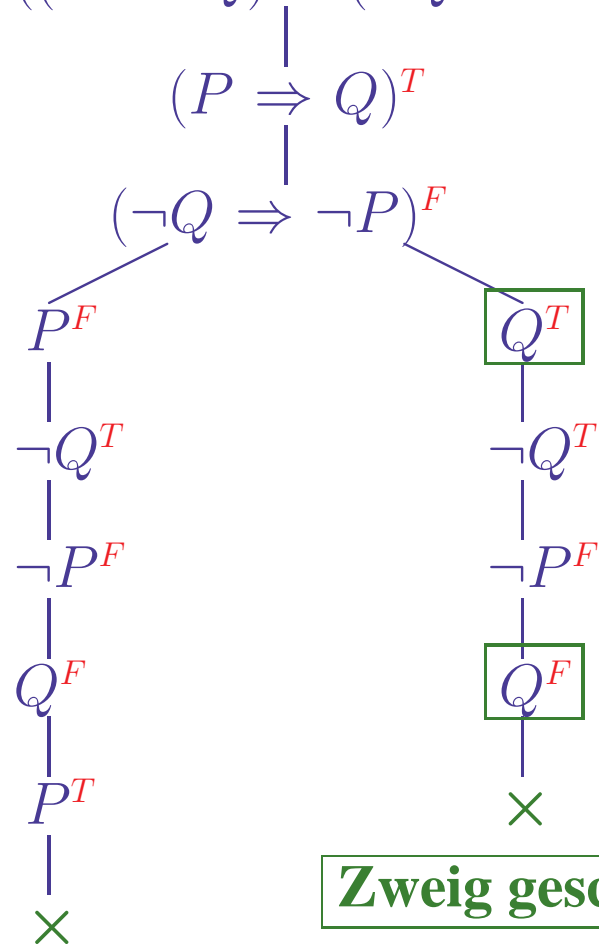


**Zweiter Beweisweig
(β) zu betrachten**

MATRIXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

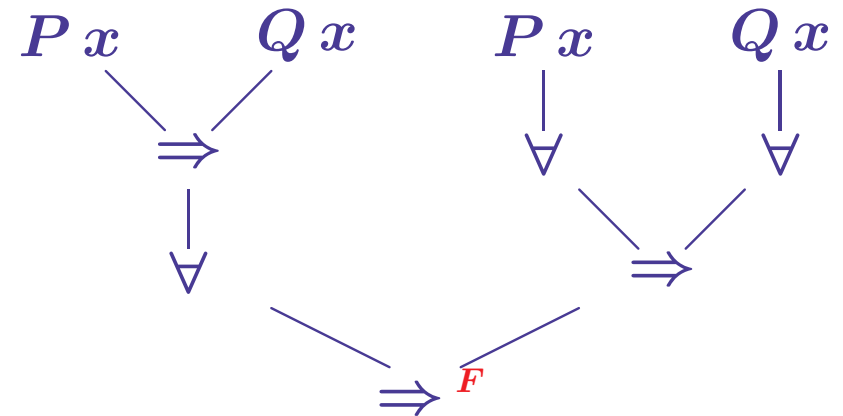
Tableauxbeweis

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$



BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

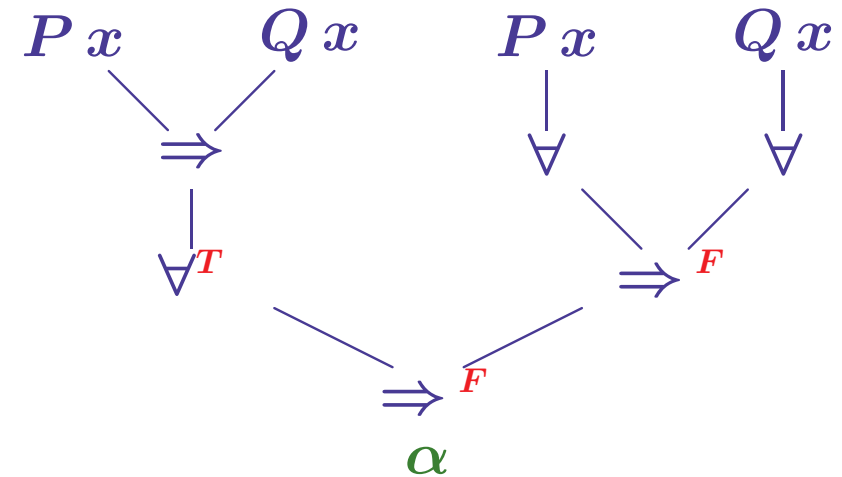


BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

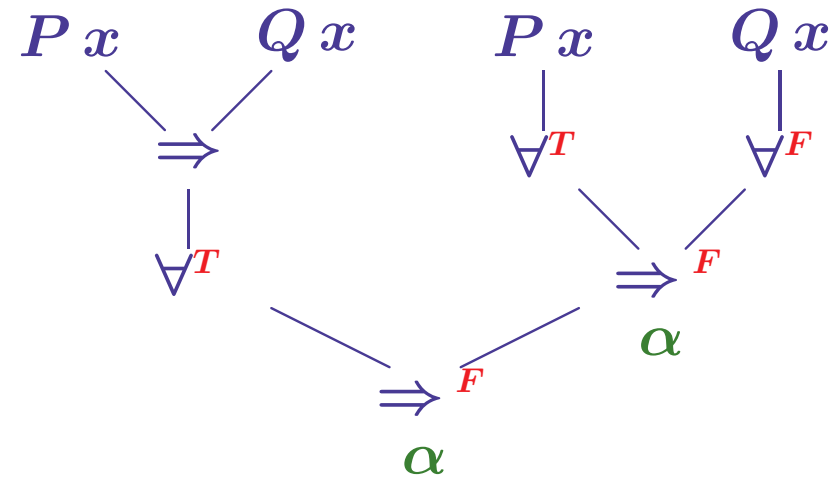
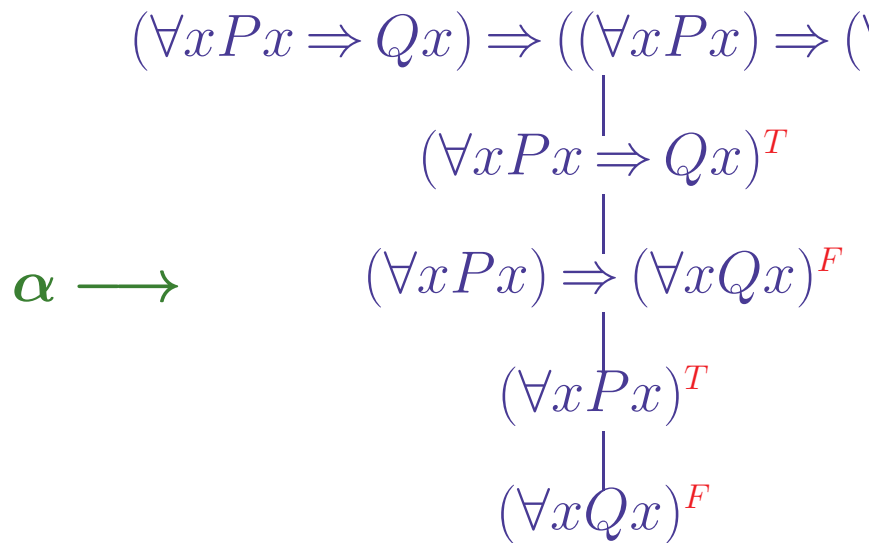
$$\alpha \longrightarrow (\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$



BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

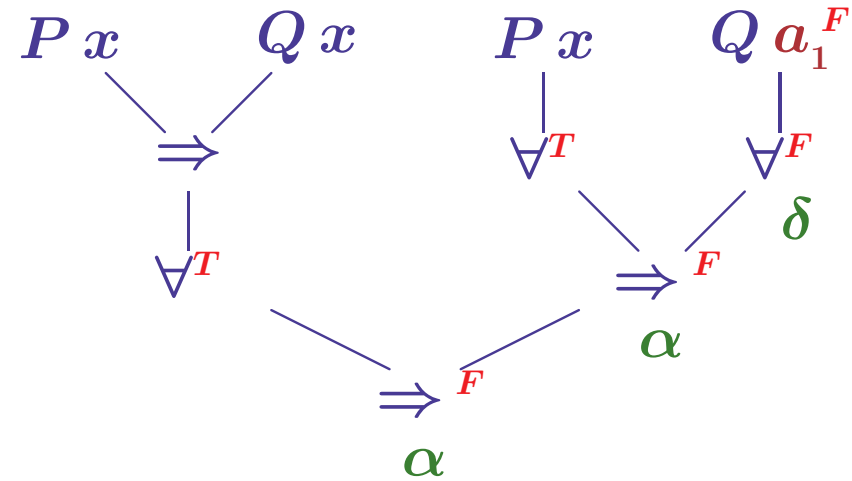
$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

$\delta(a) \longrightarrow$



x wird durch neue Variable ersetzt (a_1)

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

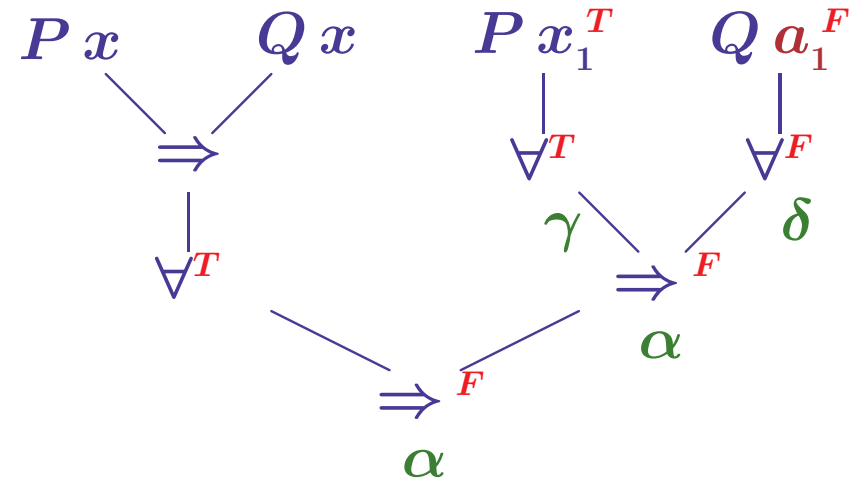
$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

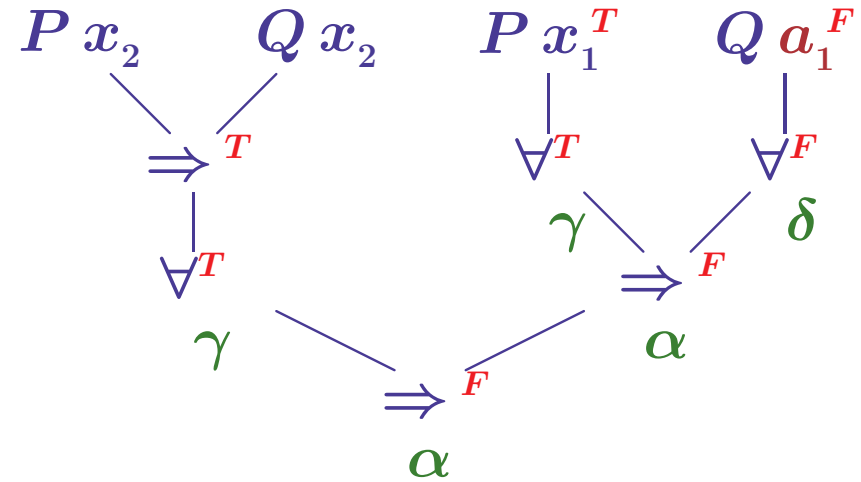
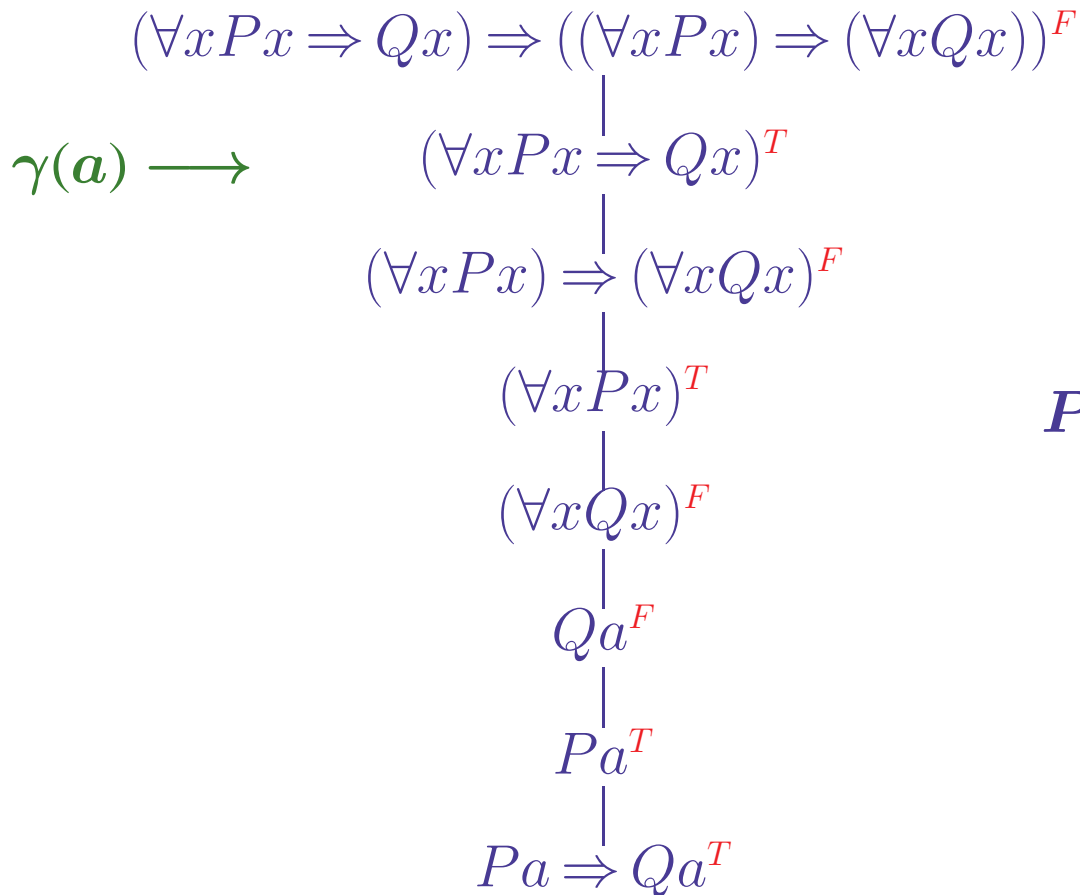
$$Pa^T$$

$\gamma(a) \longrightarrow$



**Instantiierung von x
wird verschoben (x_1)**

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



Instantiierung von x wird verschoben (x_2)

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

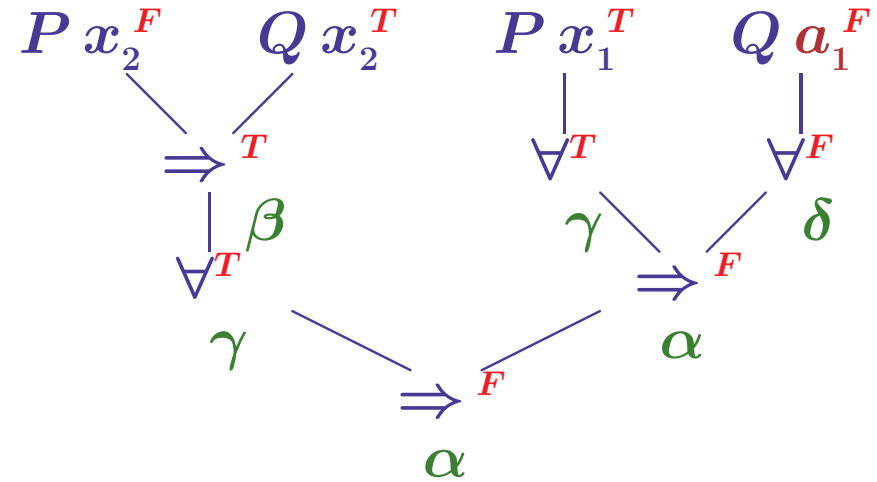
$$Pa^T$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$Pa^F$$

$$Qa^T$$

$\beta \longrightarrow$



BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

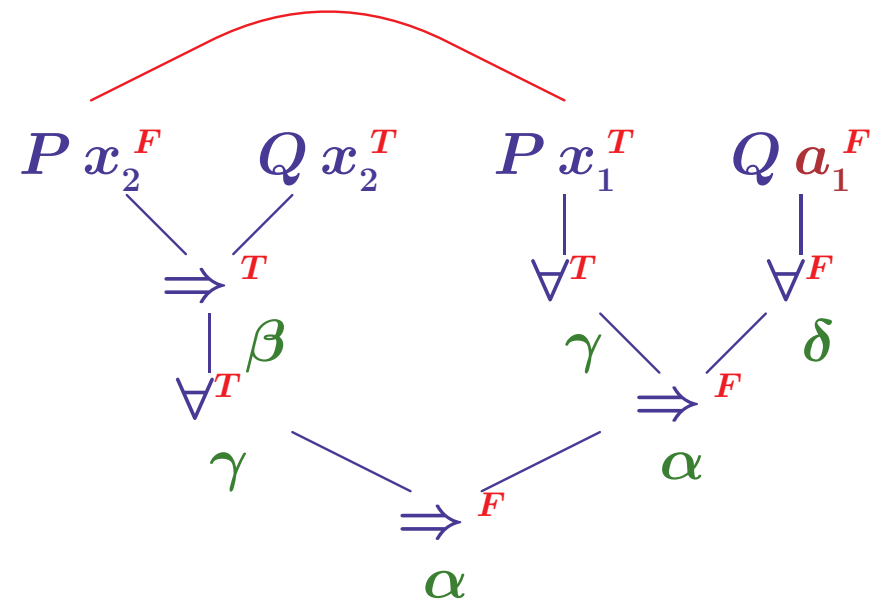
$$Pa^T$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$Pa^F$$

$$Qa^T$$

×



x_1 muß gleich x_2 sein

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

$$Pa^T$$

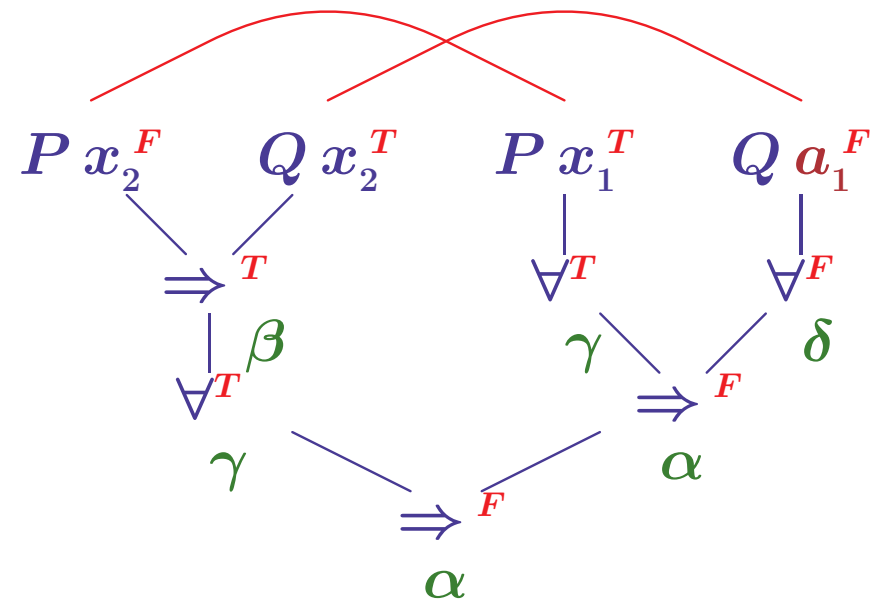
$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$Pa^F$$

×

$$Qa^T$$

×



x_1 muß gleich x_2 sein
 x_2 muß gleich a_1 sein
 Instantiiere $x_1 := x_2 := a_1$

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

$$Pa^T$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

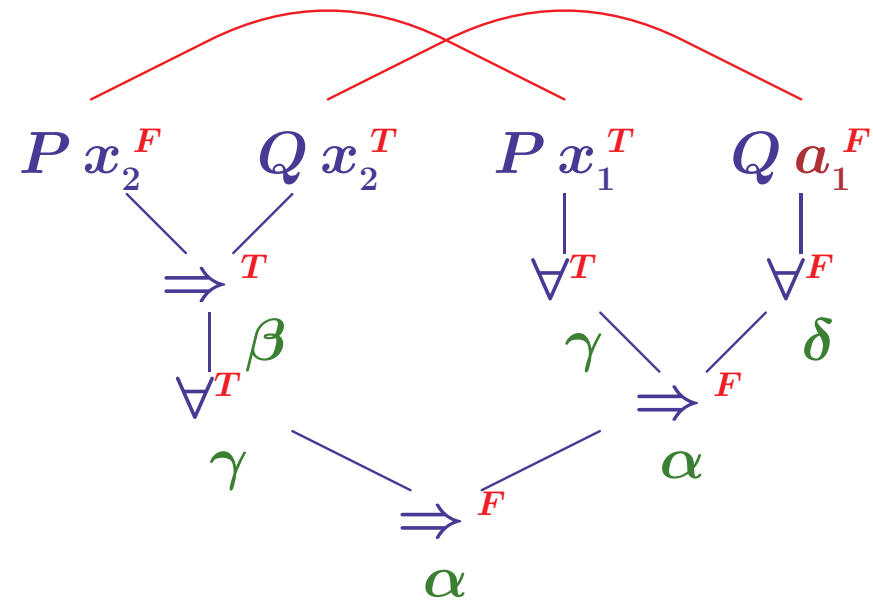
$$Pa^F$$

×

$$Qa^T$$

×

$\delta(a): \forall x Qx$ muß vor den γ -Knoten zerlegt werden

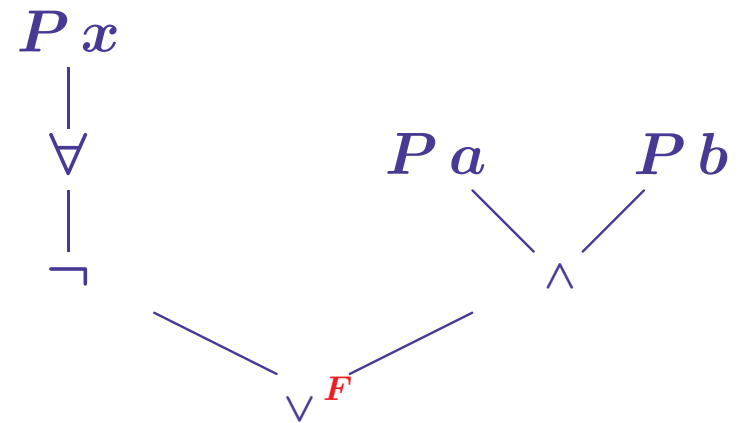


x_1 muß gleich x_2 sein
 x_2 muß gleich a_1 sein
 Instantiiere $x_1 := x_2 := a_1$

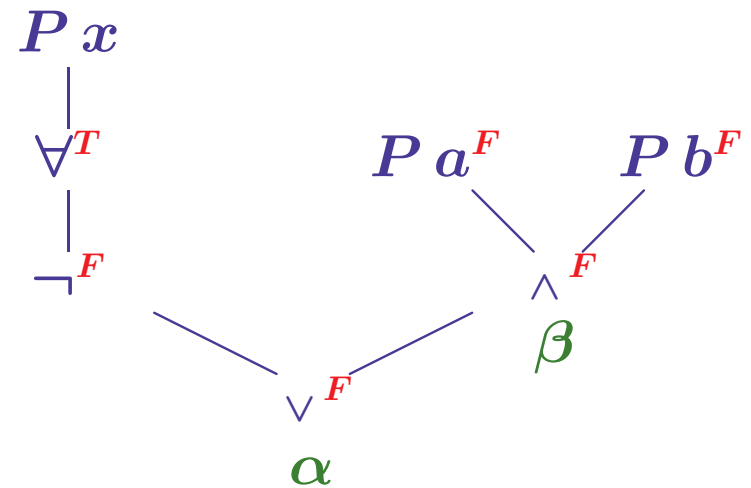
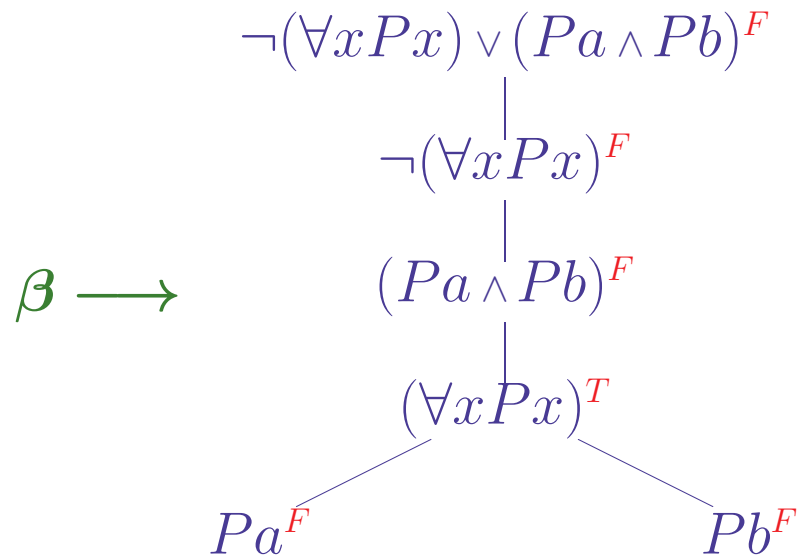
a_1 muß vor x_1/x_2
 freigesetzt werden

BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

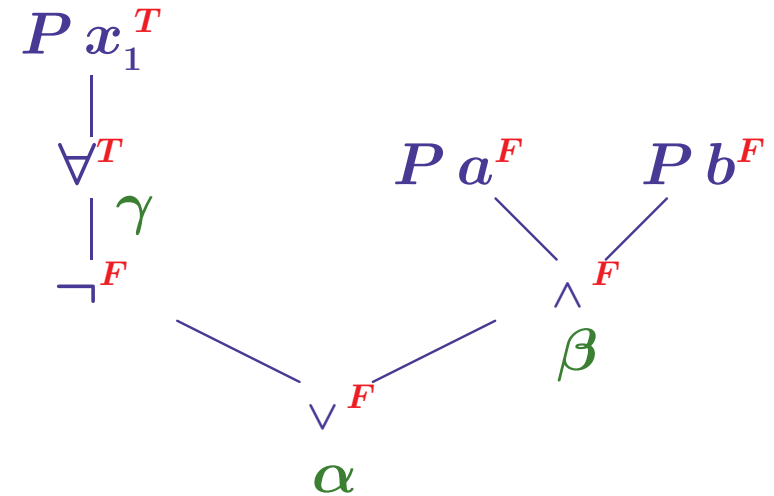
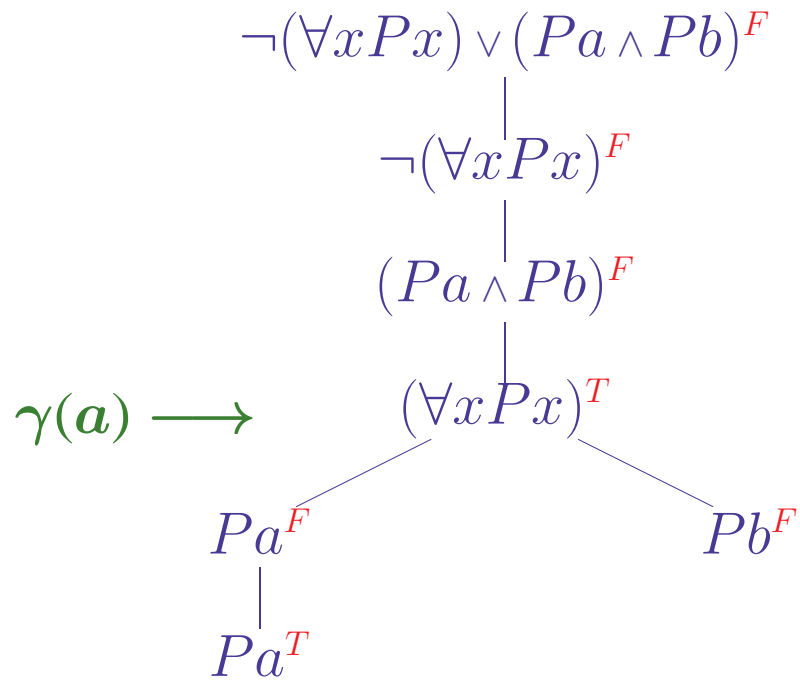
$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$



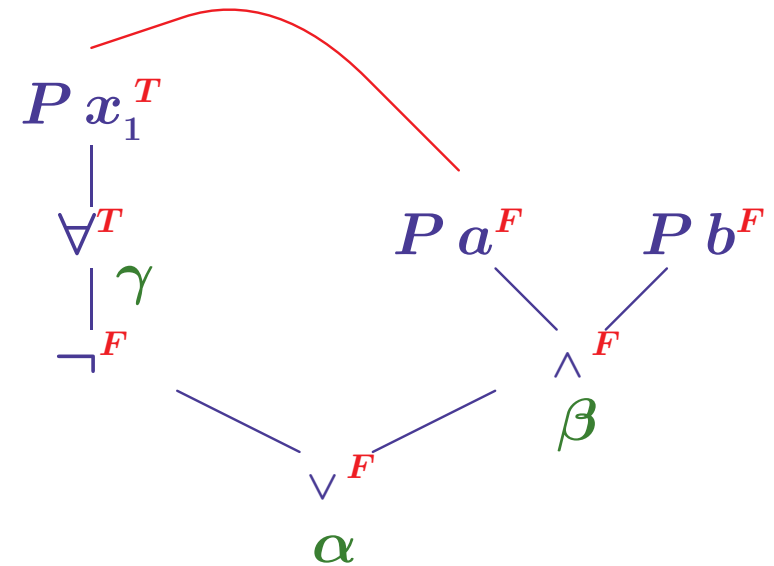
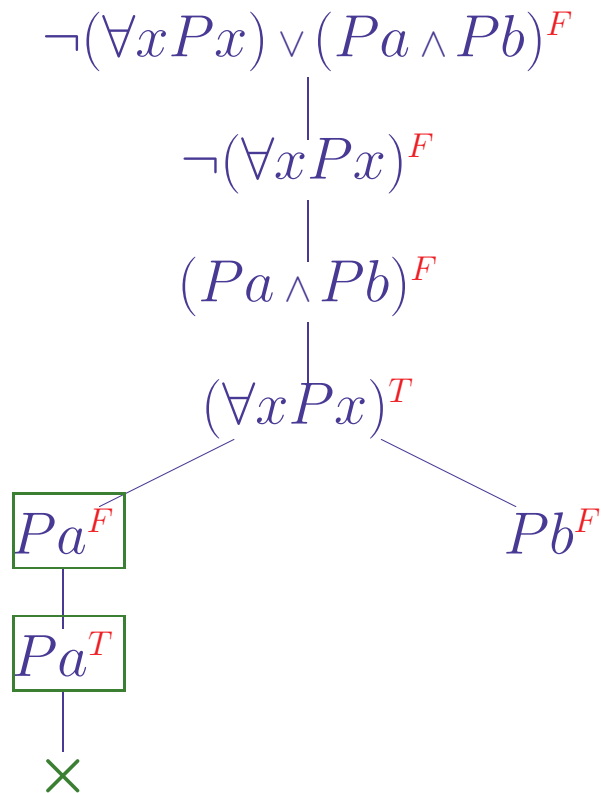
BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

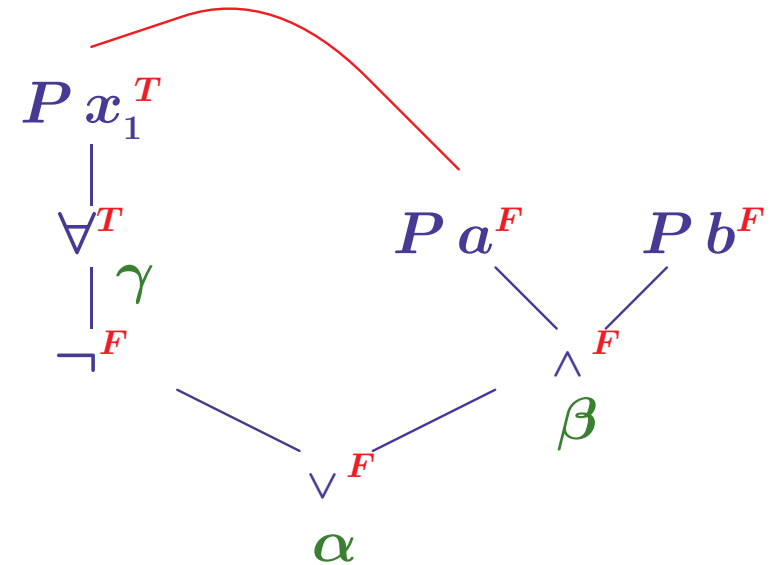
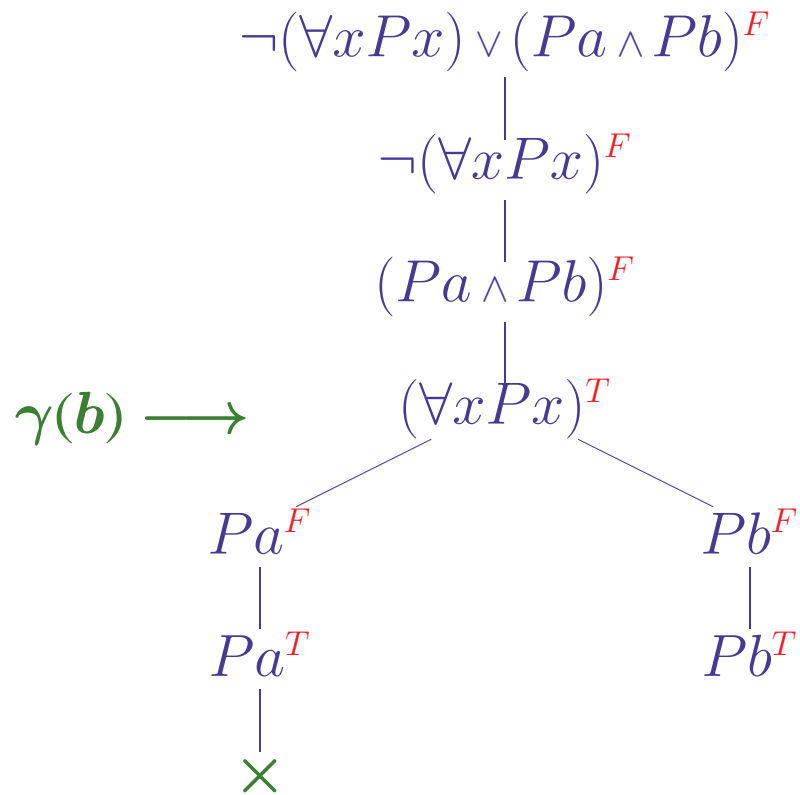


BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

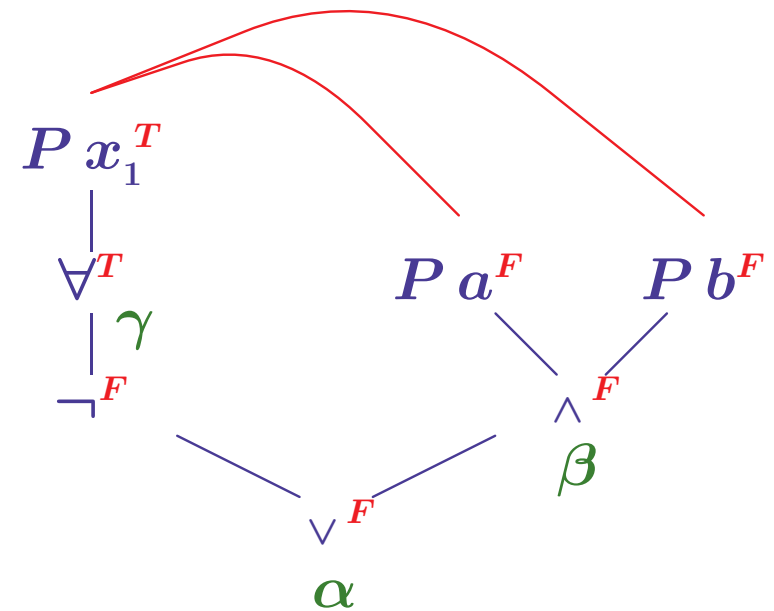
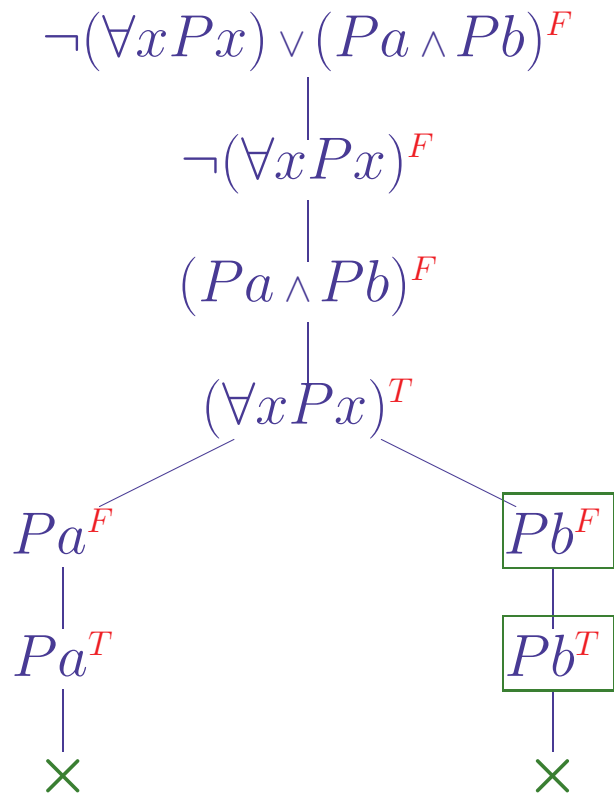


x_1 muß gleich a sein

BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

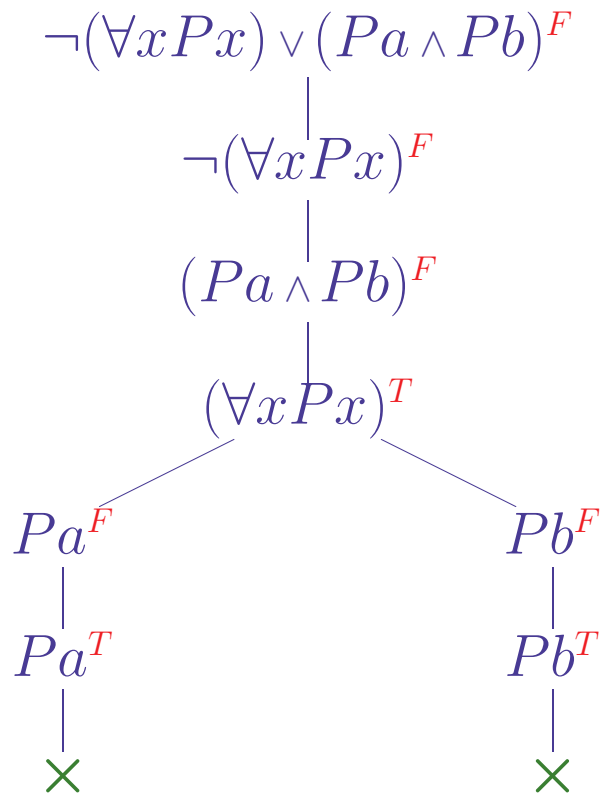


BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$

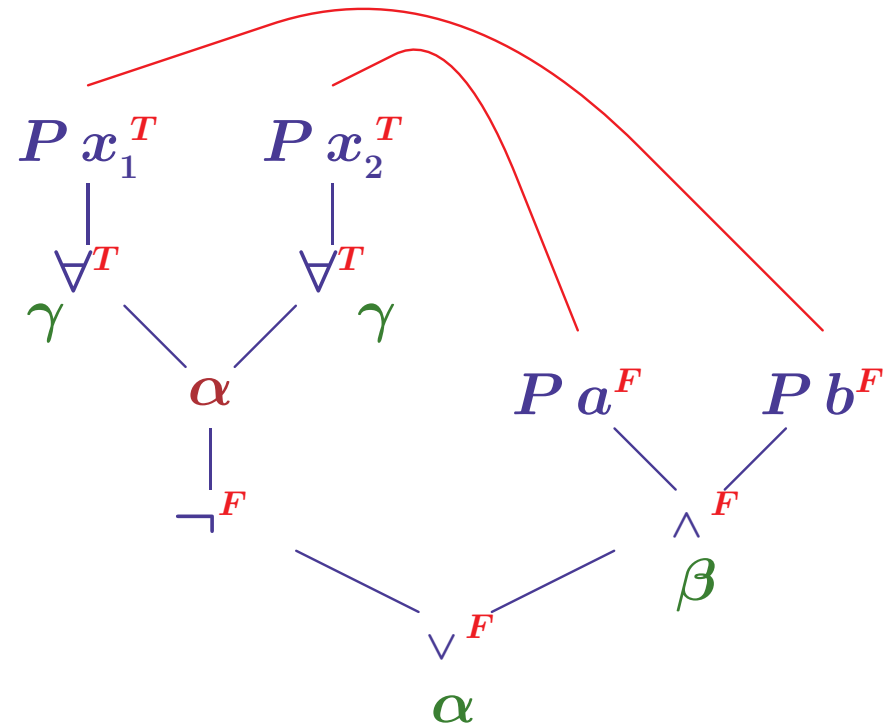


x_1 muß gleich a
und gleich b sein

BEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



Zwei Instanzen derselben Formel



γ -Formel hat **Multiplizität 2**
 Instantiiere $x_1 := b, x_2 := a$

- **Formelbaum enthält alle Teilformeln eines Beweises**
 - Es reicht, Knoten um Tableau Typen und Polaritäten zu ergänzen
 - Beide hängen nur vom Konnektiv und bisheriger Polarität ab
- **Beweiszweige sind durch α -Knoten beschreibbar**
 - Nur β -Knoten erzeugen Verzweigungen
 - Knoten mit α -Knoten als gemeinsamen Vorfahr sind im gleichen Zweig
- **Komplementaritätstests reichen aus**
 - Alle Zweige müssen komplementäre Literale enthalten
 - Komplementarität kann durch Substitution erzeugt werden
 - γ -Variablen werden erst beim Komplementaritätstest instantiiert
 - γ -Knoten dürfen dupliziert werden
- **Substitutionen bestimmen Reduktionsordnung**
 - Tableaubeweis muß Ordnung des Formelbaums berücksichtigen
 - Tableaubeweis muß Variablen in Termen, die für γ -Variablen eingesetzt werden, bereits freigelegt haben

MATRIXKALKÜLE PRÄZISIERT: FORMELBAUM

● (Annotierter) Formelbaum

- Syntaxbaum der Formel, in der jeder Knoten markiert ist mit
 - **Position:** eindeutiger Name a_0, a_1, \dots , mit dem Knoten identifiziert
 - **Label:** logisches Konnektiv oder atomare Formel
 - **Polarität:** T oder F (oft auch weniger suggestiv: “0 oder 1”)
 - **Typ:** α, β, γ oder δ
- **Atome (atomare Positionen):** Knoten mit atomaren Formeln als Label
- **Baumordnung $<$:** partielle Ordnung der Knoten im Baum
- **Multiplizität $\mu(a_i)$:** Anzahl der Kopien des γ -Knotens a_i im Baum
($\hat{=}$ Anzahl der Instanzen des zugehörigen Quantors)

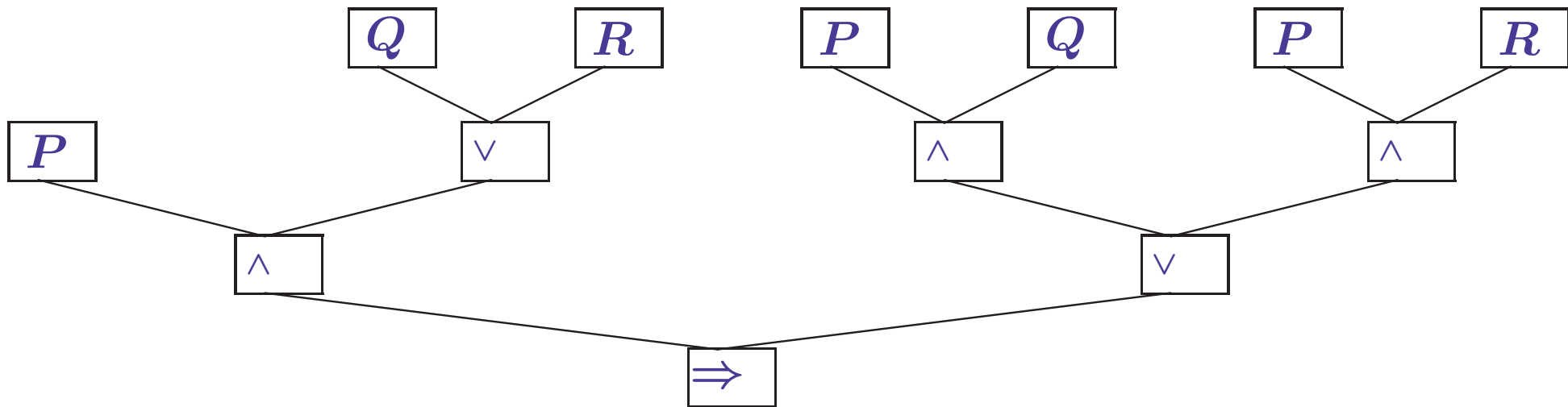
● Systematische Zuordnung von Polarität und Typ

- Die **Wurzel** a_0 hat Polarität F
- Typ/Nachfolgerpolarität einer Position a_i werden tabellarisch bestimmt

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	–	–	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(a_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

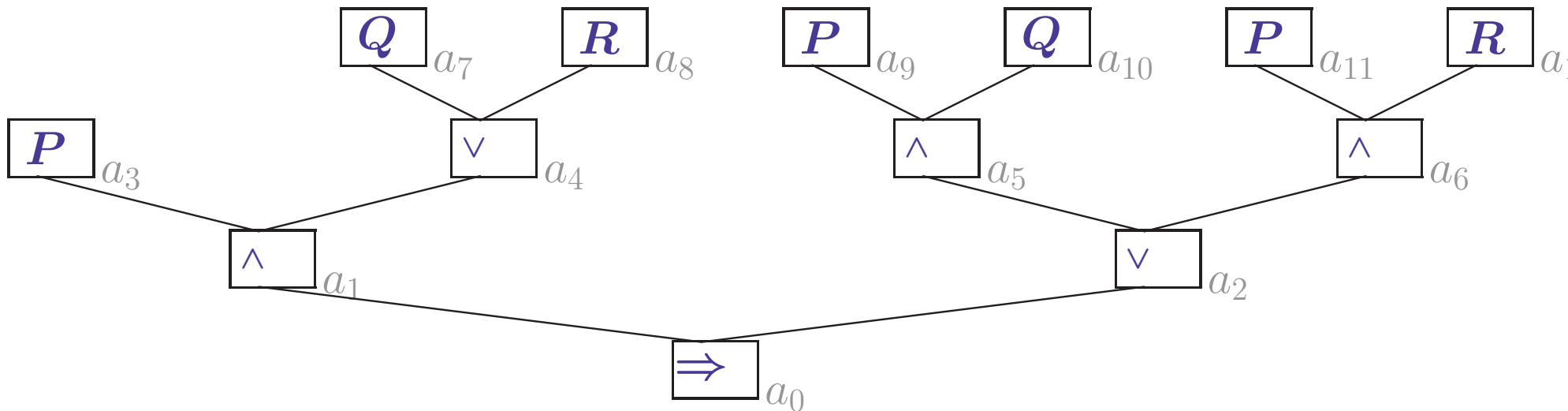
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Parsen der Formel erzeugt Syntaxbaum der Formel

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

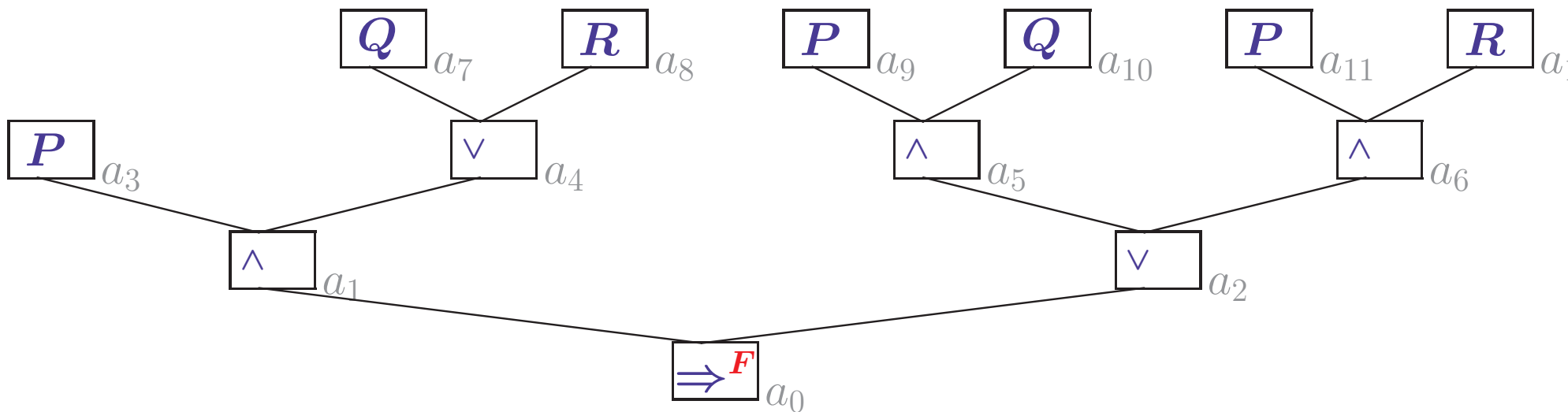
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Ergänzen von Positionsbezeichnern

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

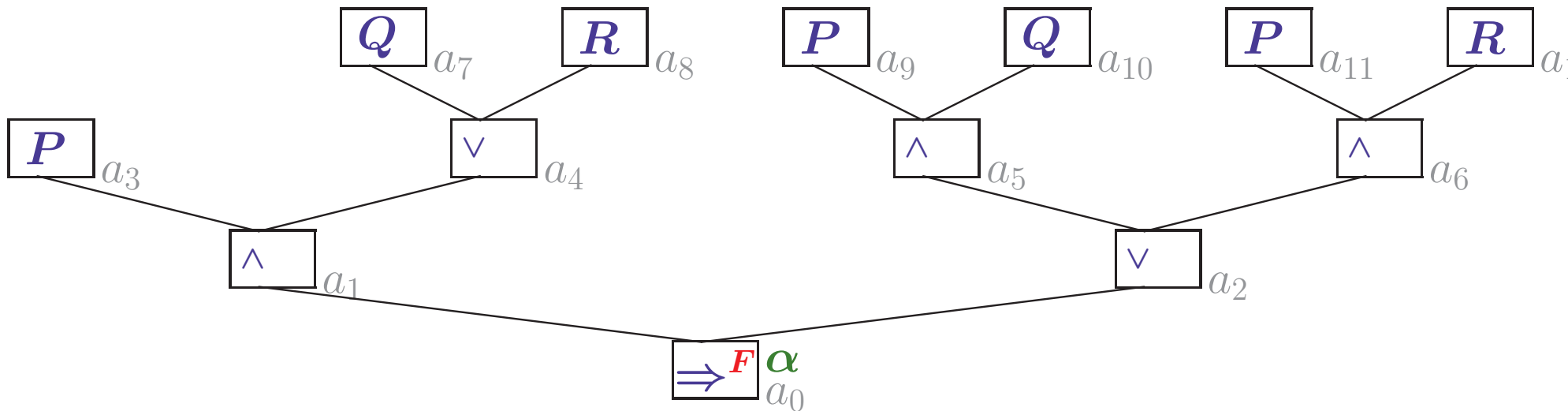
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Polarität der Wurzel

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

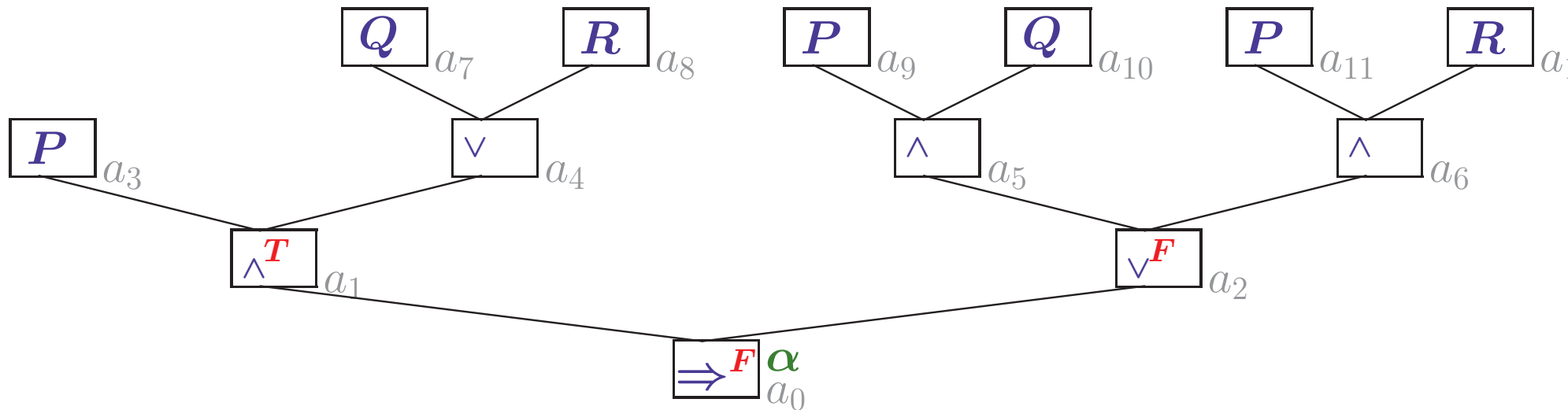
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



Typ der Wurzel

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

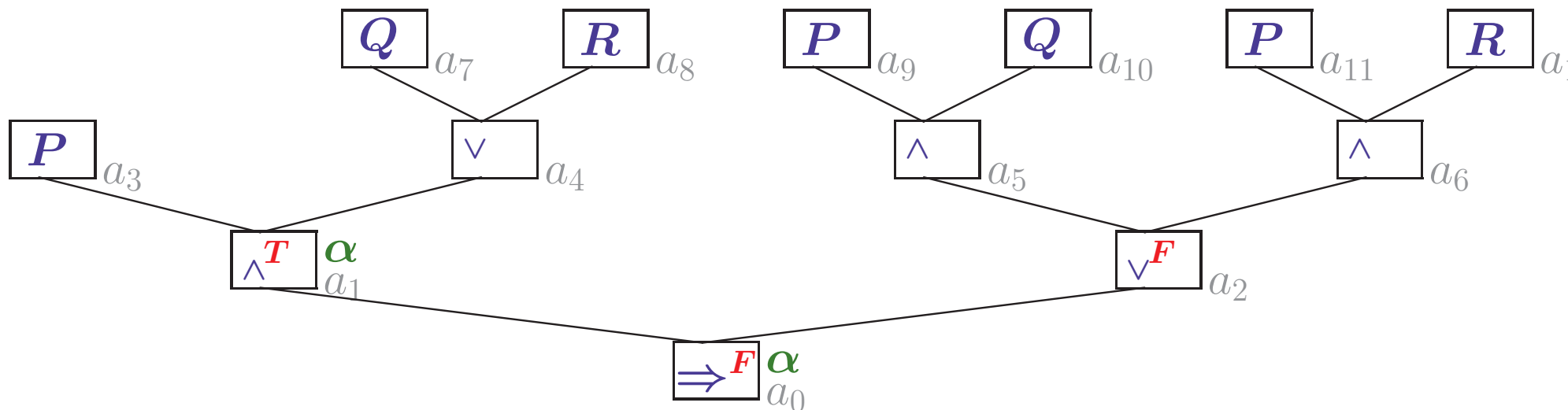


Polaritäten der Nachfolger

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

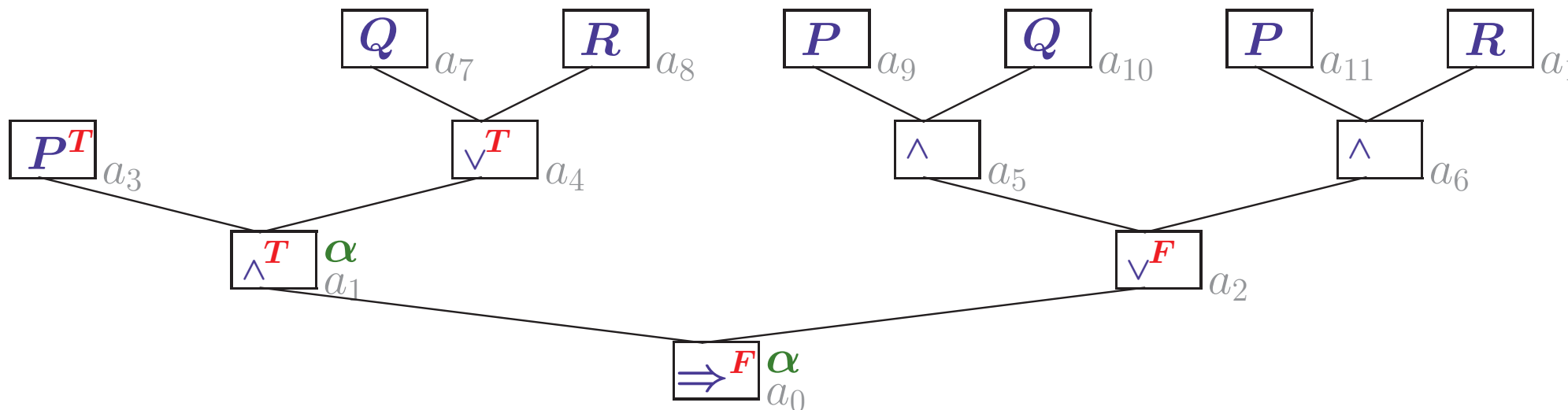


Typ des linken Nachfolgers

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

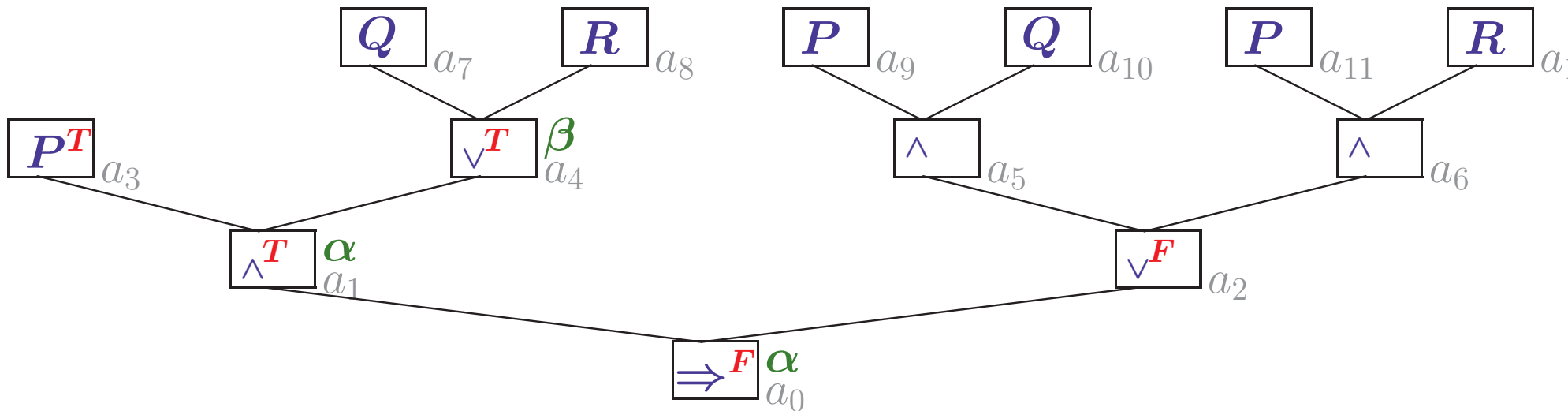


Polaritäten

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$

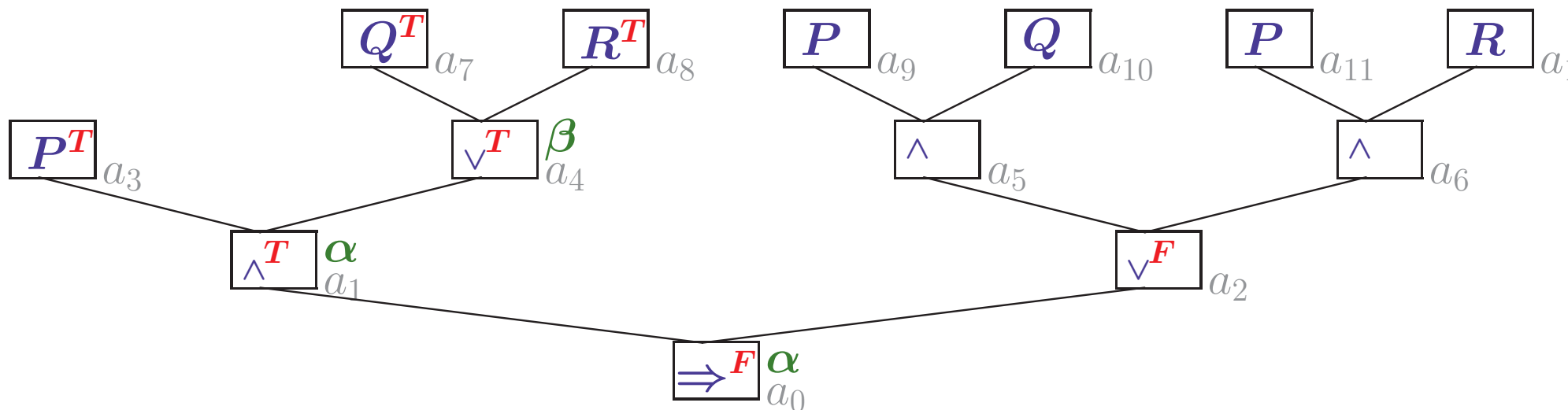


.....

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

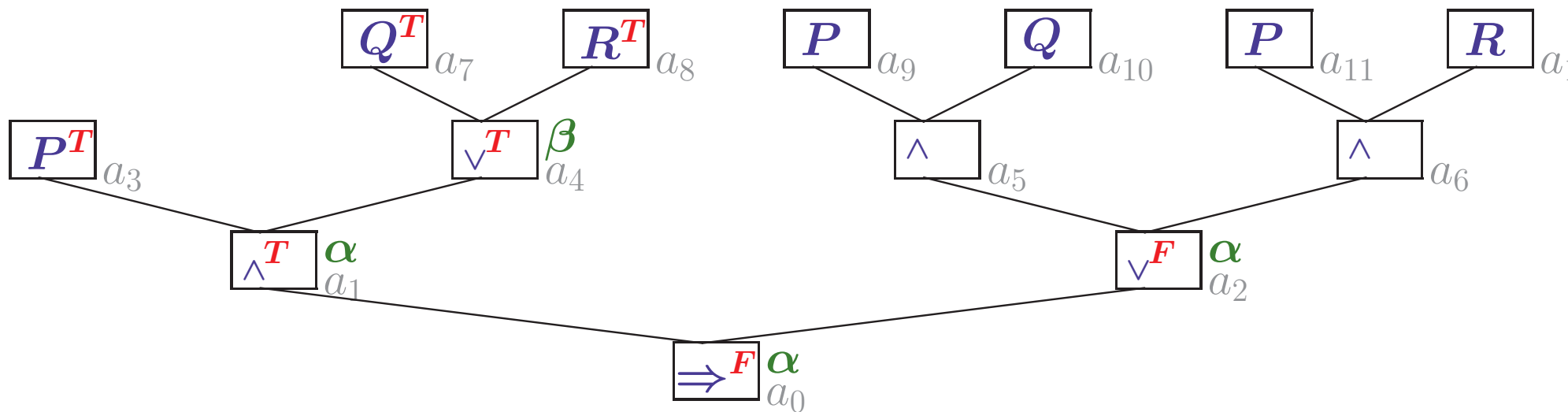
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

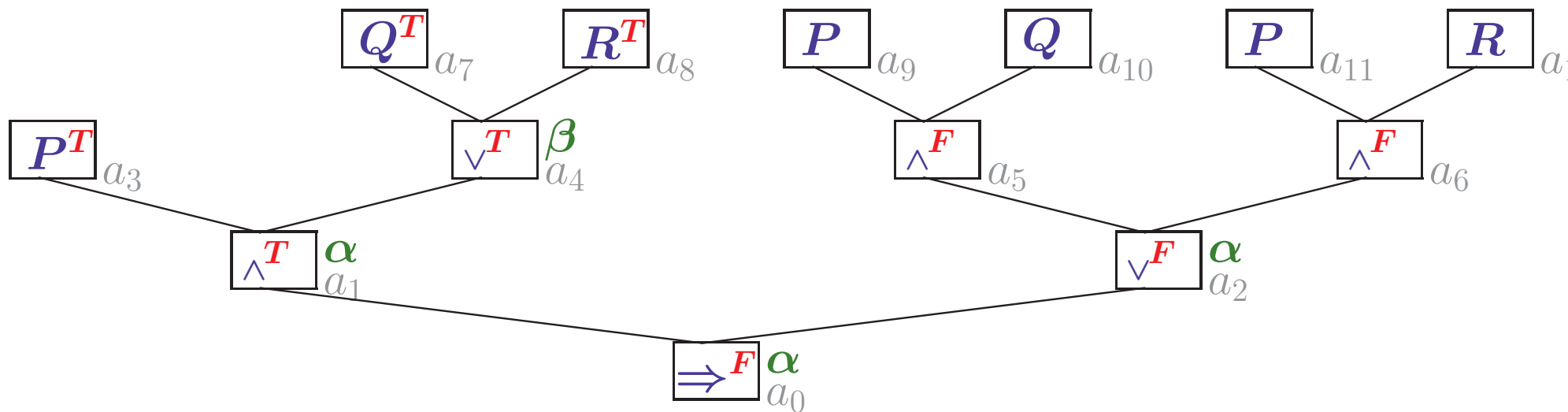
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

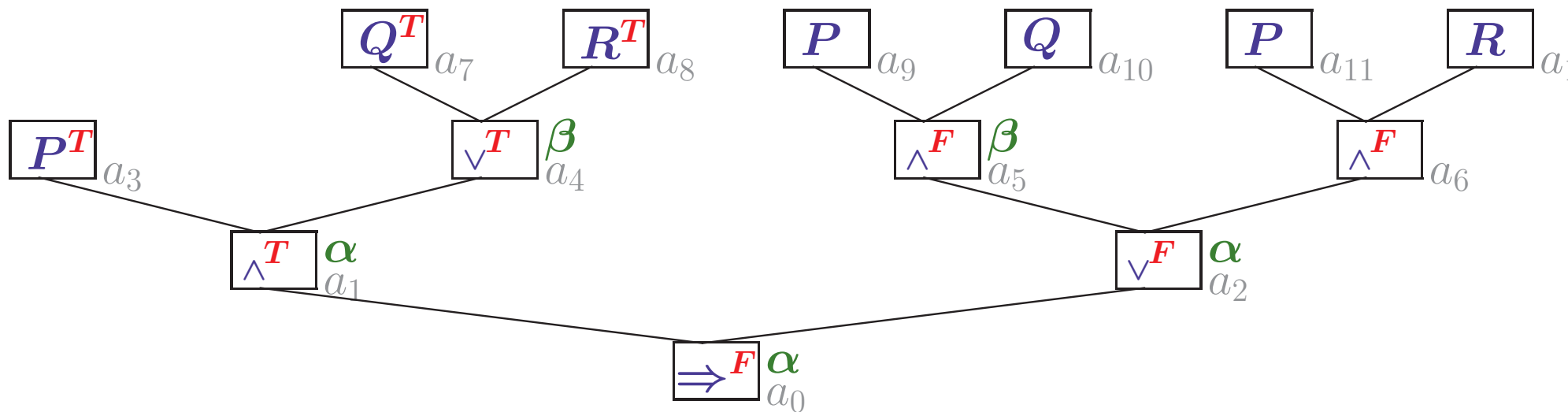
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

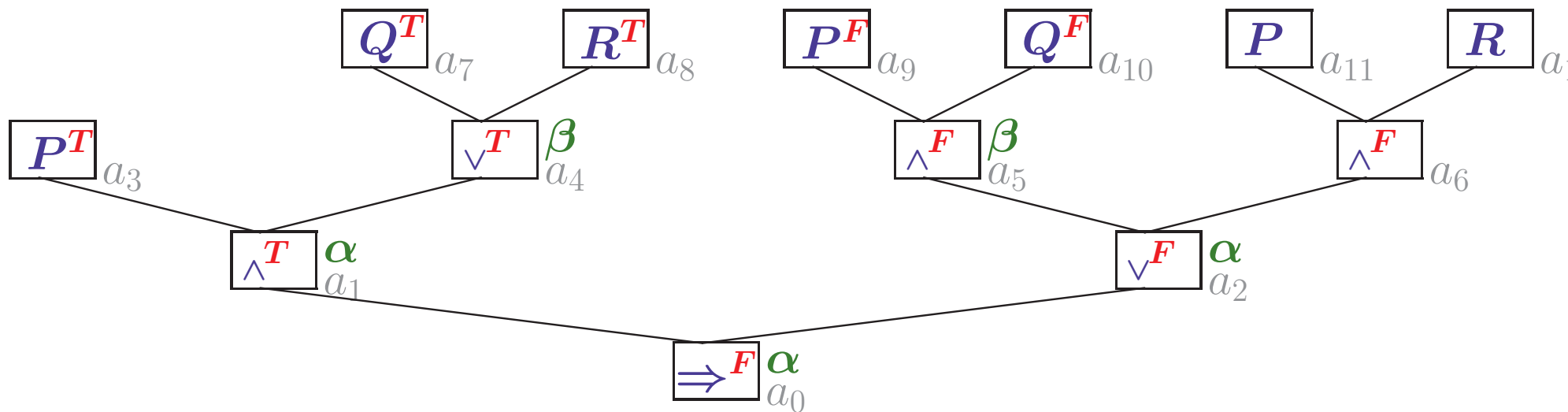
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

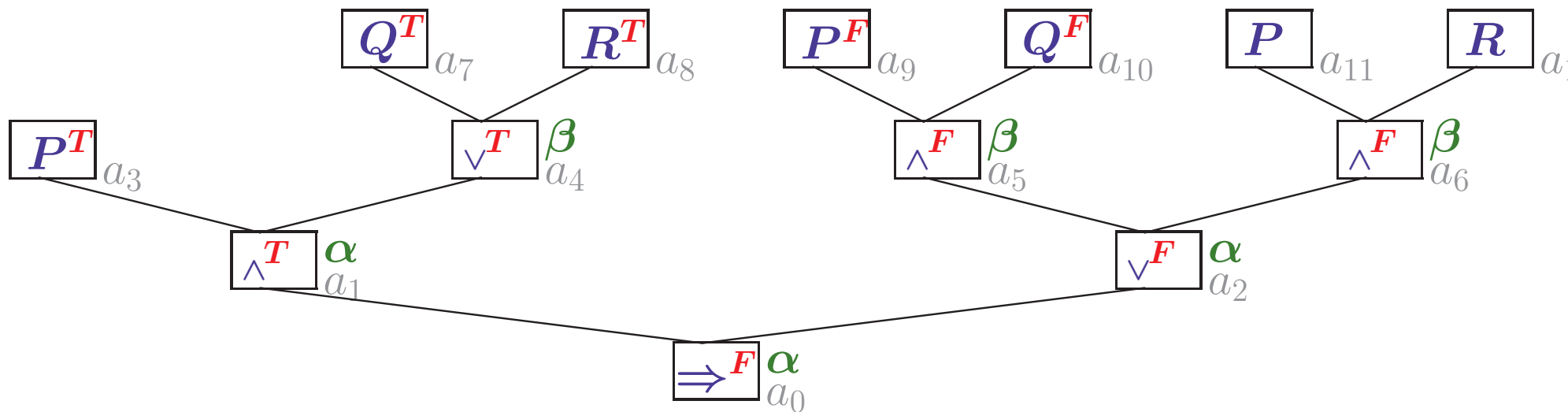
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

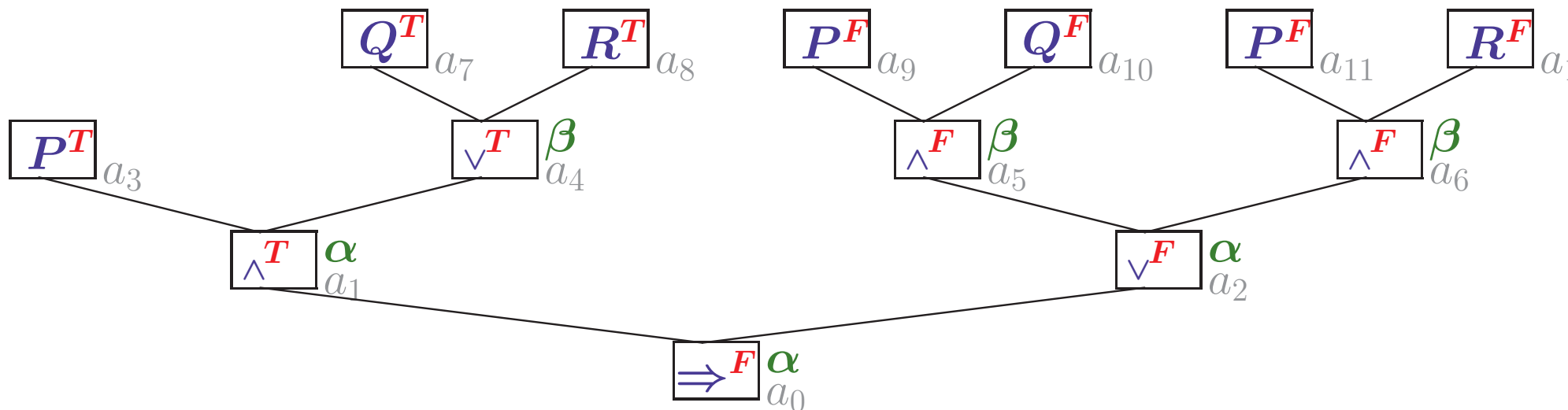
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

AUFBAU EINES ANNOTIERTEN FORMELBAUMS

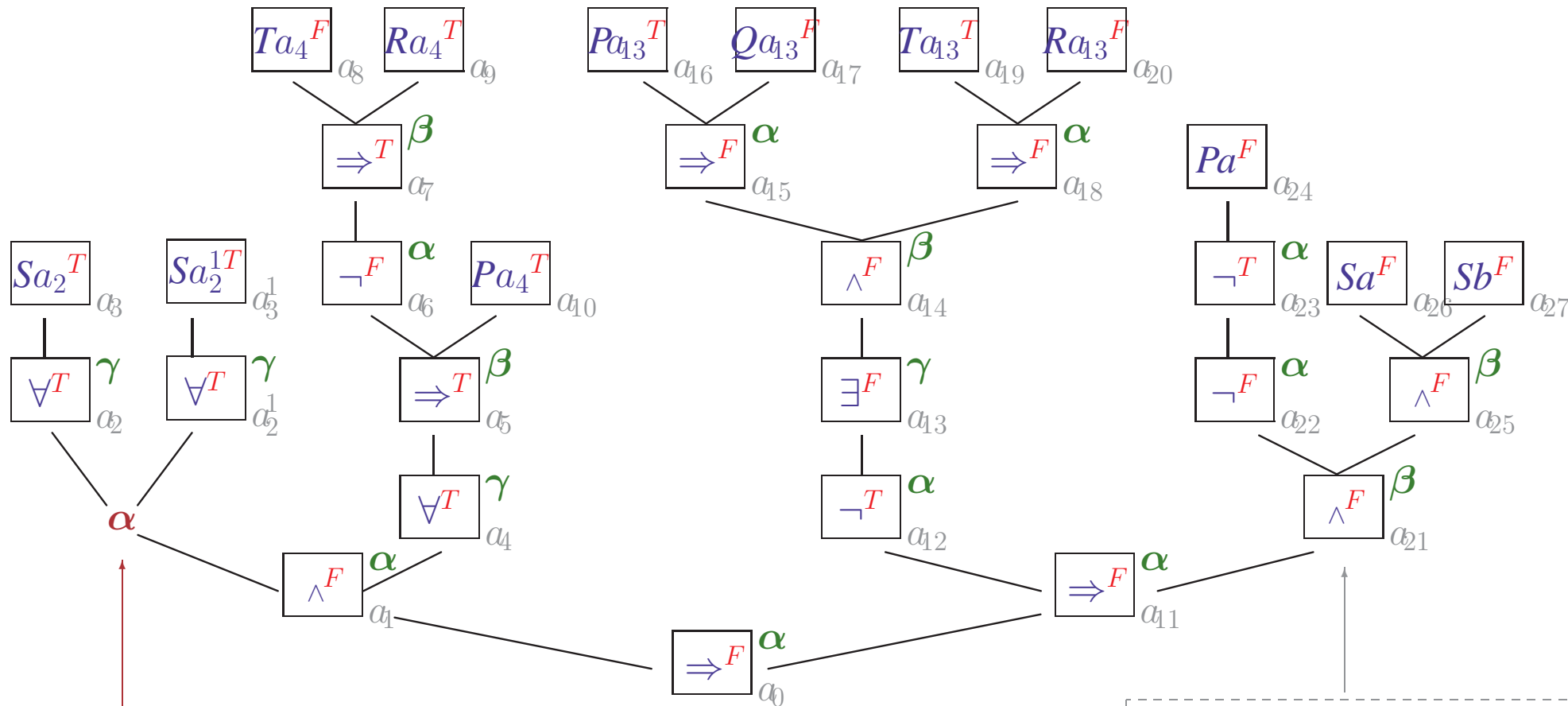
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T	β_1	X^F	X^T	X^F
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	-	-	β_2	Y^F	Y^T	Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(\alpha_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

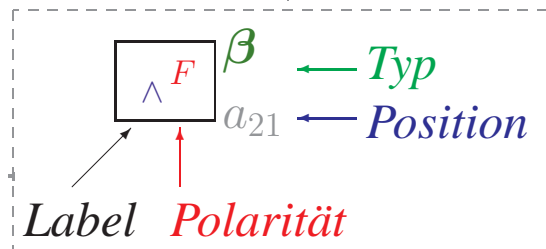
FORMELBAUM MIT MULTIPLIZITÄT

$$(\forall x Sx) \wedge (\forall y \neg(Ty \Rightarrow Ry) \Rightarrow Py) \Rightarrow \neg(\exists z(Pz \Rightarrow Qz) \wedge (Tz \Rightarrow Rz)) \Rightarrow \neg\neg Pa \wedge Sa \wedge S$$



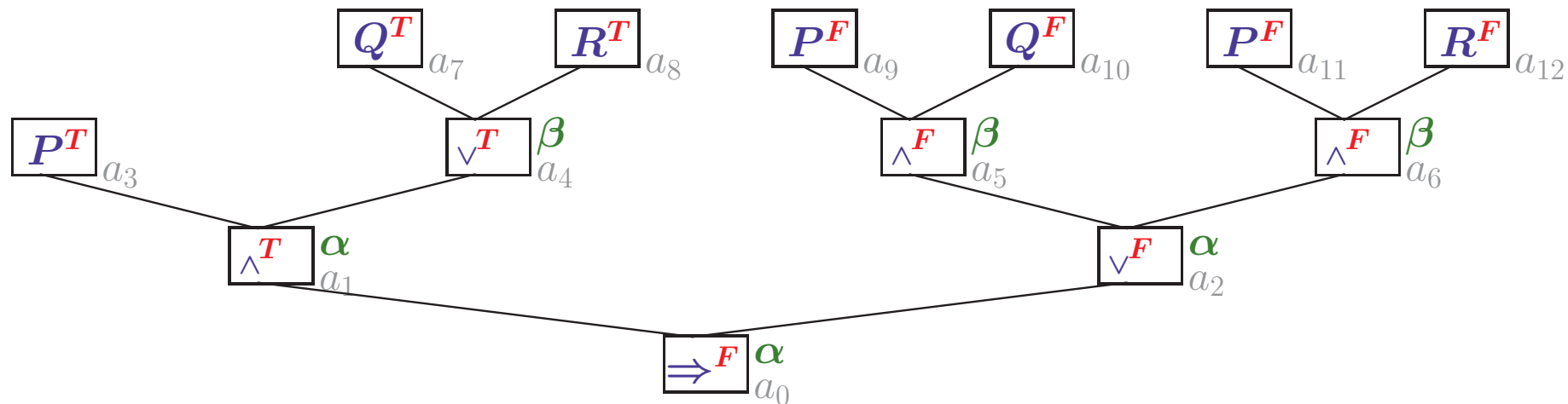
$\mu(a_2)=2$

Positionen werden als Variablennamen benutzt



- **α/β -Beziehung** zwischen atomaren Positionen
 - $u \sim_{\alpha} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ α
 - $u \sim_{\beta} v$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ β
- **Pfad**
 - (Maximale) Menge von Atomen in gegenseitiger α -Beziehung
- **Konnektion**
 - Paar $\{u, v\}$ von Knoten mit gleichem Label, unterschiedlicher Polarität
- **Substitution**
 - Endliche Abbildung σ von γ -Variablen in Terme
- **σ -komplementäre Konnektion**
 - Konnektion $\{u, v\}$ deren Label mit der Substitution σ unifizierbar sind
- **Aufspannende Paarung für eine Formel F**
 - **Paarung**: Menge von σ -komplementären Konnektionen,
 - **Aufspannend**: jeder Pfad durch F enthält eine der Konnektionen

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN

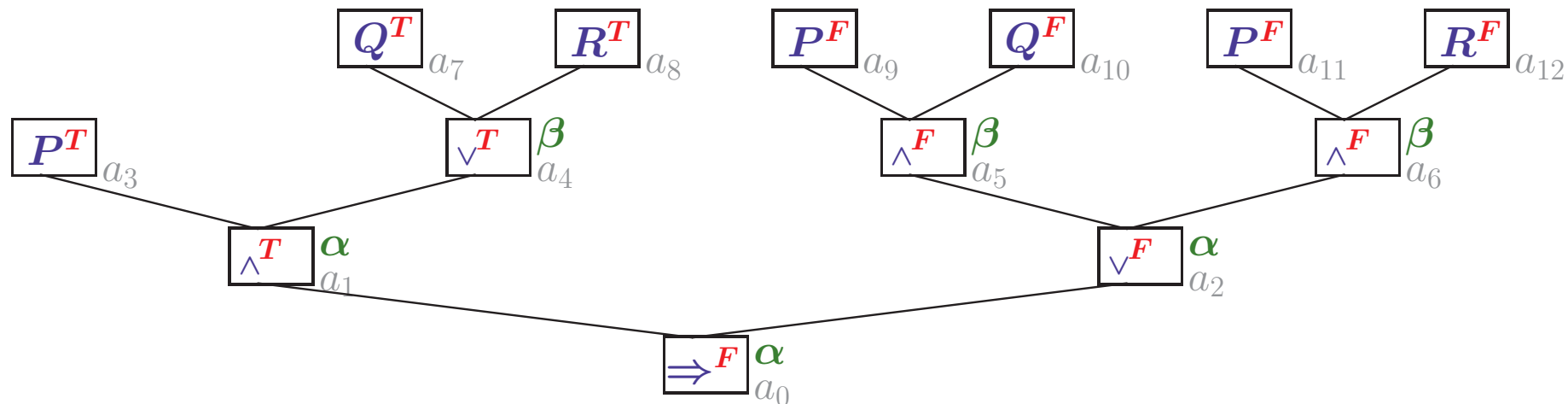


- **α/β -Beziehungen zwischen atomaren Formeln**

- $a_7 \sim_\beta a_8$, $a_9 \sim_\beta a_{10}$, $a_{11} \sim_\beta a_{12}$

- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_\alpha a_j$

PFADDE UND KONNEKTIONEN IN FORMELBÄUMEN



- **α/β -Beziehungen** zwischen atomaren Formeln

- $a_7 \sim_{\beta} a_8$, $a_9 \sim_{\beta} a_{10}$, $a_{11} \sim_{\beta} a_{12}$

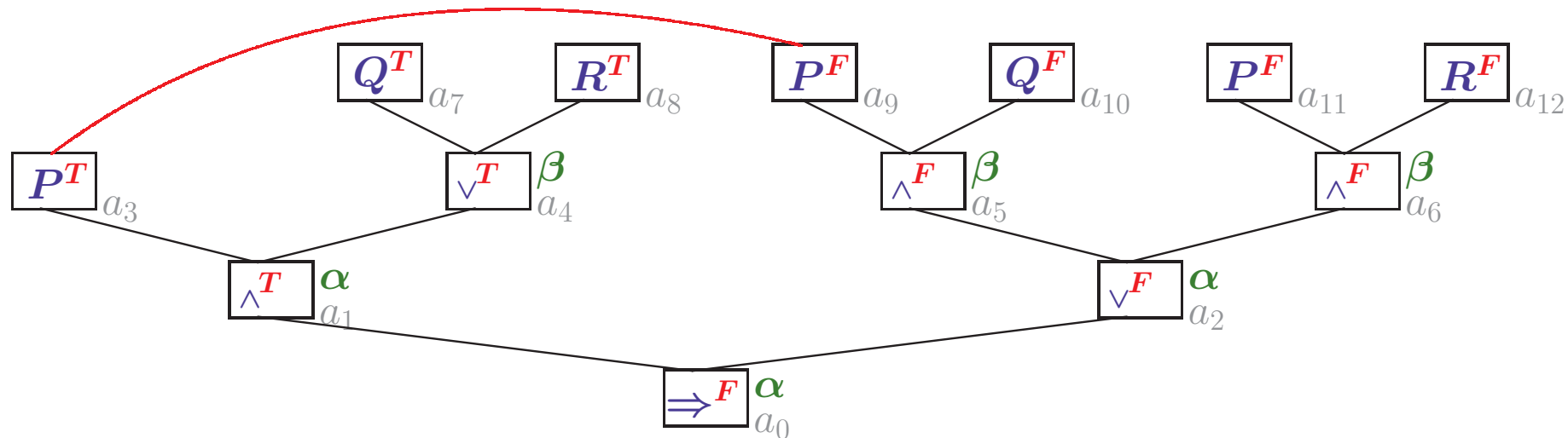
- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_{\alpha} a_j$

- **Drei β -Beziehungen liefern 8 Pfade:**

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,

- $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



- **α/β -Beziehungen zwischen atomaren Formeln**

- $a_7 \sim_{\beta} a_8$, $a_9 \sim_{\beta} a_{10}$, $a_{11} \sim_{\beta} a_{12}$

- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_{\alpha} a_j$

- **Drei β -Beziehungen liefern 8 Pfade:**

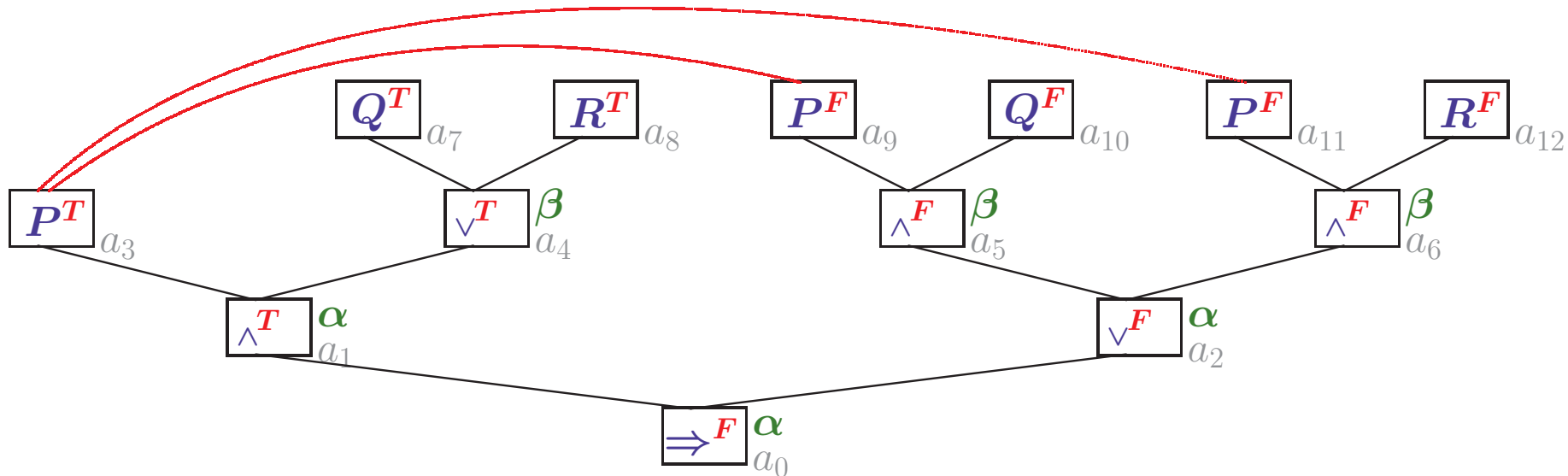
- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,

- $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

- **4 Konnektionen**

- $a_3 a_9$,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



- **α/β -Beziehungen zwischen atomaren Formeln**

- $a_7 \sim_\beta a_8$, $a_9 \sim_\beta a_{10}$, $a_{11} \sim_\beta a_{12}$

- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_\alpha a_j$

- **Drei β -Beziehungen liefern 8 Pfade:**

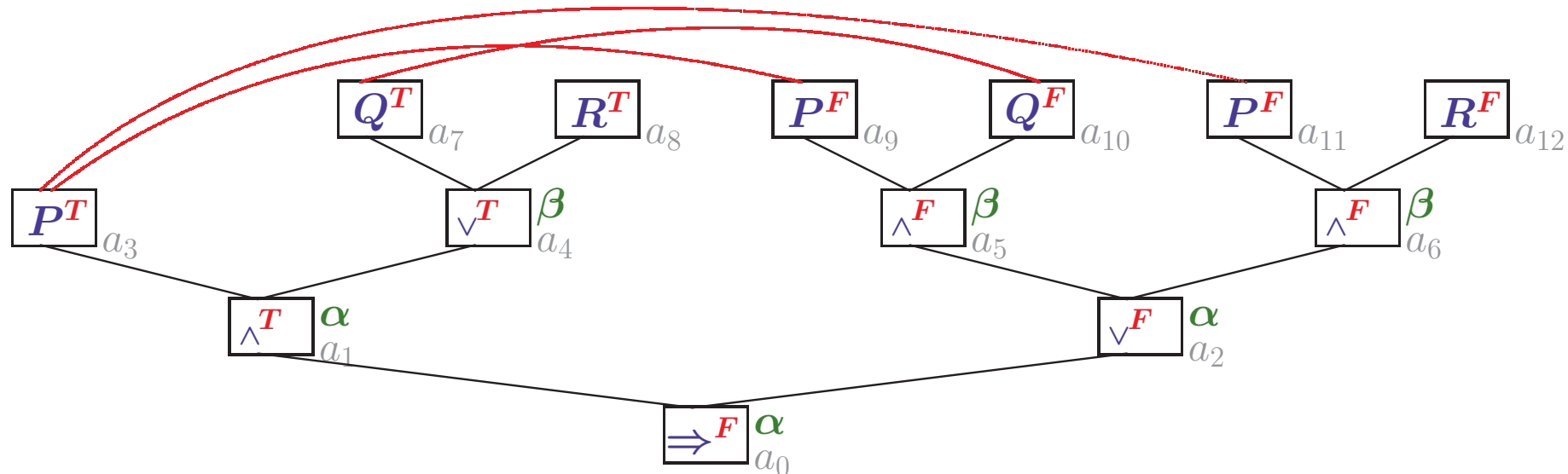
- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,

- $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

- **4 Konnektionen**

- $a_3 a_9$, $a_3 a_{11}$,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



- **α/β -Beziehungen** zwischen atomaren Formeln

- $a_7 \sim_{\beta} a_8$, $a_9 \sim_{\beta} a_{10}$, $a_{11} \sim_{\beta} a_{12}$

- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_{\alpha} a_j$

- **Drei β -Beziehungen liefern 8 Pfade:**

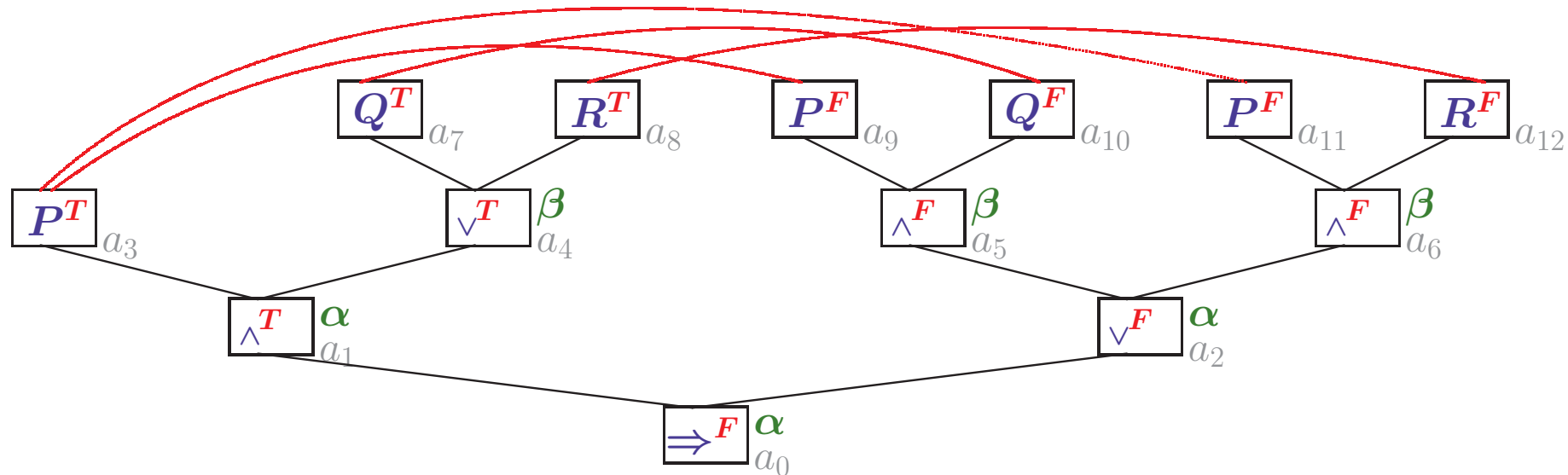
- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,

- $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

- **4 Konnektionen**

- $a_3 a_9$, $a_3 a_{11}$, $a_7 a_{10}$,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



- **α/β -Beziehungen zwischen atomaren Formeln**

- $a_7 \sim_{\beta} a_8$, $a_9 \sim_{\beta} a_{10}$, $a_{11} \sim_{\beta} a_{12}$

- Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_{\alpha} a_j$

- **Drei β -Beziehungen liefern 8 Pfade:**

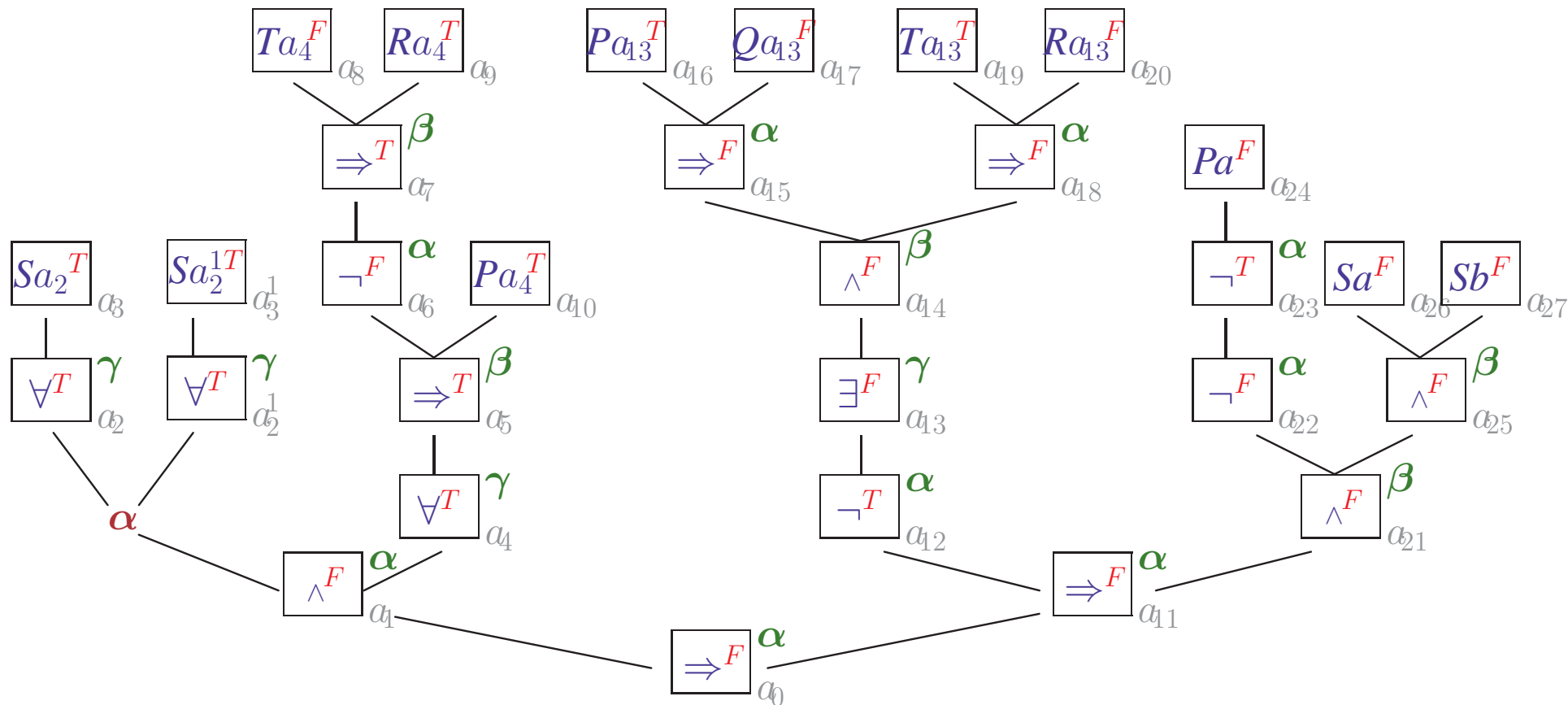
- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$,

- $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

- **4 Konnektionen**

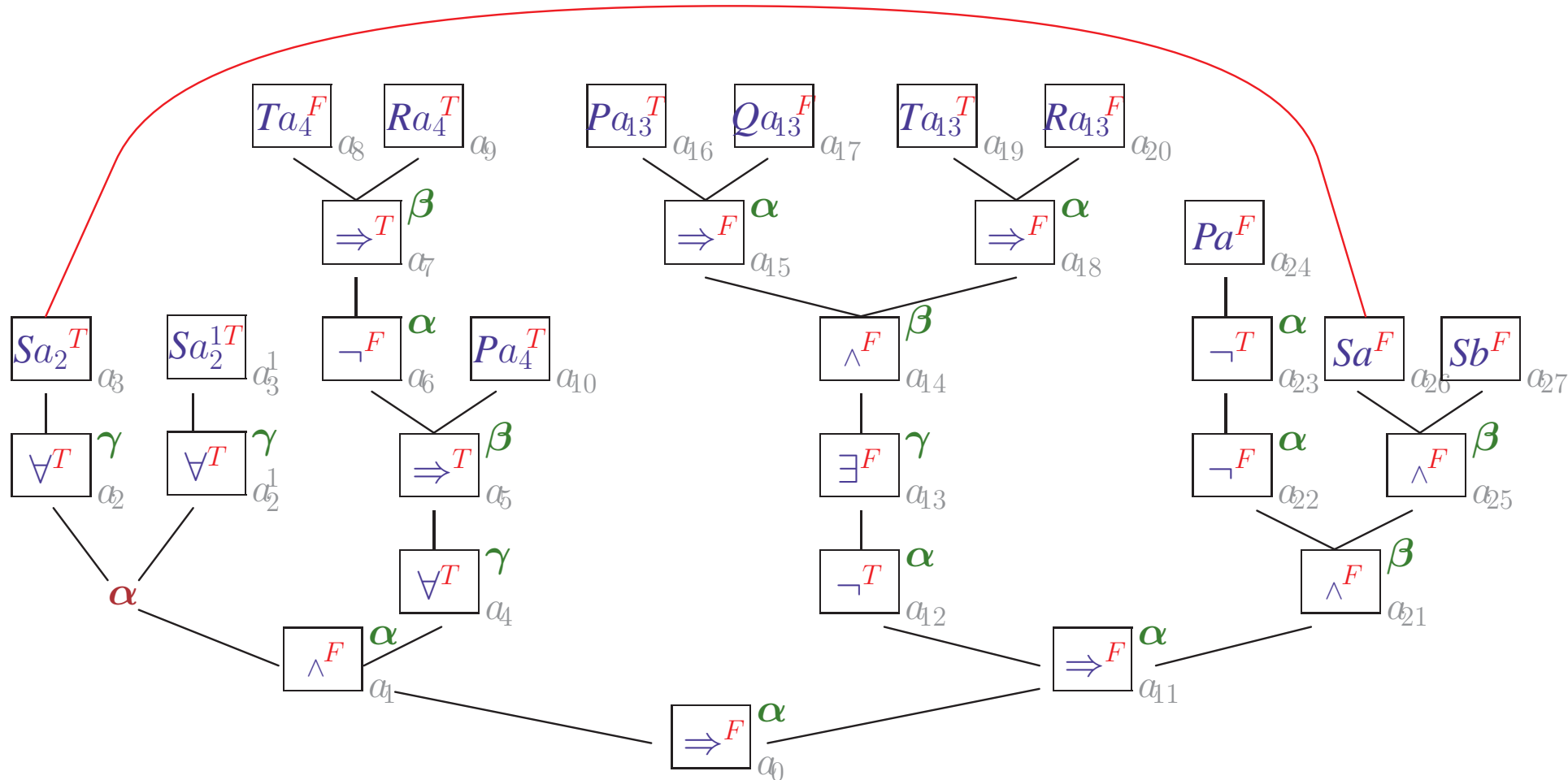
- $a_3 a_9$, $a_3 a_{11}$, $a_7 a_{10}$, $a_8 a_{12}$

PFADDE UND KONNEKTIONEN IN FORMELBÄUMEN



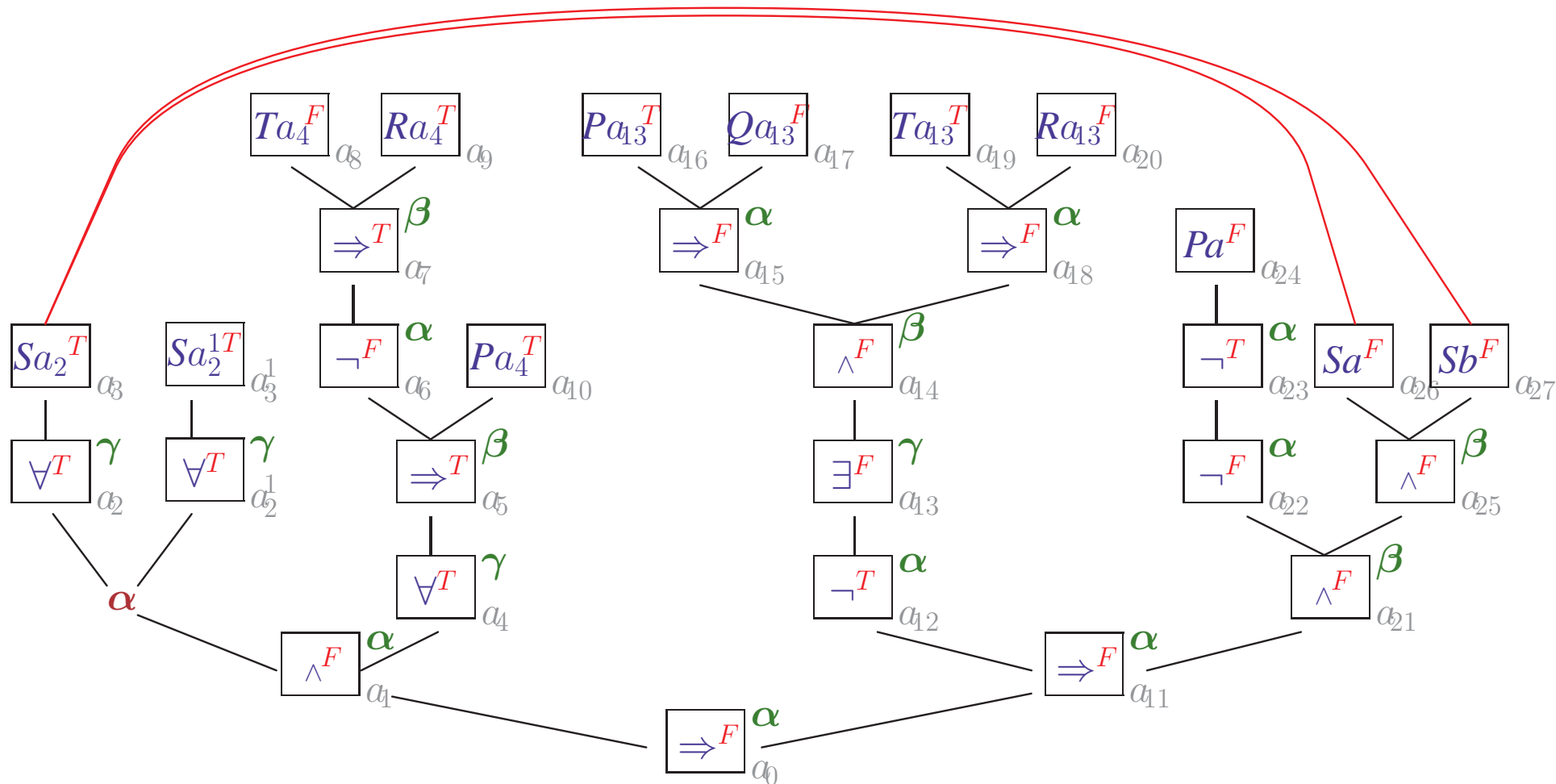
- **18 Pfade:** $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, ... $a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}$, ...

PFADDE UND KONNEKTIONEN IN FORMELBÄUMEN



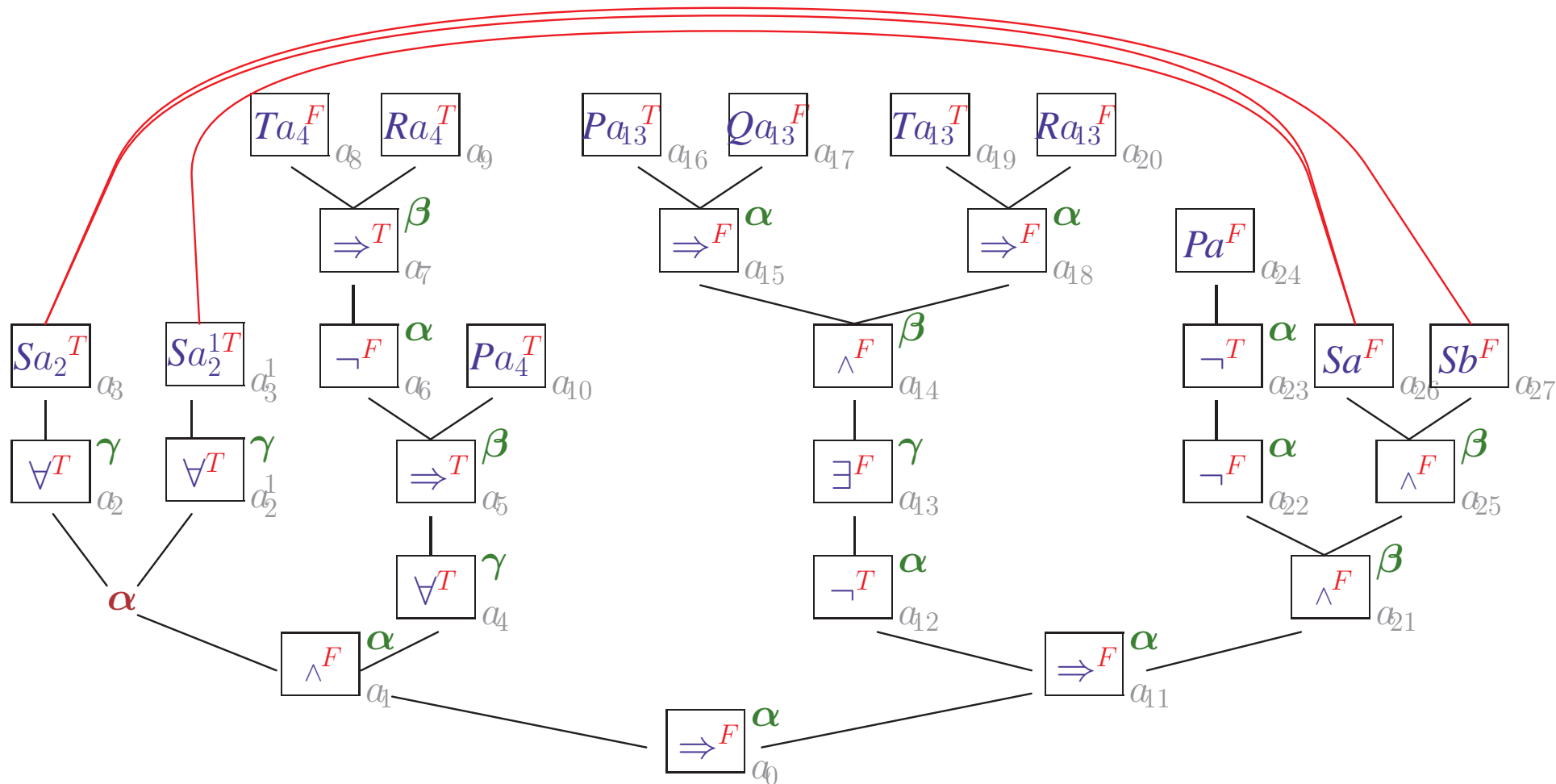
- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, ... $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26} ,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



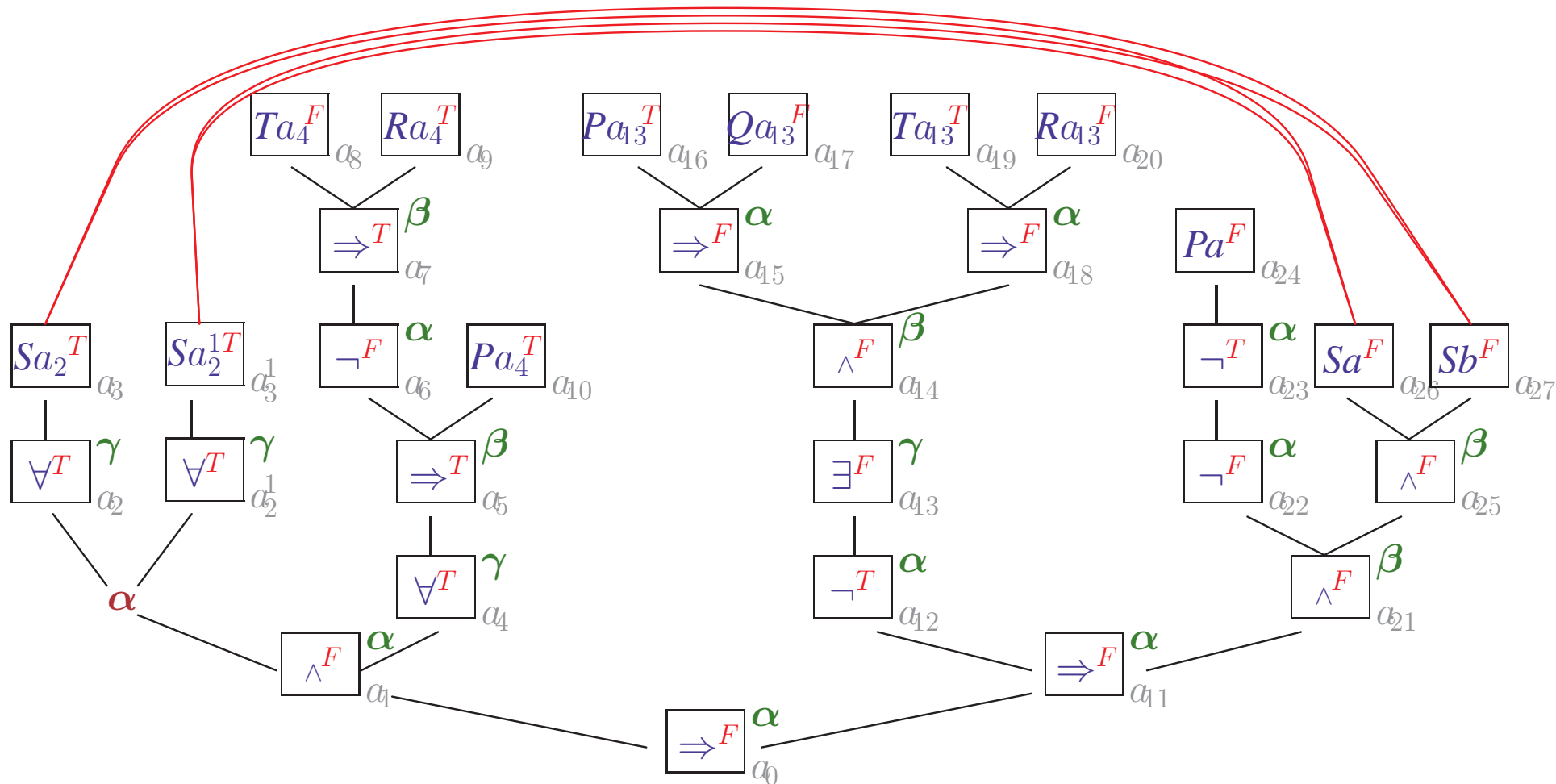
- **18 Pfade:** $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, ... $a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** $a_3 a_{26}$, $a_3 a_{27}$,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



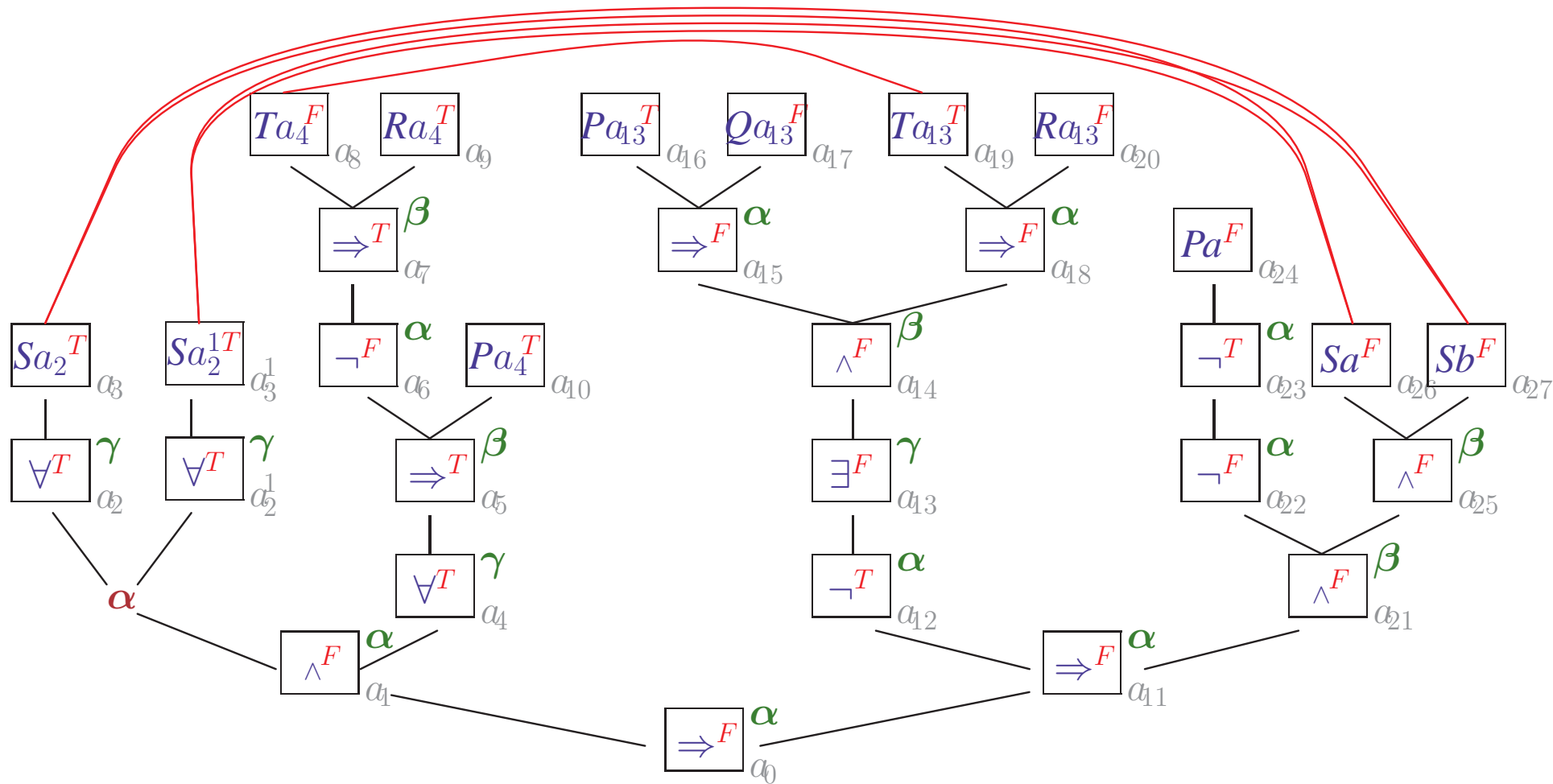
- **18 Pfade:** $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, ... $a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** $a_3 a_{26}$, $a_3 a_{27}$, $a_3^1 a_{26}$,

PFADDE UND KONNEKTIONEN IN FORMELBÄUMEN



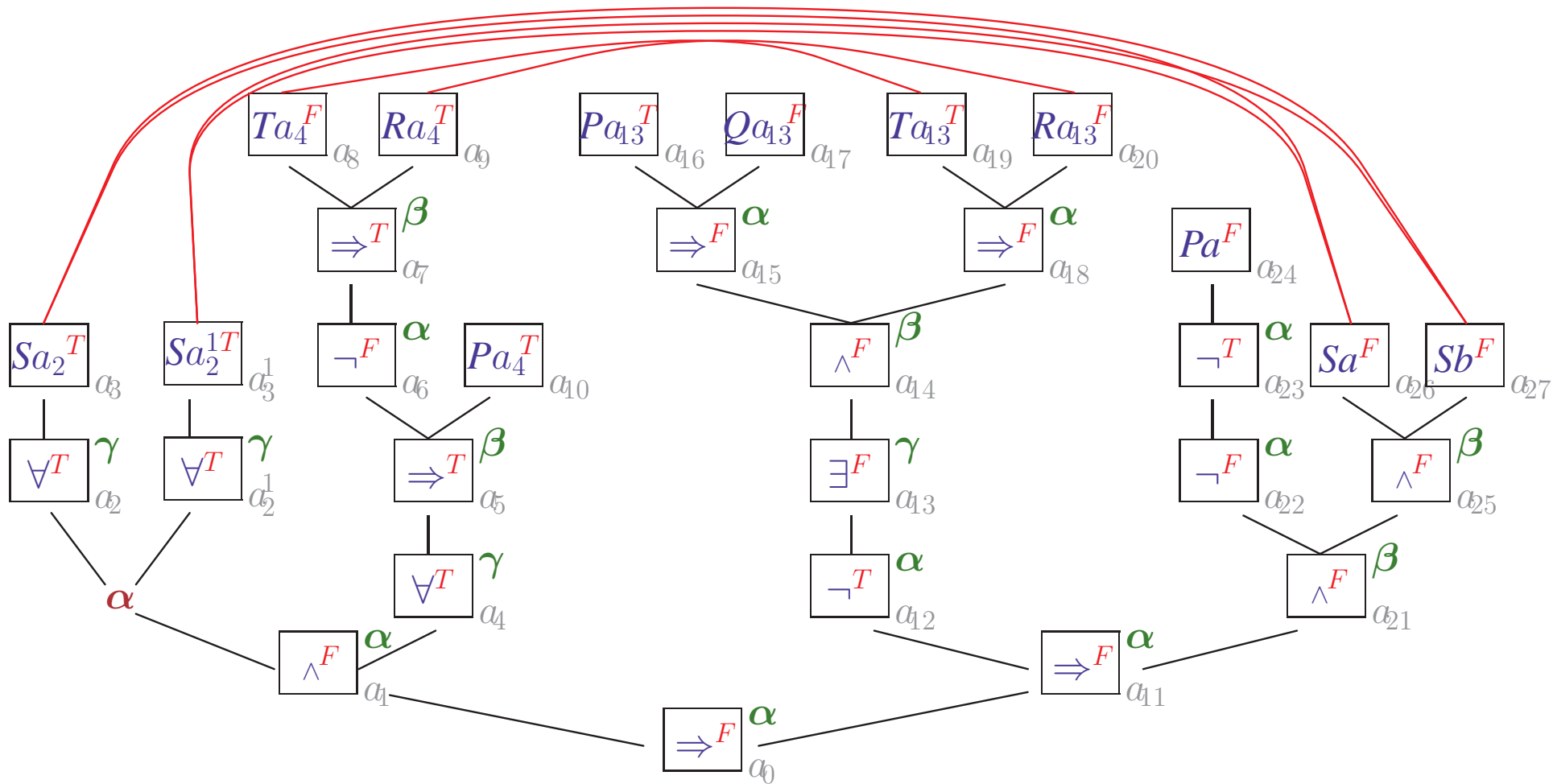
- **18 Pfade:** $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$,
 $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, ... $a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** $a_3 a_{26}$, $a_3 a_{27}$, $a_3^1 a_{26}$, $a_3^1 a_{27}$,

PFADDE UND KONNEKTIONEN IN FORMELBÄUMEN



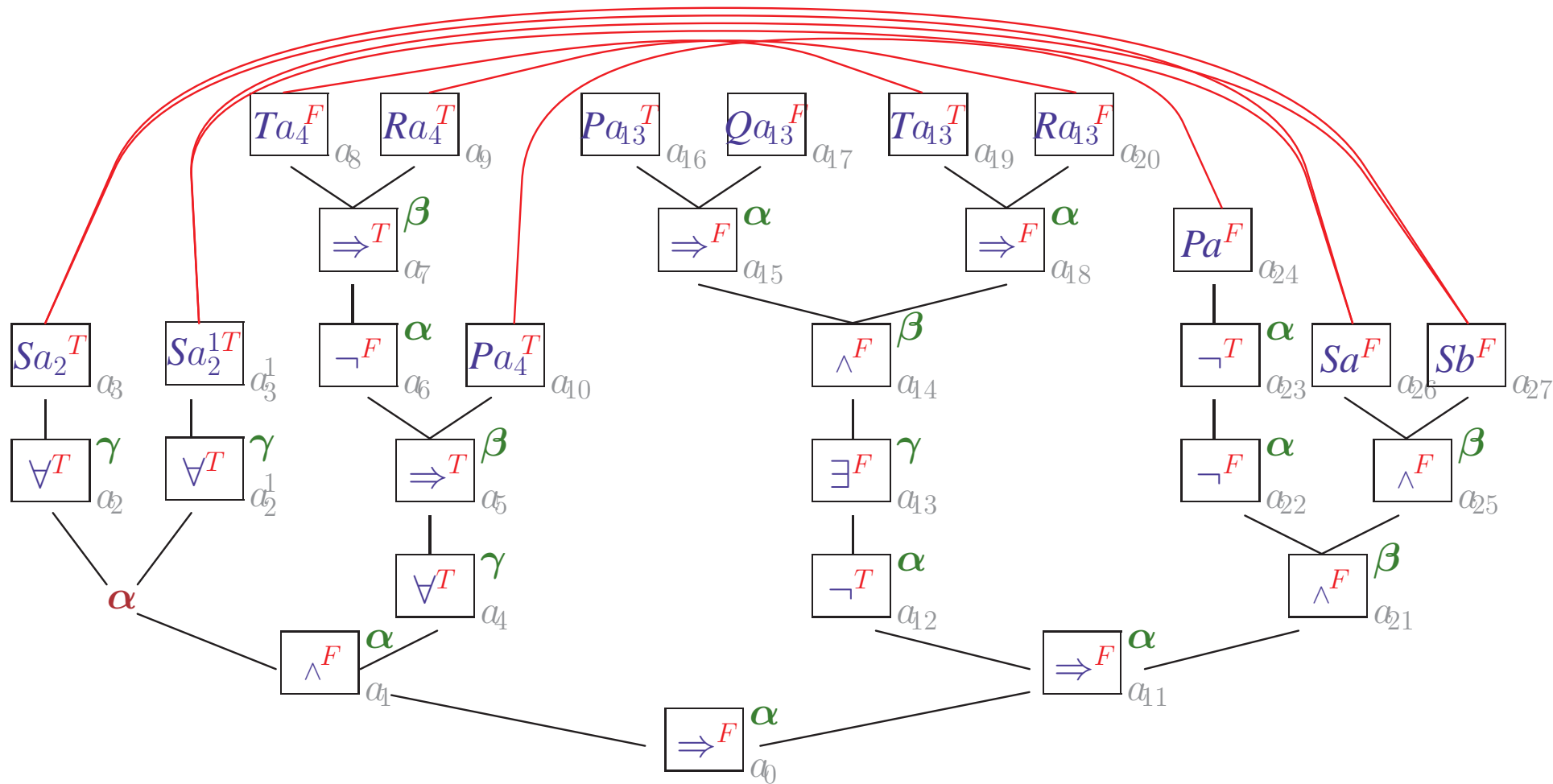
- **18 Pfade:** $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$,
 $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, ... $a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** $a_3 a_{26}$, $a_3 a_{27}$, $a_3^1 a_{26}$, $a_3^1 a_{27}$, $a_8 a_{19}$,

PFADDE UND KONNEKTIONEN IN FORMELBÄUMEN



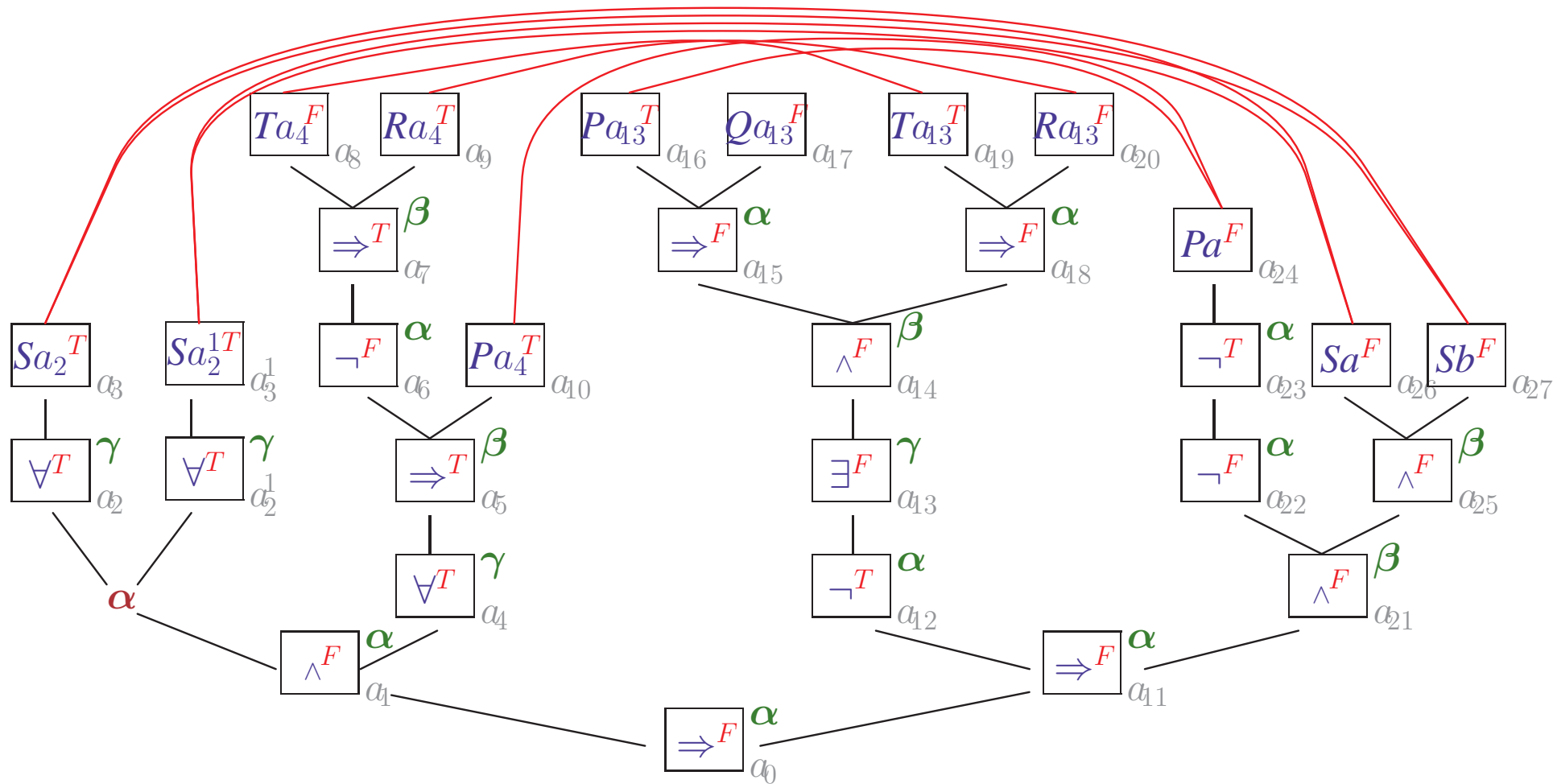
- **18 Pfade:** $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$,
 $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, ... $a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** $a_3 a_{26}$, $a_3 a_{27}$, $a_3^1 a_{26}$, $a_3^1 a_{27}$, $a_8 a_{19}$, $a_9 a_{20}$,

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



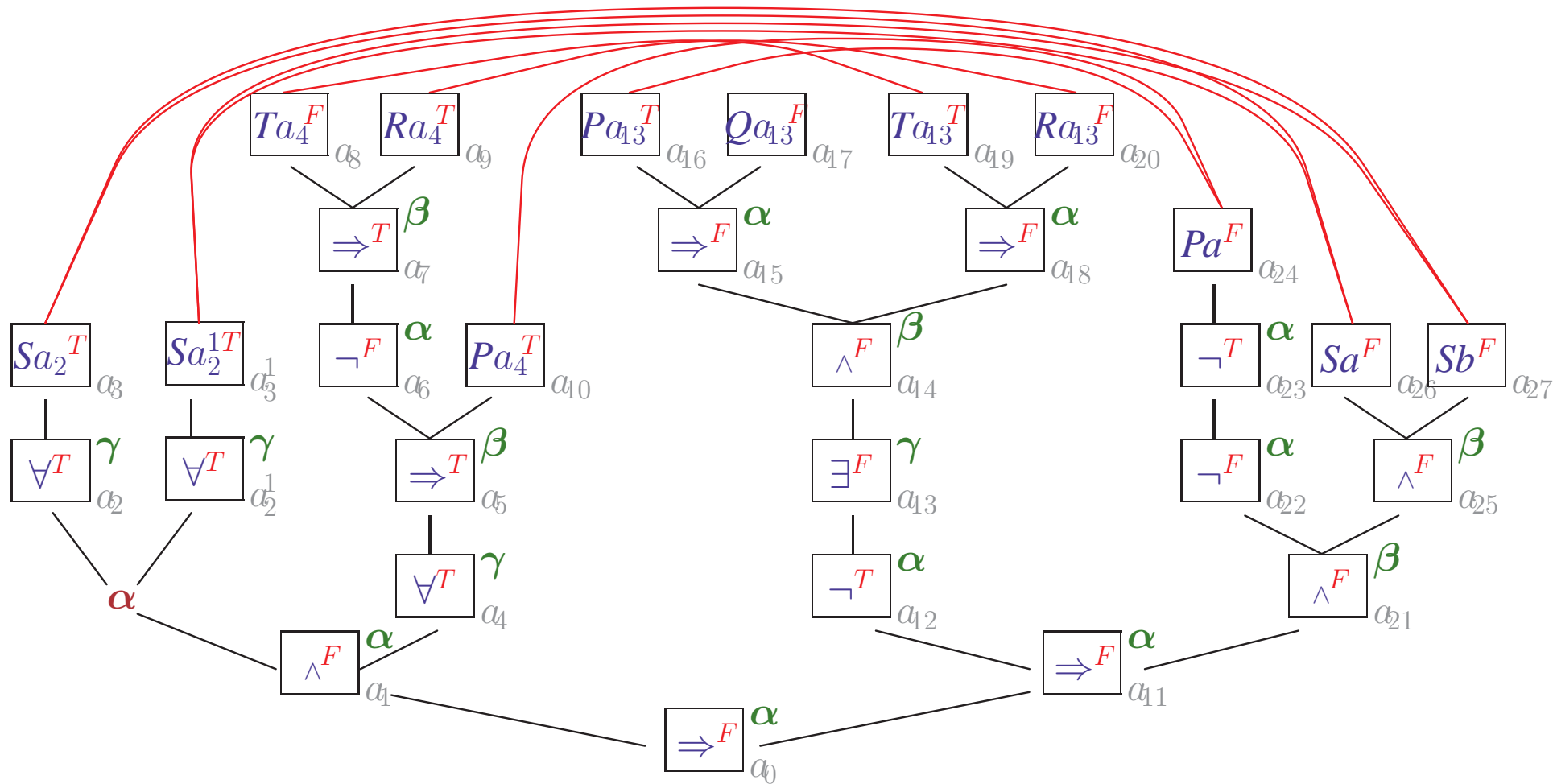
- **18 Pfade:** $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$,
 $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, ... $a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** $a_3 a_{26}$, $a_3 a_{27}$, $a_3^1 a_{26}$, $a_3^1 a_{27}$, $a_8 a_{19}$, $a_9 a_{20}$, $a_{10} a_{24}$,

PFADDE UND KONNEKTIONEN IN FORMELBÄUMEN



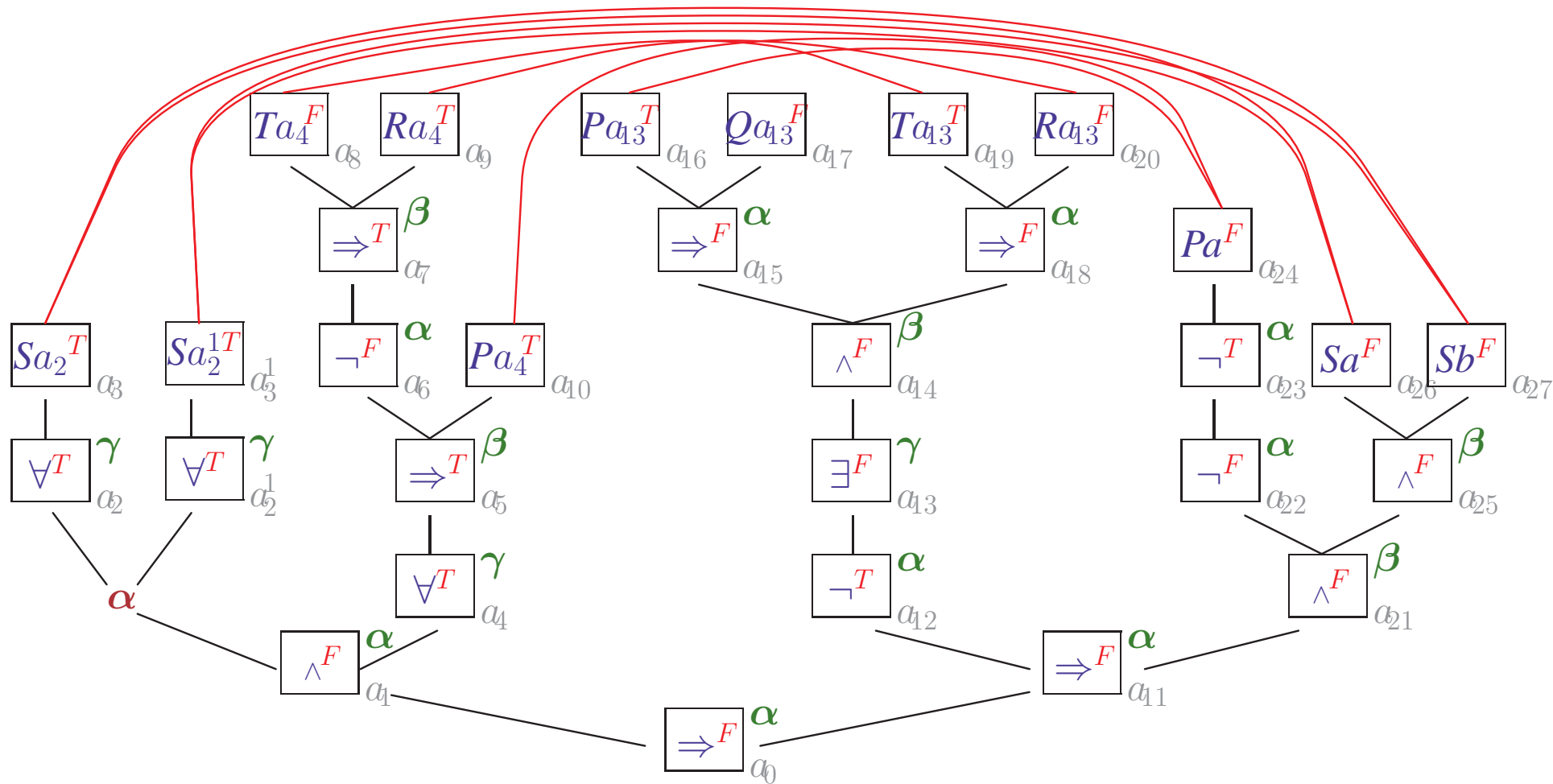
- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, ... $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26} , a_3a_{27} , $a_3^1a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19} , a_9a_{20} , $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$

PFAD E UND KONNEKT IONEN IN FORMELBÄUMEN



- **18 Pfade:** $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, ... $a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** $a_3 a_{26}$, $a_3 a_{27}$, $a_3^1 a_{26}$, $a_3^1 a_{27}$, $a_8 a_{19}$, $a_9 a_{20}$, $a_{10} a_{24}$, $a_{16} a_{24}$ – $a_3 a_{26}$, $a_3^1 a_{27}$, $a_8 a_{19}$, $a_9 a_{20}$, $a_{10} a_{24}$, $a_{16} a_{24}$ komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$

PFADDE UND KONNEKTIONEN IN FORMELBÄUMEN



- **18 Pfade:** $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}$, $a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}$, $a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}$, ... $a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** $a_3 a_{26}$, $a_3 a_{27}$, $a_3^1 a_{26}$, $a_3^1 a_{27}$, $a_8 a_{19}$, $a_9 a_{20}$, $a_{10} a_{24}$, $a_{16} a_{24}$
 - $a_3 a_{26}$, $a_3^1 a_{27}$, $a_8 a_{19}$, $a_9 a_{20}$, $a_{10} a_{24}$, $a_{16} a_{24}$ komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$
 - $a_3 a_{27}$, $a_3^1 a_{26}$, $a_8 a_{19}$, $a_9 a_{20}$, $a_{10} a_{24}$, $a_{16} a_{24}$ komplementär unter $\sigma = [a/a_2, b/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$

“Alle Zweige des Tableauxbeweises sind geschlossen”

- σ induziert **Reduktionsordnung** $\triangleleft := (< \cup \sqsubseteq)^+$
 - $v \sqsubseteq u$, falls v im term $\sigma(u)$ vorkommt (v δ -Position, u γ -Position)
($\hat{=}$ Quantor an Position v muß im Tableauxbeweis vor u freigelegt werden)
 - σ ist **zulässig**, falls \triangleleft azyklisch ($\hat{=}$ eine Tableauxreduktion ist möglich)
- **Charakterisierungstheorem für klassische Logik**

Eine Formel F ist gültig, wenn es

 - eine Multiplizität μ ,
 - eine zulässige Substitution σ
 - und eine Menge \mathcal{C} von σ -komplementären Konnektionen gibt,
so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus \mathcal{C} enthält

BEWEIS DES CHARAKTERISIERUNGSTHEOREMS (SKIZZE)

Eine Formel F ist gültig, wenn es eine Multiplizität μ , eine zulässige Substitution σ und eine Menge \mathcal{C} von σ -komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus \mathcal{C} enthält

- **Korrektheit: erzeuge Tableauxbeweis aus μ und σ**

- Transformiere (azyklische) Reduktionsordnung \triangleleft in lineare Ordnung
- Wende Tableauxregeln in der Reihenfolge dieser Ordnung an
- Instantiiere δ -Formeln wie im annotierten Formelbaum
- Instantiiere γ -Formeln entsprechend der Substitution σ

Per Konstruktion ist jeder Zweig des Tableaus geschlossen

- **Vollständigkeit: erzeuge \mathcal{C} , μ , σ aus Tableauxbeweis**

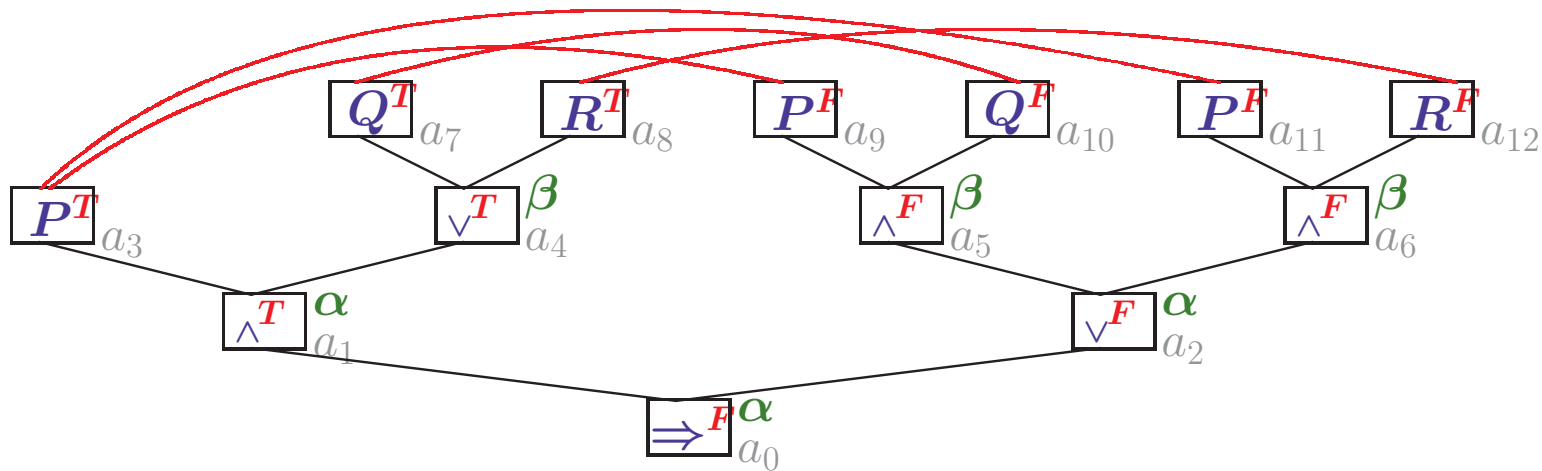
- Generiere annotierten Formelbaum
- Für γ -Knoten ist μ die Anzahl der Instanzen im Tableauxbeweis
- Wähle Substitution σ passend zu den ausgeführten γ -Regeln
 σ ist zulässig aufgrund der Bedingungen an γ - und δ -Regeln
- Wähle \mathcal{C} als Menge der Formelpaare, welche die Zweige abschließen
Alle Konnektionen sind σ -komplementär

Per Konstruktion enthält jeder Pfad durch F eine Konnektion aus \mathcal{C}

Prüfe Voraussetzungen des Charakterisierungstheorems

- **Identifiziere mögliche Konnektionen**
 - Statische Konstruktion nach Aufbau des Formelbaums
- **Systematische Pfadüberprüfung**
 - Teste, ob jeder Pfad durch F mindestens eine Konnektion enthält
- **Unifikation**
 - Bestimme Substitution σ , die Konnektionen komplementär macht
- **Zulässigkeitstest**
 - Prüfe, ob die aus σ induzierte Reduktionsordnung \triangleleft azyklisch ist
- **Bestimme Multiplizität**
 - Erhöhe Multiplizität μ von γ -Knoten schrittweise, wenn erforderlich

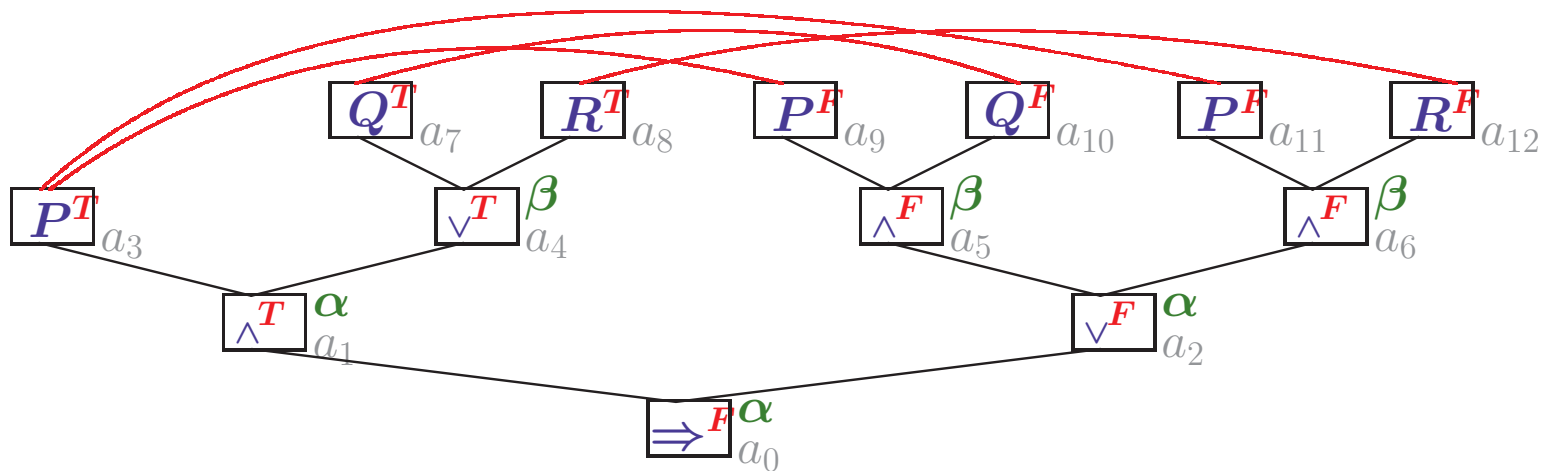
BEWEIS FÜR $(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$



- **Alle Pfade enthalten eine Konnektion**

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$,
 $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$, $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$,
 $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

BEWEIS FÜR $(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$



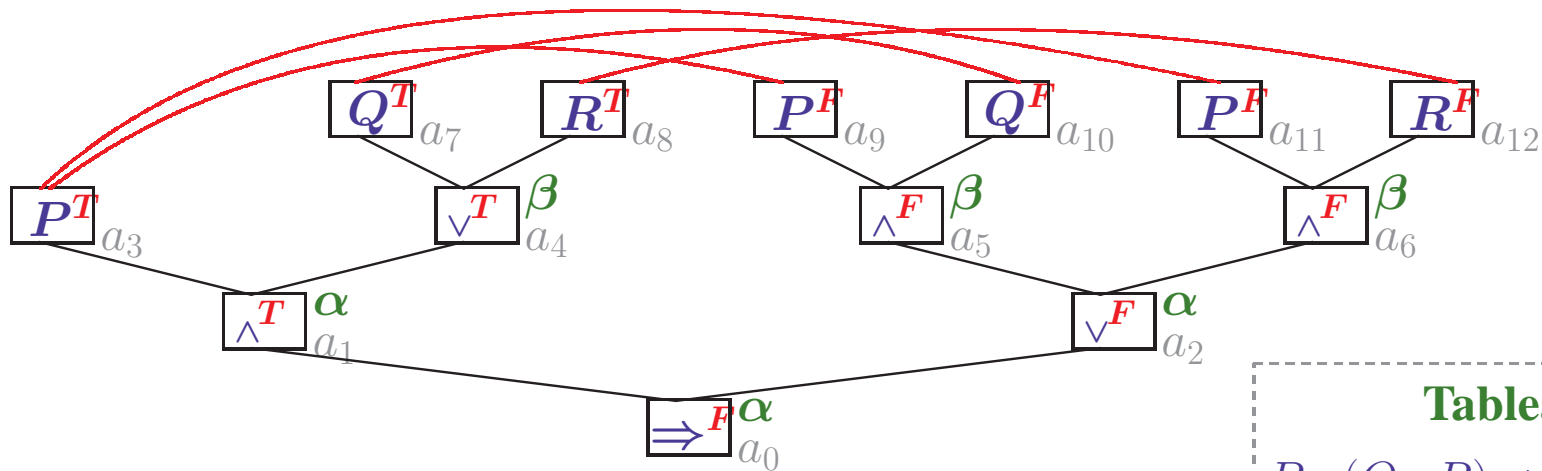
- **Alle Pfade enthalten eine Konnektion**

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$,
 $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$, $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$,
 $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

- **Die Formel ist gültig**

- Alle Konnektionen sind komplementär

BEWEIS FÜR $(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$



- **Alle Pfade enthalten eine Konnektion**

- $a_3 a_7 a_9 a_{11}$, $a_3 a_7 a_9 a_{12}$, $a_3 a_7 a_{10} a_{11}$,
 $a_3 a_7 a_{10} a_{12}$, $a_3 a_8 a_9 a_{11}$, $a_3 a_8 a_9 a_{12}$,
 $a_3 a_8 a_{10} a_{11}$, $a_3 a_8 a_{10} a_{12}$

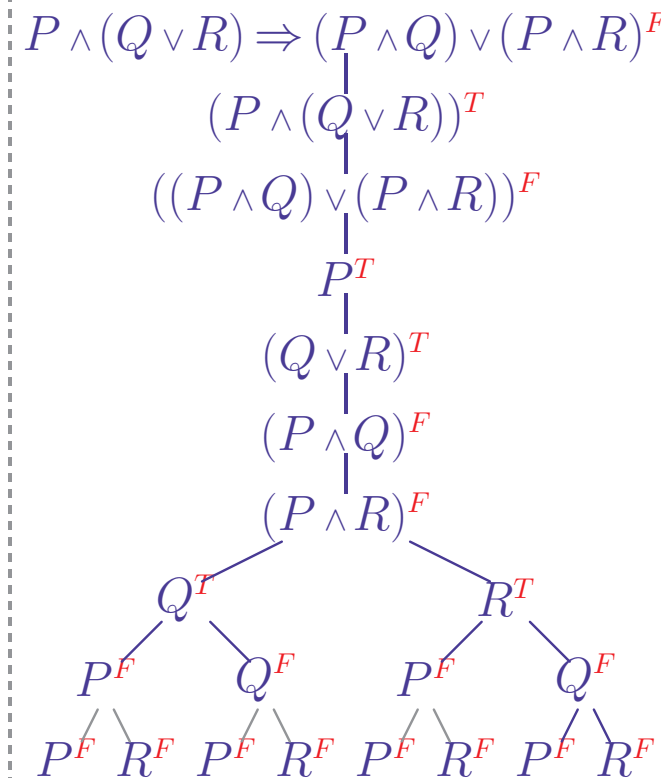
- **Die Formel ist gültig**

- Alle Konnektionen sind komplementär

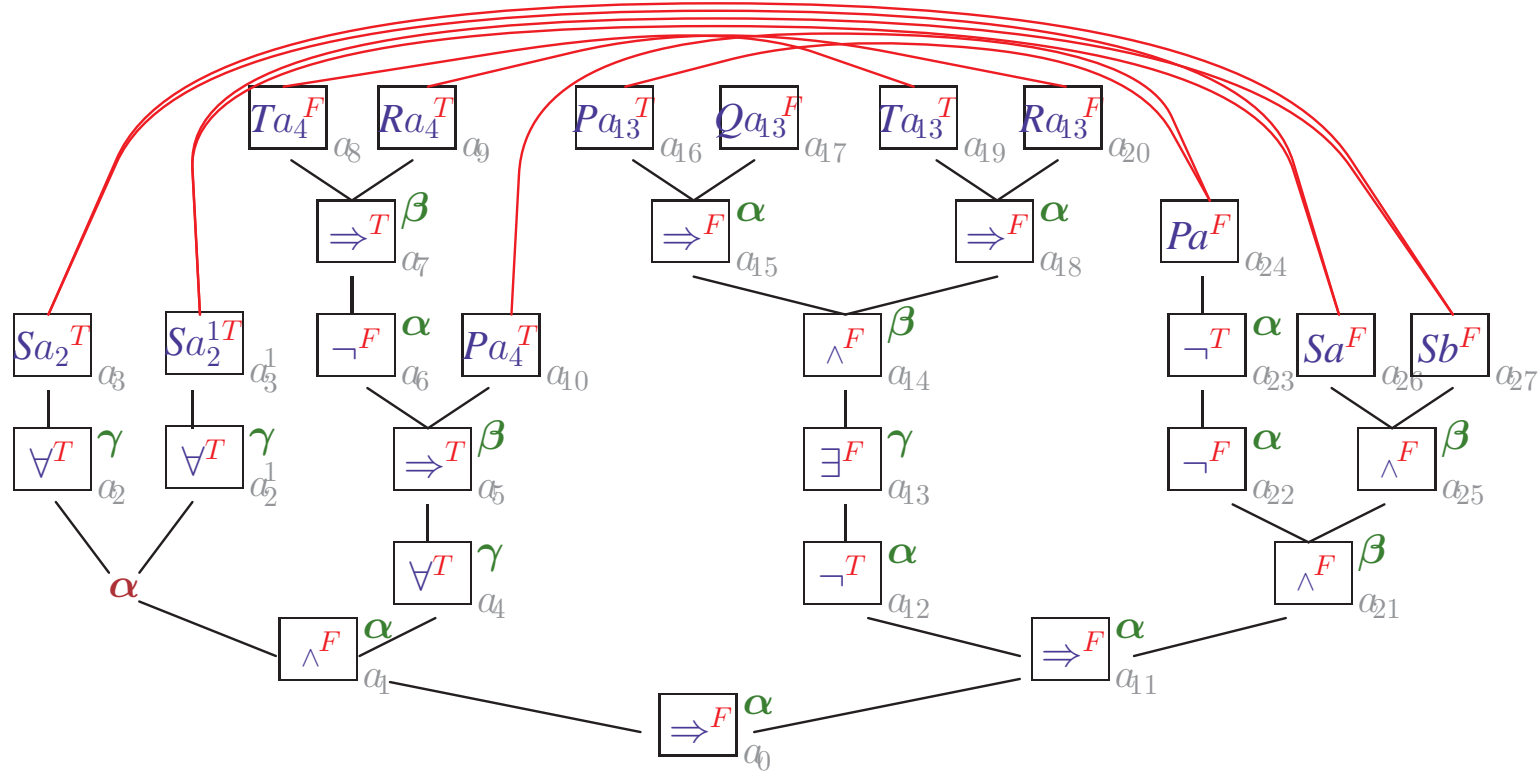
- **Reduktionsordnung ist Baumordnung**

- Mögliche Linearisierung: $a_0 a_1 a_2 a_4 a_5 a_6$

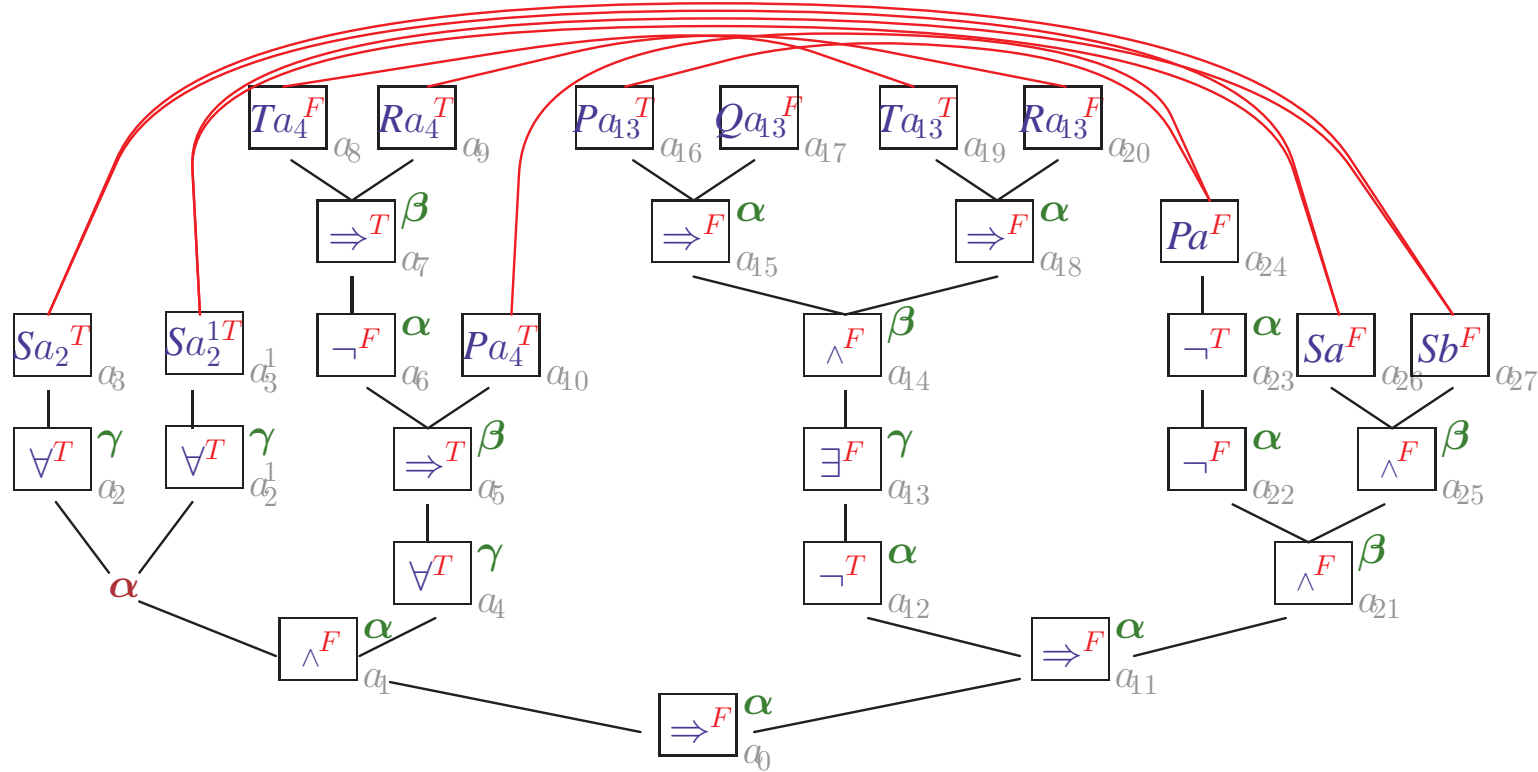
Tableauxbeweis



MATRIXBEWEIS MIT SUBSTITUTION



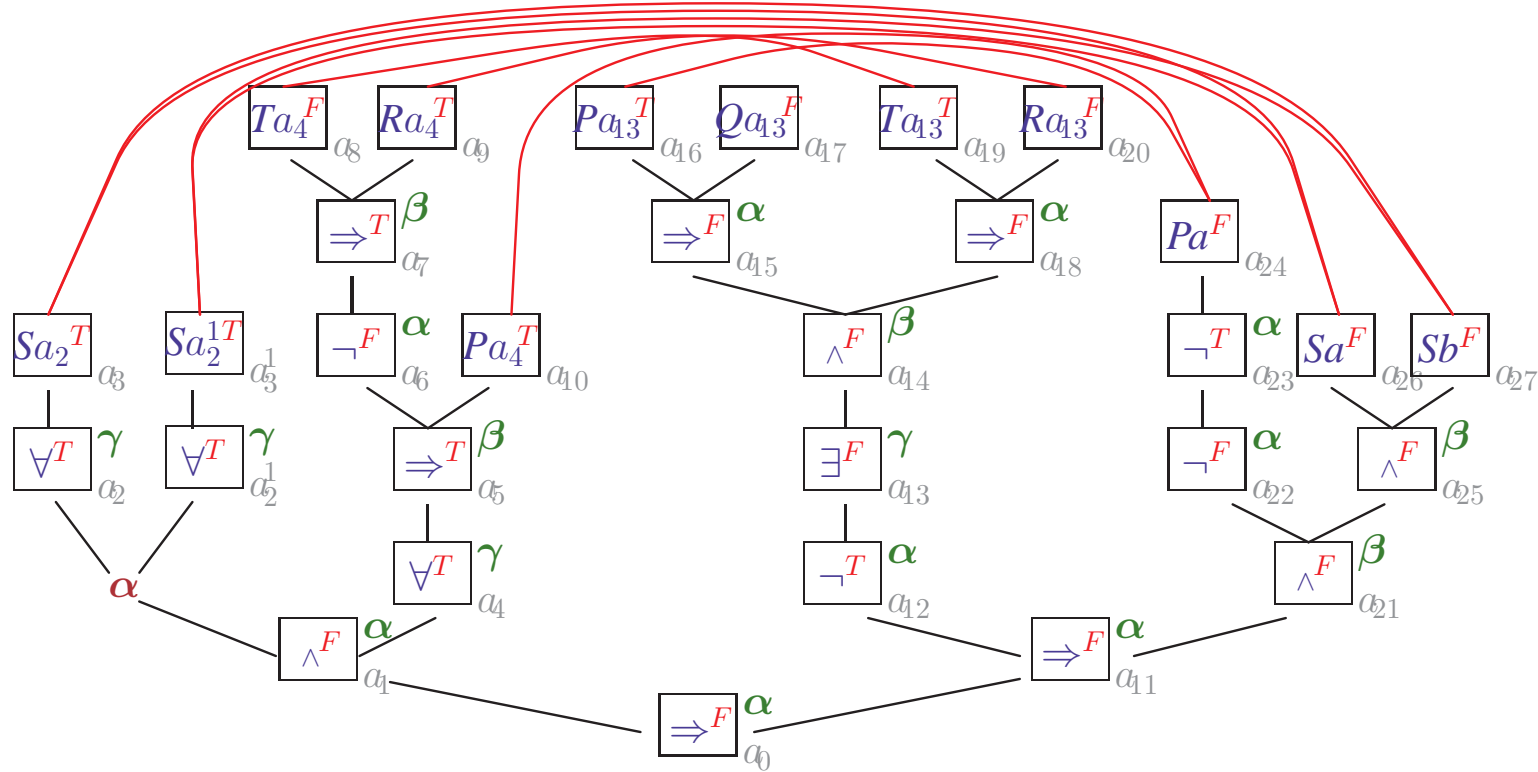
MATRIXBEWEIS MIT SUBSTITUTION



- Alle 18 Pfade enthalten eine Konnektion:

$$\begin{aligned}
 & a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}, a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}, a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}, a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24}, \\
 & a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}, a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}, a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}, \dots a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}, \dots \\
 & \mathcal{C} = \{ \{a_3 a_{27}\}, \{a_3^1 a_{26}\}, \{a_8 a_{19}\}, \{a_9 a_{20}\}, \{a_{10} a_{24}\}, \{a_{16} a_{24}\} \}
 \end{aligned}$$

MATRIXBEWEIS MIT SUBSTITUTION



- Alle 18 Pfade enthalten eine Konnektion:

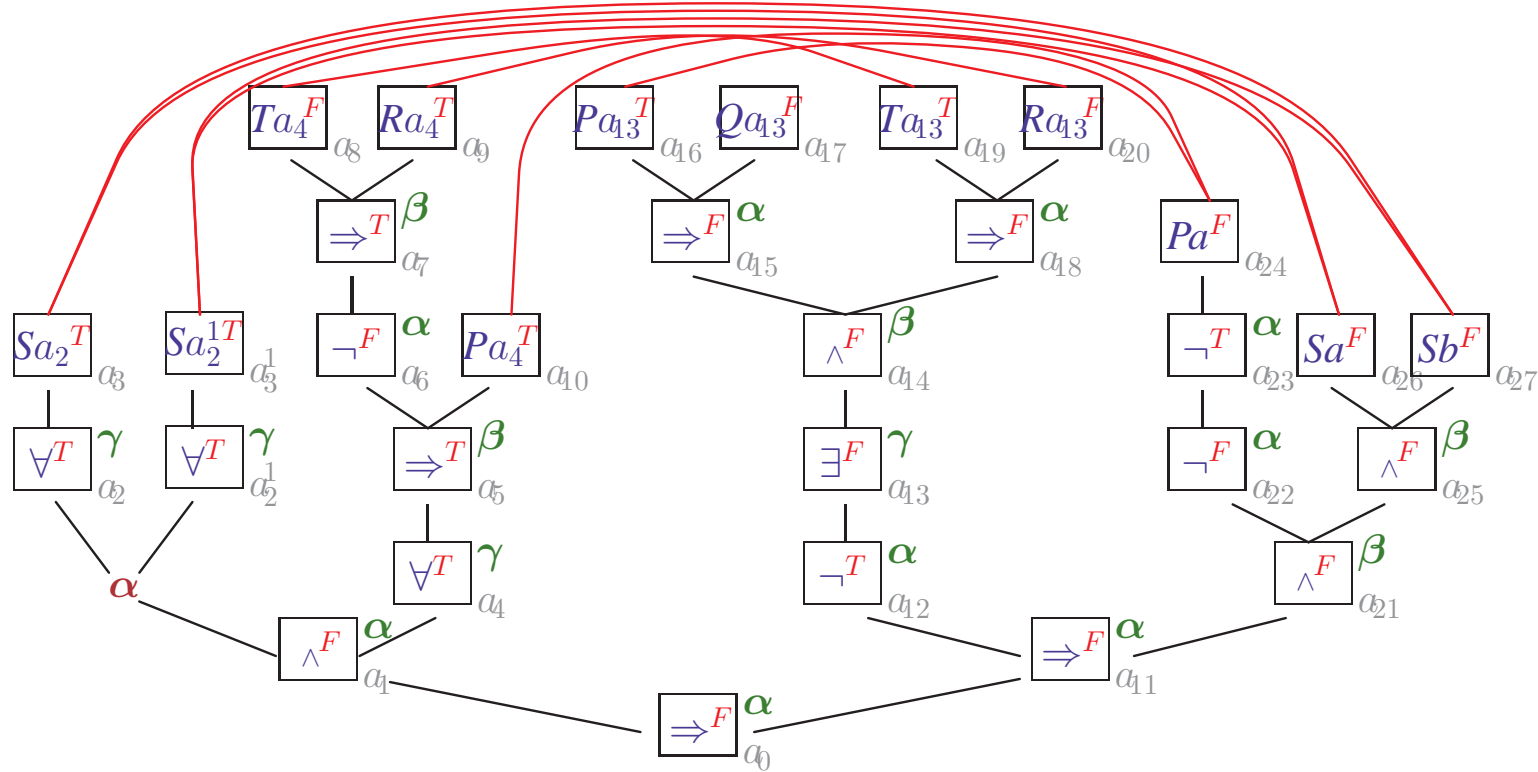
$$a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}, a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}, a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}, a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24},$$

$$a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}, a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}, a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}, \dots a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}, \dots$$

$$\mathcal{C} = \{ \{a_3 a_{27}\}, \{a_3^1 a_{26}\}, \{a_8 a_{19}\}, \{a_9 a_{20}\}, \{a_{10} a_{24}\}, \{a_{16} a_{24}\} \}$$

- \mathcal{C} ist komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$
 - σ ist zulässig, da keine δ -Positionen vorhanden ($\triangleleft = <$)

MATRIXBEWEIS MIT SUBSTITUTION



- **Alle 18 Pfade enthalten eine Konnektion:**

$$a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{24}, a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{26}, a_3 a_3^1 a_8 a_{16} a_{17} a_{27}, a_3 a_3^1 a_8 a_{19} a_{20} a_{24},$$

$$a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{26}, a_3 a_3^1 a_8 a_{18} a_{19} a_{27}, a_3 a_3^1 a_9 a_{16} a_{17} a_{24}, \dots a_3 a_3^1 a_{10} a_{16} a_{17} a_{24}, \dots$$

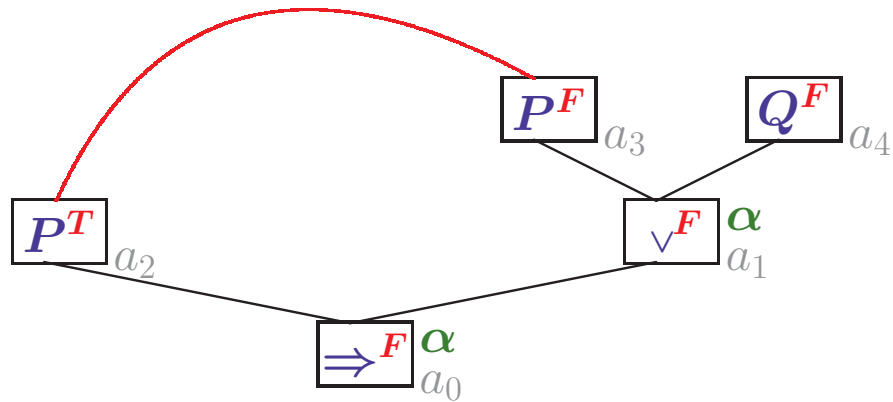
$$\mathcal{C} = \{ \{a_3 a_{27}\}, \{a_3^1 a_{26}\}, \{a_8 a_{19}\}, \{a_9 a_{20}\}, \{a_{10} a_{24}\}, \{a_{16} a_{24}\} \}$$

- \mathcal{C} ist komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$

– σ ist zulässig, da keine δ -Positionen vorhanden ($\triangleleft = <$)

- **Die Formel ist gültig**

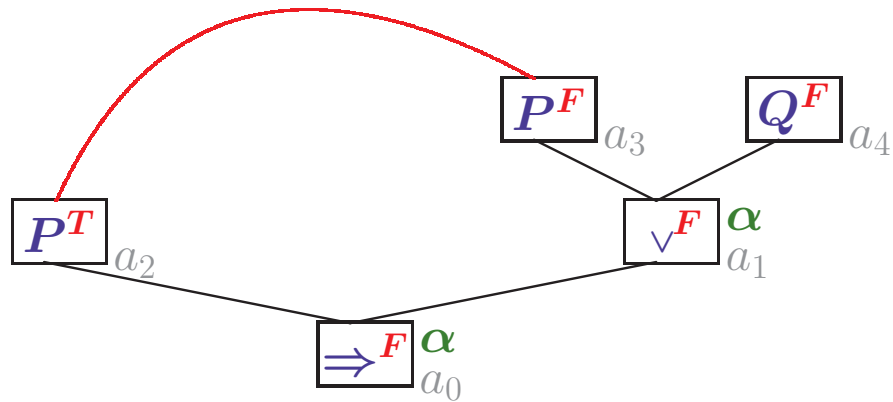
ERFOLGREICHE UND ERFOLGLOSE BEWEISVERSUCHE



Einziger Pfad $a_2 a_3 a_4$ ist komplementär

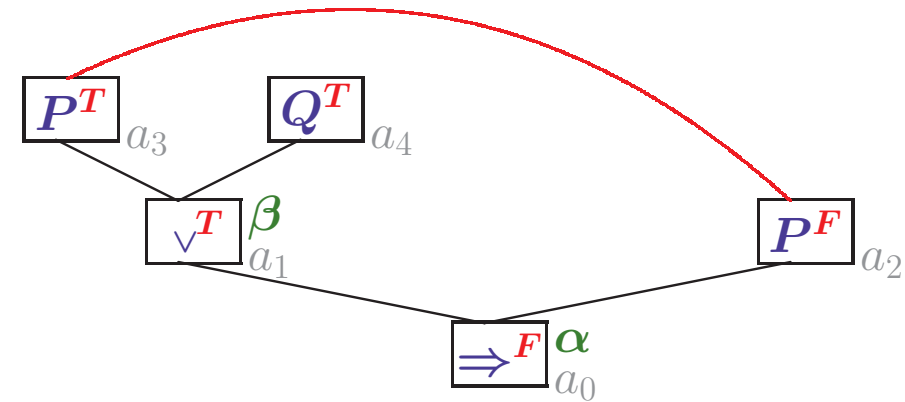
$P \Rightarrow P \vee Q$ ist gültig

ERFOLGREICHE UND ERFOLGLOSE BEWEISVERSUCHE



Einziger Pfad $a_2a_3a_4$ ist komplementär

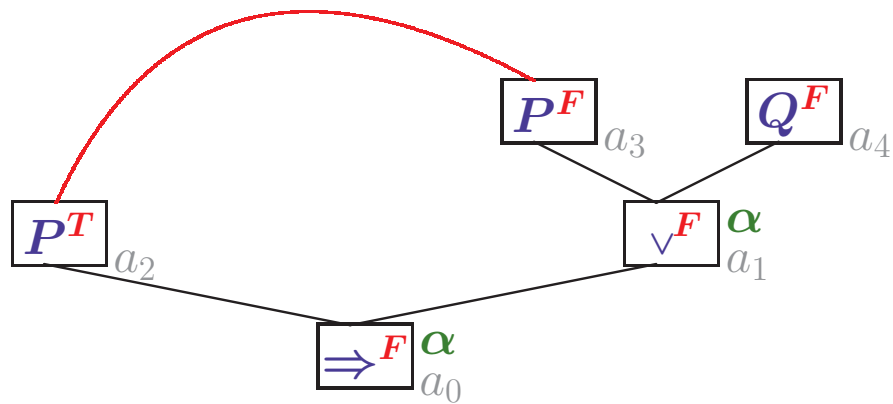
$P \Rightarrow P \vee Q$ ist gültig



Zweiter Pfad a_4a_2 ist ohne Konnektion

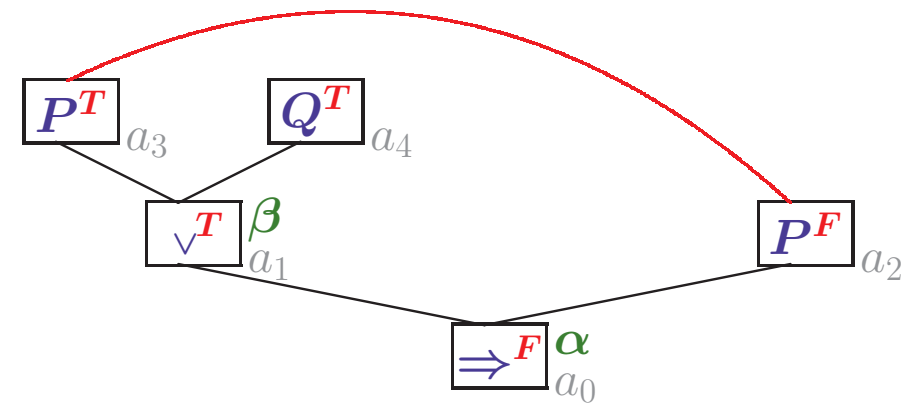
$P \vee Q \Rightarrow P$ ist nicht gültig

ERFOLGREICHE UND ERFOLGLOSE BEWEISVERSUCHE



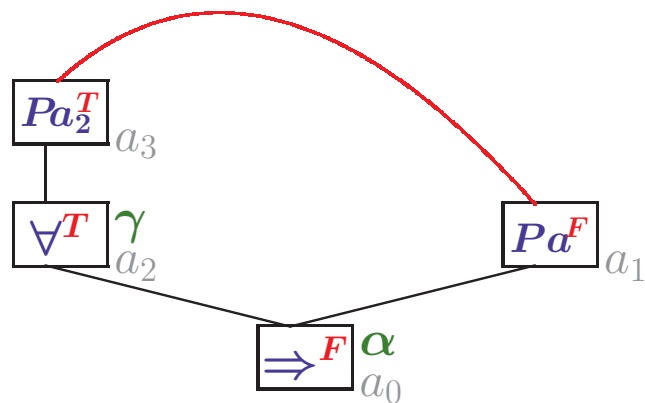
Einziger Pfad $a_2 a_3 a_4$ ist komplementär

$P \Rightarrow P \vee Q$ ist gültig



Zweiter Pfad $a_4 a_2$ ist ohne Konnektion

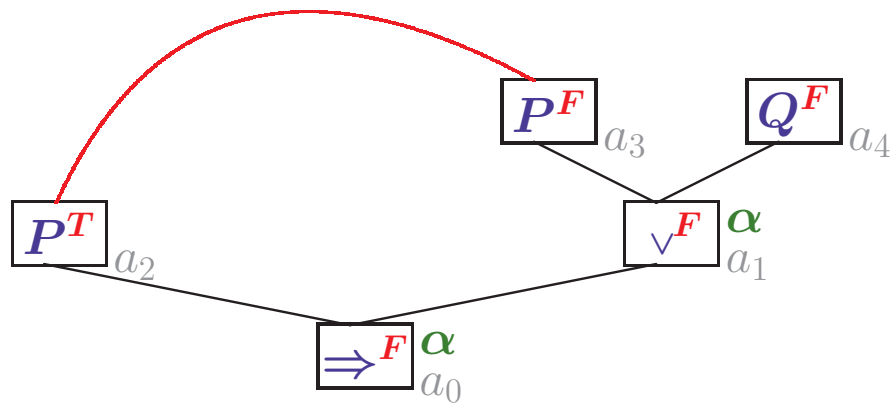
$P \vee Q \Rightarrow P$ ist nicht gültig



Pfad $a_3 a_1$ komplementär mit $\sigma = [a/a_2]$

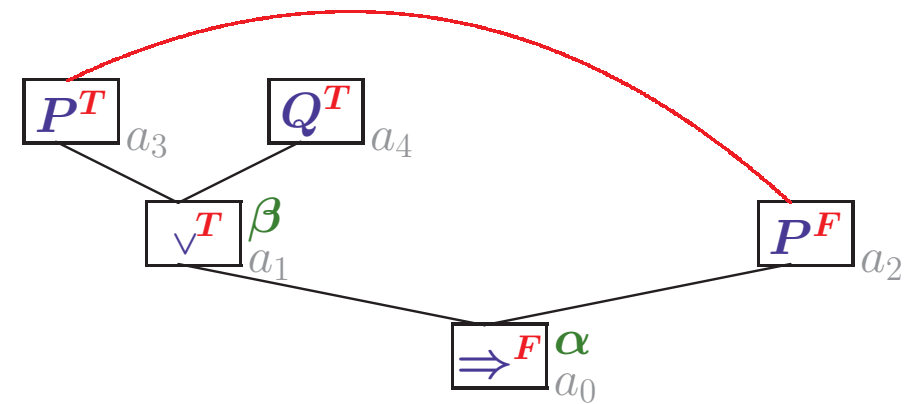
$\forall x Px \Rightarrow Pa$ ist gültig

ERFOLGREICHE UND ERFOLGLOSE BEWEISVERSUCHE



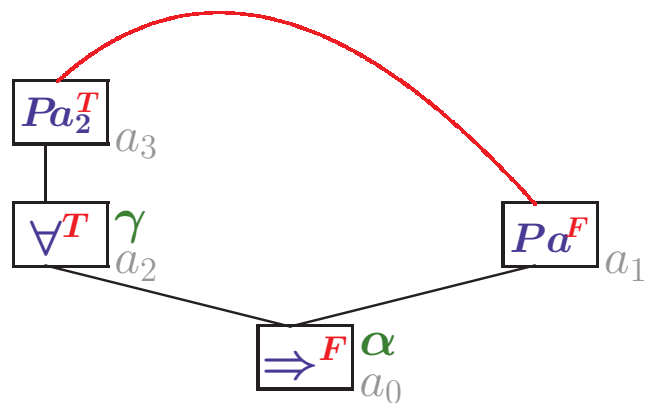
Einziger Pfad $a_2 a_3 a_4$ ist komplementär

$P \Rightarrow P \vee Q$ ist gültig



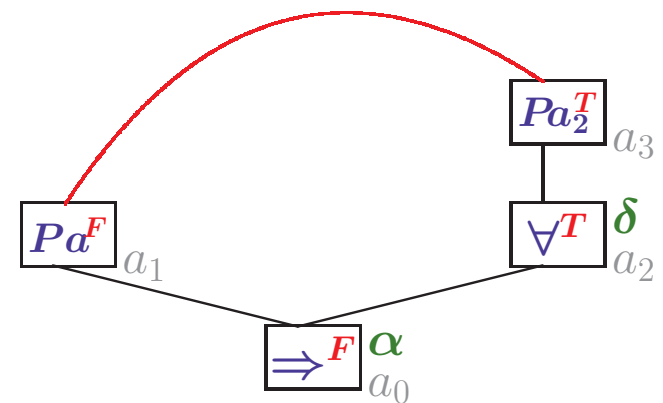
Zweiter Pfad $a_4 a_2$ ist ohne Konnektion

$P \vee Q \Rightarrow P$ ist nicht gültig



Pfad $a_3 a_1$ komplementär mit $\sigma = [a/a_2]$

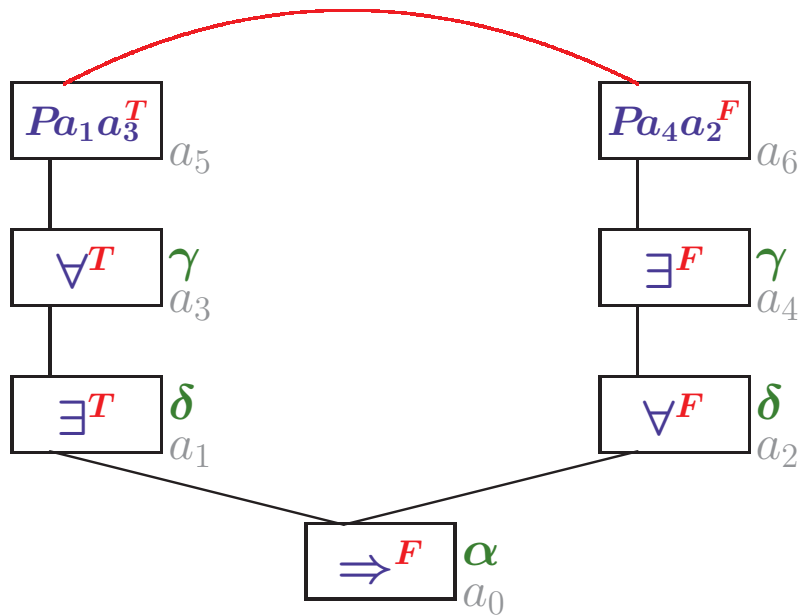
$\forall x Px \Rightarrow Pa$ ist gültig



Pfad $a_1 a_3$ ist nicht unifizierbar

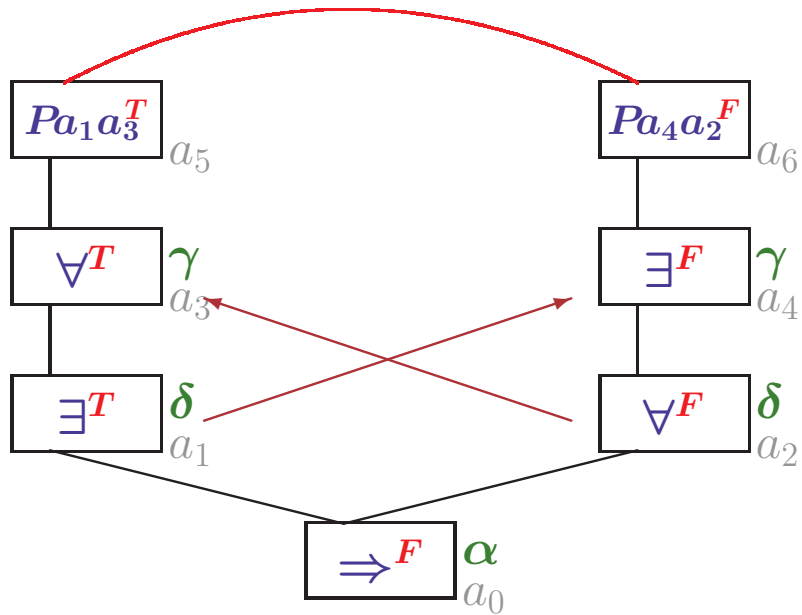
$Pa \Rightarrow \forall x Px$ ist nicht gültig

ERFOLGREICHE UND ERFOLGLOSE BEWEISVERSUCHE



Pfad $a_5 a_6$ komplementär mit $\sigma = [a_2, a_1 / a_3, a_4]$

ERFOLGREICHE UND ERFOLGLOSE BEWEISVERSUCHE

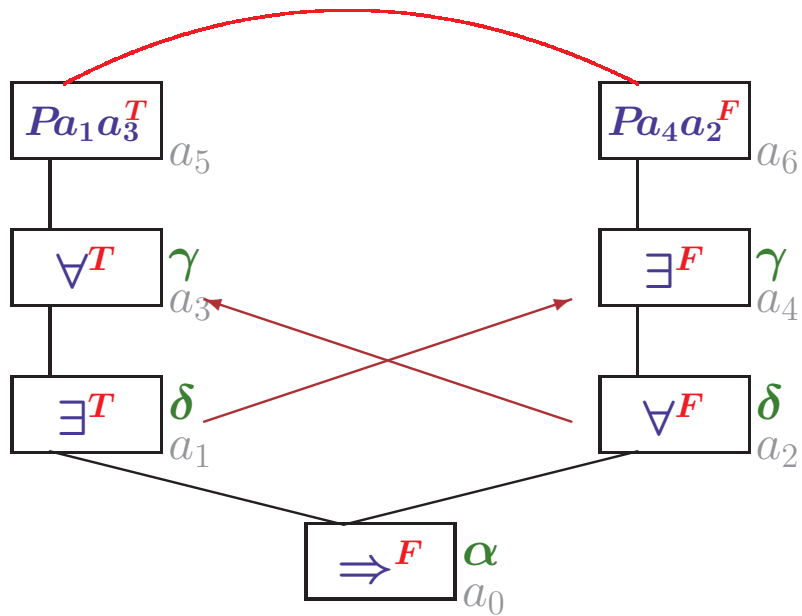


Pfad a_5a_6 komplementär mit $\sigma = [a_2, a_1/a_3, a_4]$

Induzierte Reduktionsordnung ist azyklisch

$\exists x \forall y Pxy \Rightarrow \forall y \exists x Pxy$ ist gültig

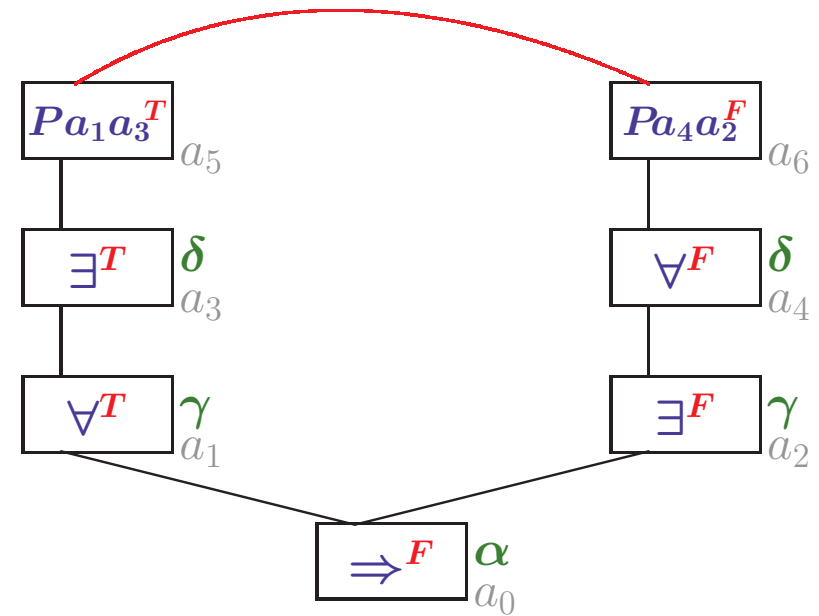
ERFOLGREICHE UND ERFOLGLOSE BEWEISVERSUCHE



Pfad $a_5 a_6$ komplementär mit $\sigma = [a_2, a_1 / a_3, a_4]$

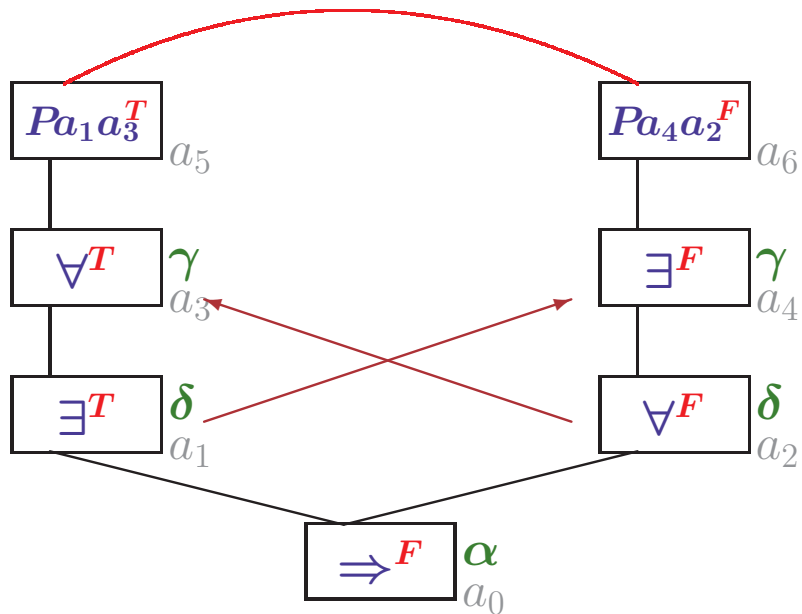
Induzierte Reduktionsordnung ist azyklisch

$\exists x \forall y Pxy \Rightarrow \forall y \exists x Pxy$ ist gültig



Pfad $a_5 a_6$ komplementär mit $\sigma = [a_3, a_4 / a_2, a_1]$

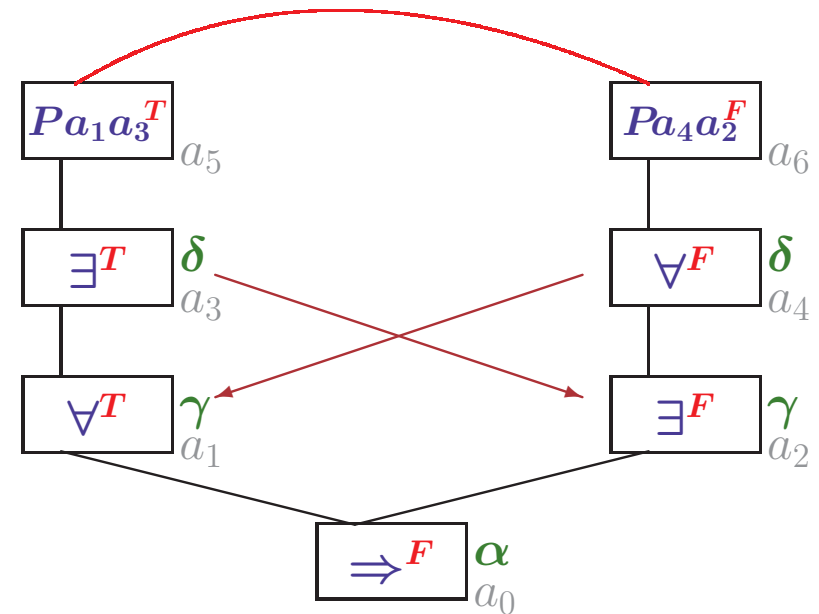
ERFOLGREICHE UND ERFOLGLOSE BEWEISVERSUCHE



Pfad a_5a_6 komplementär mit $\sigma = [a_2, a_1/a_3, a_4]$

Induzierte Reduktionsordnung ist azyklisch

$\exists x \forall y Pxy \Rightarrow \forall y \exists x Pxy$ ist gültig



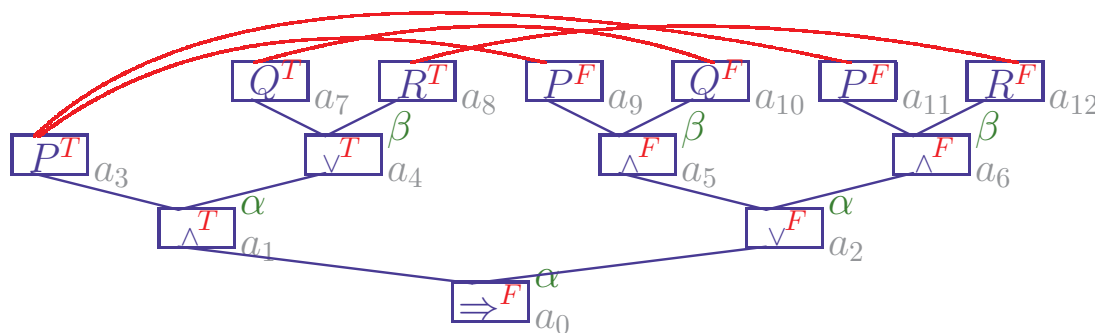
Pfad a_5a_6 komplementär mit $\sigma = [a_3, a_4/a_2, a_1]$

Induzierte Reduktionsordnung ist zyklisch

$\forall x \exists y Pxy \Rightarrow \exists y \forall x Pxy$ ist nicht gültig

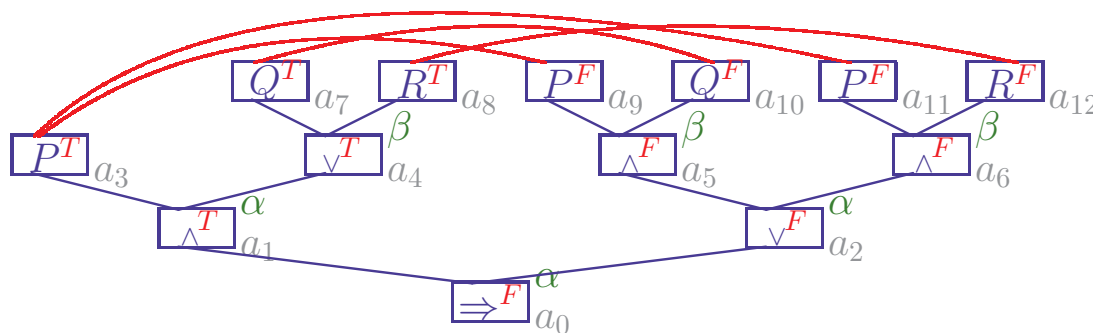
2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

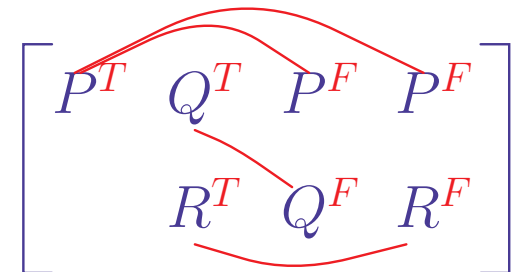
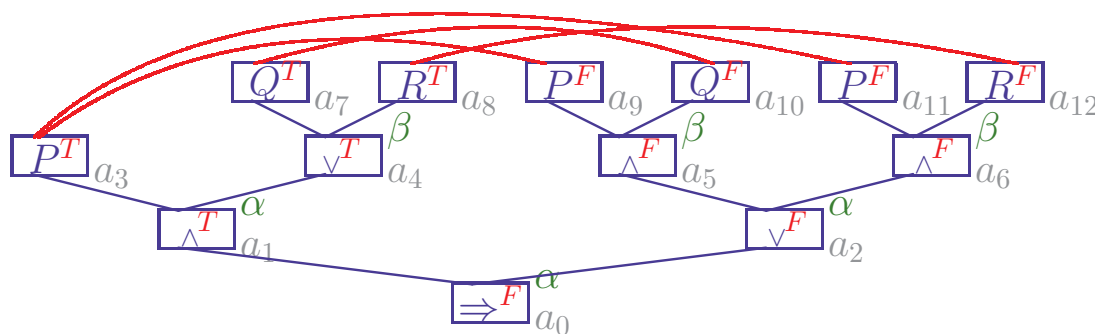
- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



$$\begin{bmatrix} P^T & Q^T & P^F & P^F \\ R^T & Q^F & R^F & \end{bmatrix}$$

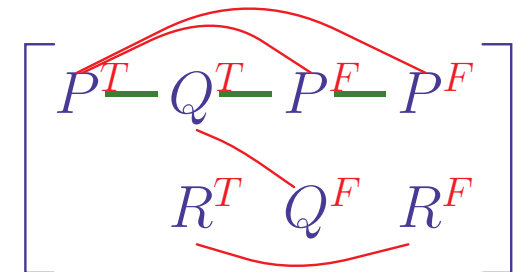
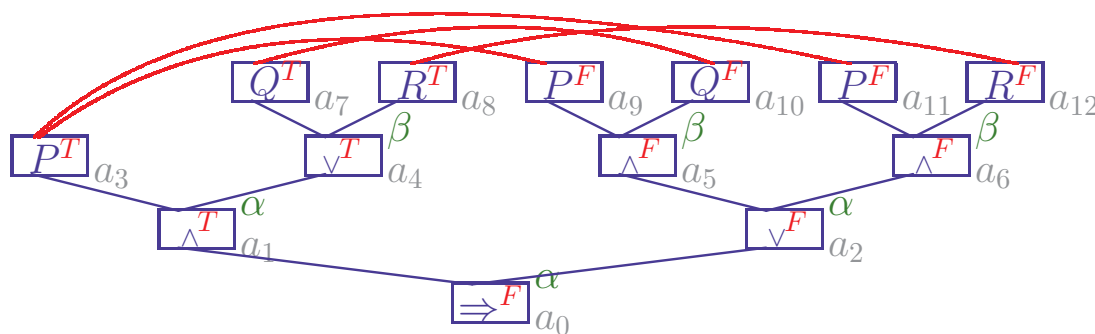
2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



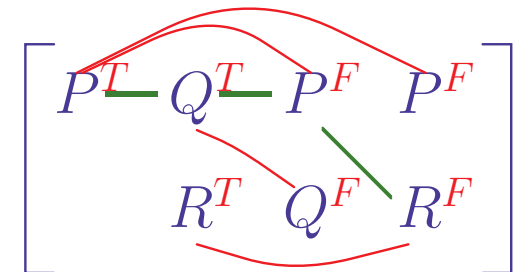
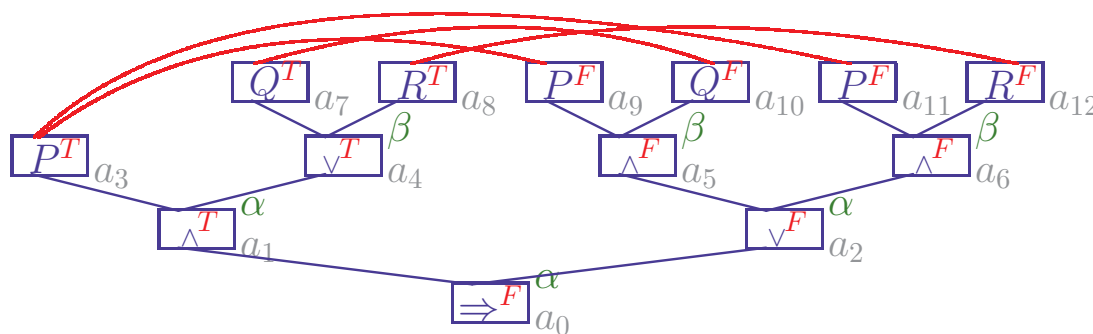
2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



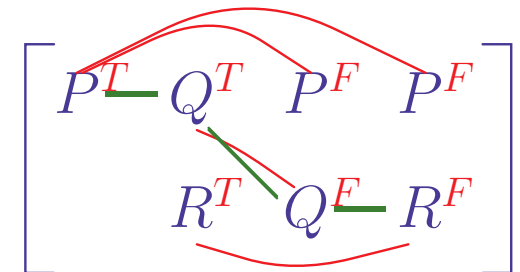
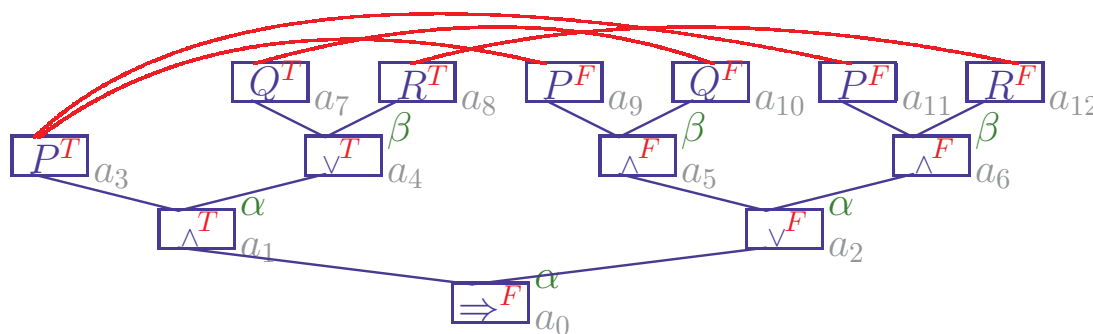
2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



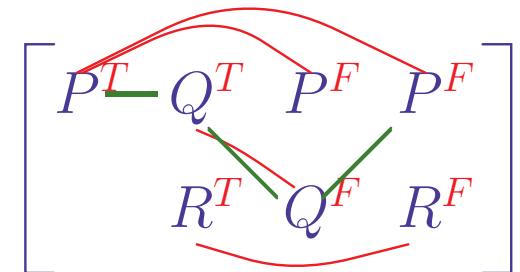
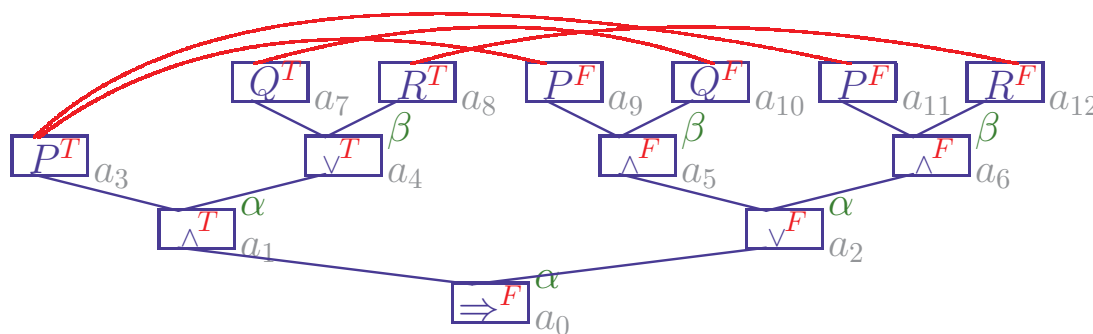
2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



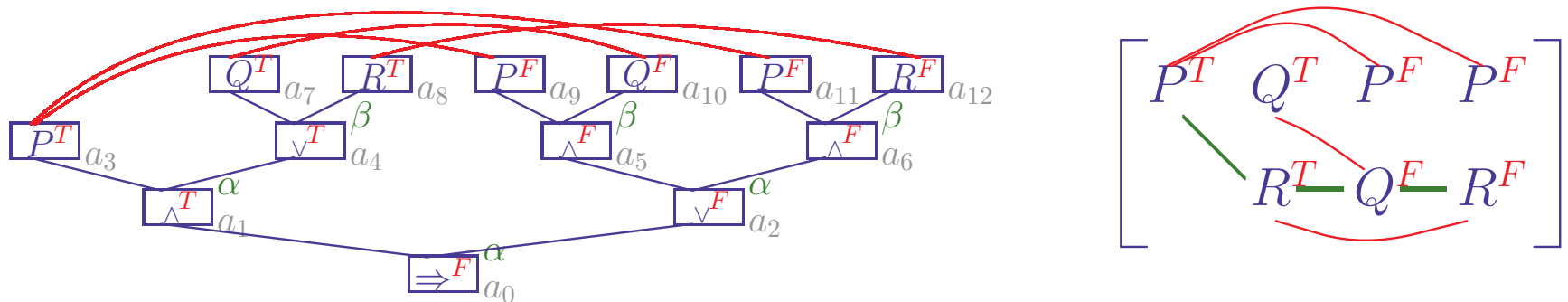
2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



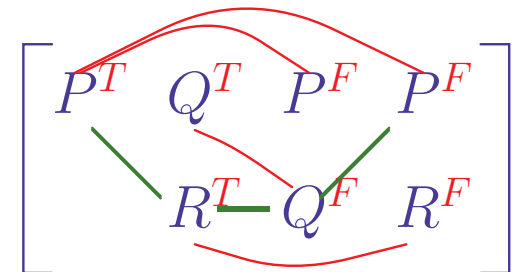
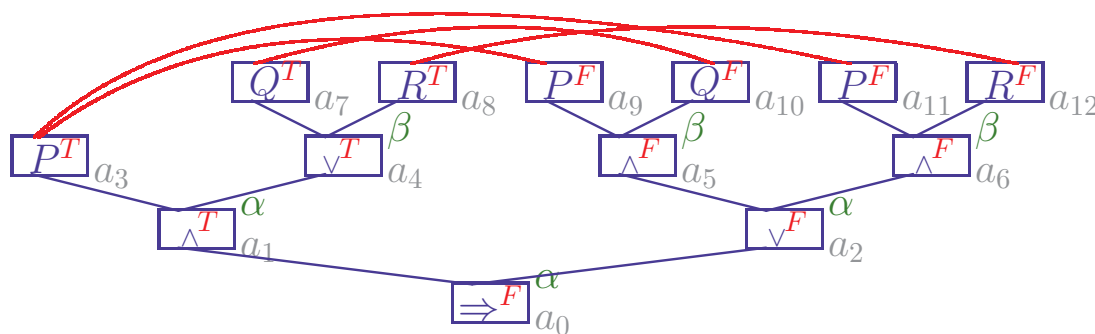
2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



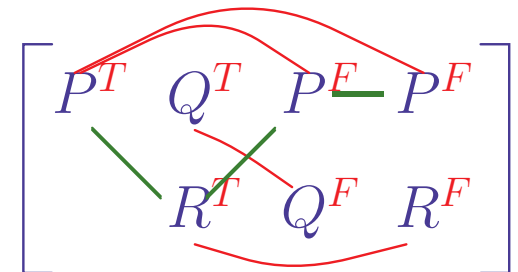
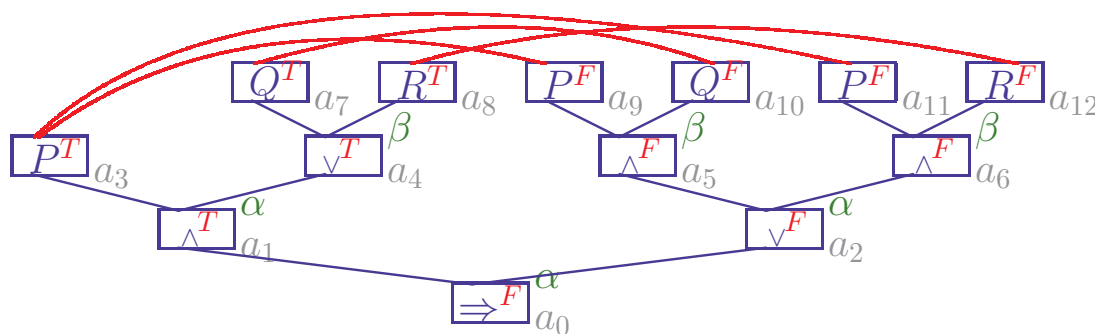
2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



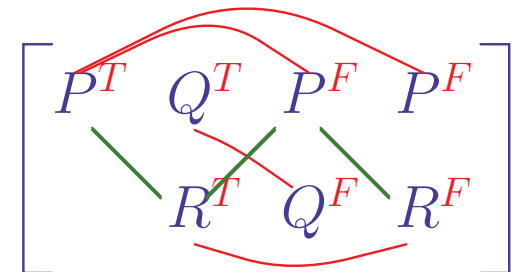
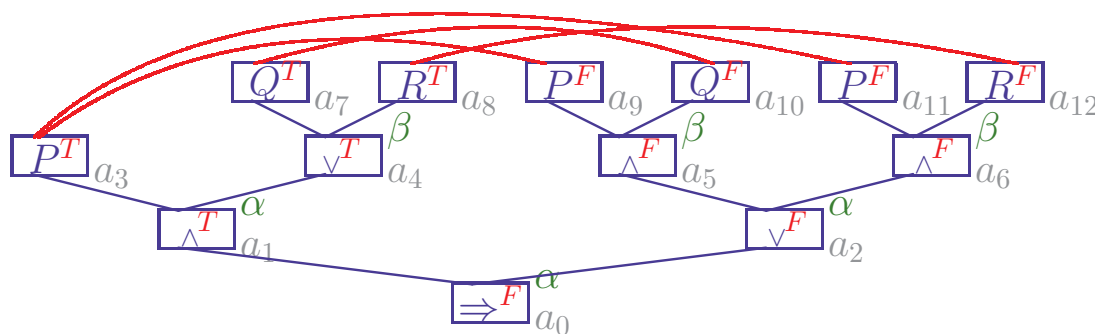
2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β -Struktur**
 - Nur die Atome sind beweisrelevant
 - Pfade sind Ketten von Literalen in α -Beziehung
 - Verschiedene Pfade werden durch β -Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β -Struktur**
 - Literale in α -Beziehung erscheinen nebeneinander
 - Literale in β -Beziehung erscheinen übereinander
 - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



Zwei grundsätzliche Vorgehensweisen

- **“Treue” Repräsentation des annotierten Formelbaums**
 - Variablen in Literalen sind Positionen der zugehörigen γ/δ -Knoten
 - γ - und δ -Variablen sind als solche gekennzeichnet
 - Konnektierte Literale werden unifiziert
 - Zulässigkeit der Substitution wird anhand des Formelbaums geprüft
- **Transformiere Formel zuvor in Skolemnormalform**
 - Es gibt nur noch γ -Variablen in Literalen
 - δ -Variablen in Literalen werden durch Funktionen ersetzt, welche Abhängigkeiten von γ -Variablen codieren
 - Bei der Unifikation können γ -Variablen nicht durch δ -Variablen ersetzt werden, die von ihnen abhängen
 - Alle generierten Substitutionen sind zulässig (kein Test erforderlich)
 - Beweis kann **ausschließlich innerhalb der Matrix** geführt werden

TRANSFORMIERE $\exists x \forall y P(x, y)$ IN SKOLEMNORMALFORM

- **Existenzquantifizierte Variable x ist γ -Variable**
 - Im Tableauxbeweis darf x durch einen beliebigen Term t ersetzt werden
- **Allquantifizierte Variable y ist δ -Variable**
 - Im Tableauxbeweis muß y durch eine neue Variable a ersetzt werden
 - Die Variable a darf in nicht bereits t vorkommen
- **Verhindere unzulässige Unifikationen**
 - Modifiziere Formel so, daß Unifikation x nicht durch einen Term ersetzen kann, der die neue Variable a für y enthält
 - Wähle **neues Funktionssymbol f** und ersetze y durch den Term $f(x)$
 - $f(x)$ repräsentiert **Beliebigkeit von a** und **Abhängigkeit von x**
 - Da f neu ist, kann $f(x)$ genauso interpretiert werden wie a
 - Eine Substitution kann x nicht durch $f(x)$ ersetzen
- **Erzeuge die Formel $\exists x P(x, f(x))$**

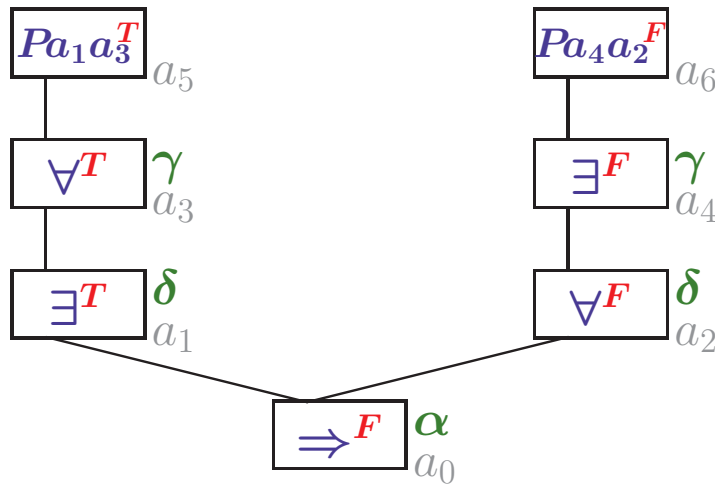
- **Normalformen für eine Formel F**
 - **Pränexnormalform**: Quantoren erscheinen nur zu Beginn der Formel
 - **Skolemnormalform**: Formel F enthält nur Quantoren vom Typ γ
Gilt zusätzlich Pränexnormalform, dann hat F nur Existenzquantoren
- **Skolemisierung: Transformation in Skolemnormalform**
 - Ausgangspunkt Pränexnormalform: eliminiere Allquantoren
Transformiere $\exists x_1 \dots x_n \forall y F$ in $\exists x_1 \dots x_n F[f(x_1 \dots x_n)/y]$ wobei f neu
 - Allgemein: eliminiere δ -Quantoren und δ -Variablen
Transformiere $Q_\delta y F$ in $F[f(a_1 \dots a_n)/y]$ wobei f neu ist und die a_i die γ -Vorfahren des Quantors Q_δ sind
- **Beispiele**
 - Skolemisierung von $\exists x \forall y Pxy \Rightarrow \forall y \exists x Pxy$ ergibt $\forall y Pay \Rightarrow \exists x Pxb$
 - ... von $\forall x \exists y Pxy \Rightarrow \exists y \forall x Pxy$ ergibt $\forall x P(x, fx) \Rightarrow \exists y P(gy, y)$

SKOLEMISIERUNG ERHÄLT GÜLTIGKEIT

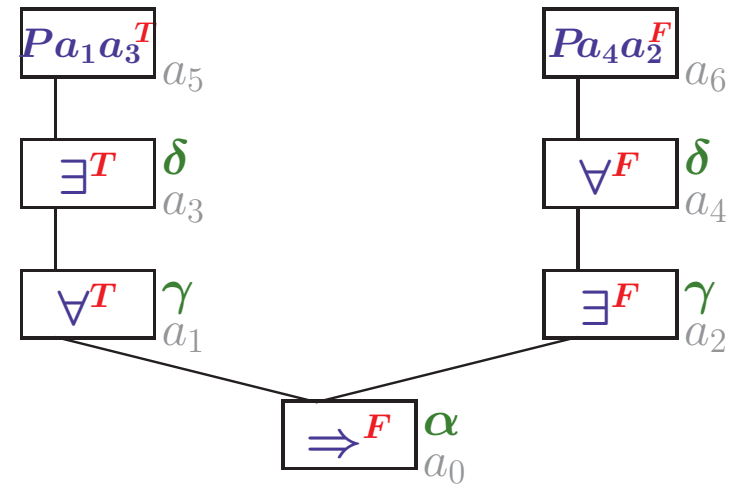
- **F ist gültig g.d.w. die Skolemisierung von F gültig ist**
 - Beweis: Induktion über Skolemisierungsschritte im Formelbaum
 - Kernargumente sind die folgenden
 - Für jede Interpretation ι und jedes $u \in \mathcal{U}$ gibt es ein $F \in \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ mit $F(\iota(x)) = u$, also $\iota_f^F(fx) = \iota_a^u(a)$
 - Für jede Interpretation ι gilt
$$\iota(\delta) \leftrightarrow \iota_a^u(\delta(a)) \text{ für ein neues } a \text{ und ein } u \in \mathcal{U}$$
$$\leftrightarrow \iota_f^F(\delta(fx)) \text{ für ein neues } f \text{ und ein } F \in \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$$
 - Für jede Interpretation ι' gibt es ι, f, F mit $\iota' = \iota_f^F$
 - δ gültig $\leftrightarrow \iota(\delta)$ bzw. $\iota_f^F(\delta(fx))$ für alle $\iota \leftrightarrow \iota'(\delta(fx))$ für alle ι'
 - Analoges gilt auch für Erfüllbarkeit
- **Substitutionen auf Formeln in Skolem-NF sind zulässig**
 - Beweis trivial, da Formeln in Skolem-NF keine δ -Positionen besitzen

- Formelbäume**

$$\exists x \forall y Pxy \Rightarrow \forall y \exists x Pxy$$



$$\forall x \exists y Pxy \Rightarrow \exists y \forall x Pxy$$



- Treue zweidimensionale Matrixformen**

$$\begin{bmatrix} Pa_1a_3^T & Pa_4a_2^F \end{bmatrix}$$

a_3, a_4 haben Typ γ , a_1, a_2 haben Typ δ

$$\begin{bmatrix} Pa_1a_3^T & Pa_4a_2^F \end{bmatrix}$$

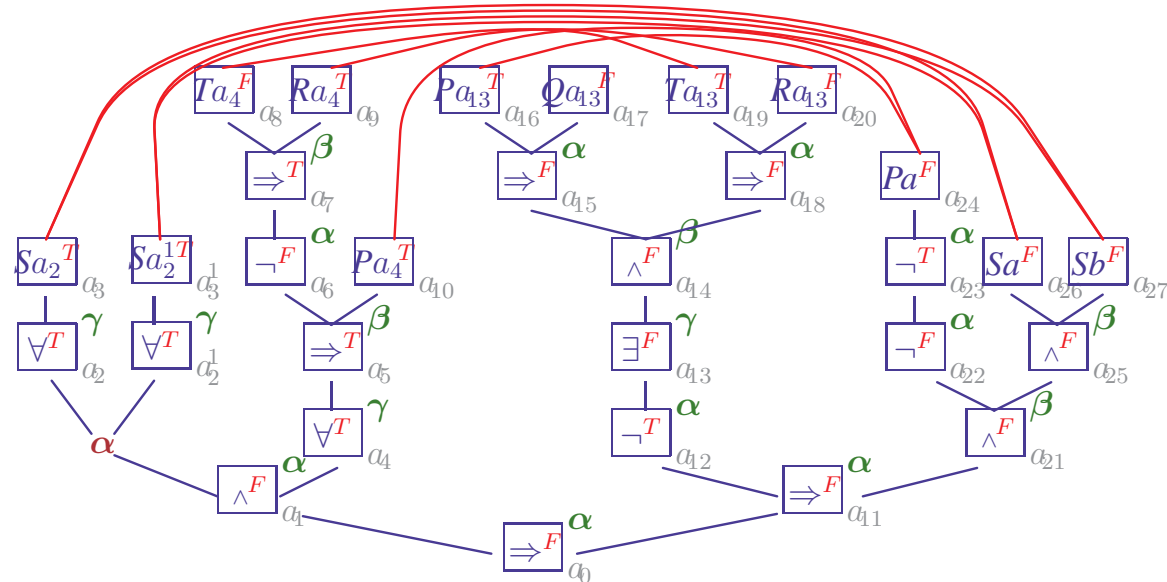
a_1, a_2 haben Typ γ , a_3, a_4 haben Typ δ

- Zweidimensionale Matrizen der skolemisierten Formeln**

$$\begin{bmatrix} P(a, y)^T & P(x, b)^F \end{bmatrix}$$

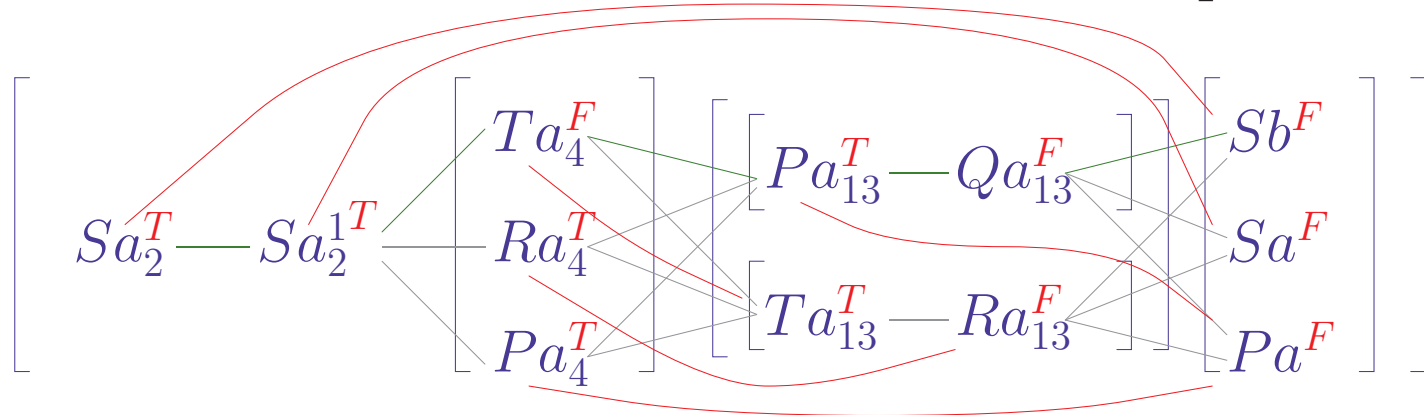
$$\begin{bmatrix} P(x, fx)^T & P(gy, y)^F \end{bmatrix}$$

MATRIXDARSTELLUNG EINER KOMPLEXEN FORMEL



2-dimensionale Matrixstruktur zu einfach

- Wechsel zwischen α/β -Knoten führt zu Schachtelung
- 2-dimensionale Darstellung verwendet Klammern
- **Pfade**, die eine Submatrix betreten, müssen diese komplett durchlaufen



- **Einfache Matrizen (Normalform-Matrizen)**

- **Literal**: atomare Formel mit Polarität
 - positives Literal**: Polarität F **negatives Literal**: Polarität T
- **Klausel**: endliche Mengen $c = \{L_1, \dots, L_k\}$ von Literalen
 - Horn-Klausel**: Klausel mit höchstens einem negativen Literal
- **Matrix**: endliche Menge $M = \{c_1, \dots, c_n\}$ von Klauseln
 - Horn-Matrix**: Menge von Horn-Klauseln

- **Allgemeine Definition: Matrizen der Tiefe n**

- **Tiefe 0**: Literal L
- **Tiefe $n+1$** : endliche Menge von Matrizen der maximalen Tiefe n
 - Klauseln sind Matrizen der Tiefe 1, einfache Matrizen sind Matrizen der Tiefe 2

- **Lesarten von Matrizen**

- Ein Literal repräsentiert sich selbst
- Matrix der Tiefe $2n-1$: Menge von Matrizen in β -Beziehung
- Matrix der Tiefe $2n$: Menge von Matrizen in α -Beziehung
 - Eine Klausel repräsentiert eine Menge von Literalen in β -Beziehung
 - Eine einfache Matrix repräsentiert eine Menge von Klauseln in α -Beziehung

- **Negative Repräsentation als KNF:**

- Repräsentiert **indirekte** Beweisführung (Tableaux, Prolog, ...)
- Ein Literal X^F repräsentiert $\neg X$,
 X^T repräsentiert X
- Eine Klausel repräsentiert die Disjunktion ihrer Literale
- Eine Matrix repräsentiert die Konjunktion ihrer Klauseln

- **Positive Repräsentation als DNF:**

- Repräsentiert **direkte** Beweisführung (Sequenzkalkül,...)
- Ein Literal X^F repräsentiert X ,
 X^T repräsentiert $\neg X$
- Eine Klausel repräsentiert die Konjunktion ihrer Literale
- Eine Matrix repräsentiert die Disjunktion ihrer Klauseln

Matrixbeweise sind unabhängig von der Repräsentation

PRÄSENTATION VON MATRIZEN

● Mengenschreibweise

- Mit Polarität: $\{\{P^F\}, \{P^T, Q^F\}, \{Q^T, R^F\}, \{R^T\}\}$
- Kurzform: $\{\{P\}, \{\overline{P}, Q\}, \{\overline{Q}, R\}, \{\overline{R}\}\}$
- Negative Repräsentation: $\neg P \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge R$
- Positive Repräsentation: $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$

● 2-dimensionale Matrixformen:

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & \neg P & \neg Q & \neg R \\ P & Q & R & \end{bmatrix}$$

● Gedrehte Repräsentation als Prolog Programm

$$\begin{bmatrix} R^T & & & \\ Q^T & R^F & & \\ P^T & Q^F & & \\ & P^F & & \end{bmatrix}$$

R.
 Q :- R.
 P :- Q.
 :- P?

ERZEUGUNG ZWEIDIMENSIONALER MATRIZEN

- **Schrittweisen Erzeugung beim Parsen der Formel**

$$\alpha \mapsto [\alpha_1 \ \alpha_2] \quad \beta \mapsto \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad \gamma \mapsto \gamma(a_i^j) \quad \delta \mapsto \delta(a_i)$$

- **Ausflachen “gleichartiger” Teilmatrizen**

$$\left[\left[M_1 M_2 \right] M_3 \right] \mapsto \left[M_1 \ M_2 \ M_3 \right]$$

$$\left[\left[M_1 M_2 \right] \left[M_3 M_4 \right] \right] \mapsto \left[M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4 \right]$$

$$\left[\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} M_3 \right] \mapsto \begin{bmatrix} M_1 & M_3 \\ M_2 & \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \right] \mapsto \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}$$

⋮

⋮

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$ ^F

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Ergänze Typ der Wurzel

$$[((P \Rightarrow Q) \Rightarrow \alpha(\neg Q \Rightarrow \neg P))^F]$$

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Erzeuge α -Matrix

$$\left[(P \Rightarrow Q)^T \quad (\neg Q \Rightarrow \neg P)^F \right]$$

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Ergänze Typen

$$\left[(P \Rightarrow \beta Q)^T \quad (\neg Q \Rightarrow \alpha \neg P)^F \right]$$

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Erzeuge α -Submatrix

$$\left[(P \Rightarrow \beta Q)^T \quad \left[\neg Q^T \quad \neg P^F \right] \right]$$

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

α -Zusammenfassung

$$\left[(P \Rightarrow \beta Q)^T \quad \neg Q^T \quad \neg P^F \right]$$

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Ergänze Typen

$$\left[(P \Rightarrow \beta Q)^T \quad \neg Q \alpha^T \quad \neg P \alpha^F \right]$$

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

Erzeuge β -Submatrix

$$\left[\begin{array}{c} P^F \\ Q^T \end{array} \quad \neg Q \alpha^T \quad \neg P \alpha^F \right]$$

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

α -Zusammenfassung

$$\begin{bmatrix} P^F & \neg Q \alpha^T & \neg P \alpha^F \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$ ^F

Erzeuge α -Submatrizen
und fasse zusammen

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

- **Matrix für** $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$

$$\begin{bmatrix} Pa_1^F & Pa_4^T & Qa_5^F \\ Qa_1^T & & \end{bmatrix}$$

a_1, a_4 haben Typ γ , a_5 hat Typ δ

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

- **Matrix für** $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$

$$\begin{bmatrix} Pa_1^F & Pa_4^T & Qa_5^F \\ Qa_1^T & & \end{bmatrix}$$

a_1, a_4 haben Typ γ , a_5 hat Typ δ

$$\begin{bmatrix} Px^F & Py^T & Qa^F \\ Qx^T & & \end{bmatrix}$$

Matrix der skolemisierten Formel

SYSTEMATISCHER AUFBAU VON MATRIZEN

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

- **Matrix für** $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$

$$\begin{bmatrix} Pa_1^F & Pa_4^T & Qa_5^F \\ Qa_1^T & & \end{bmatrix}$$

a_1, a_4 haben Typ γ , a_5 hat Typ δ

$$\begin{bmatrix} Px^F & Py^T & Qa^F \\ Qx^T & & \end{bmatrix}$$

Matrix der skolemisierten Formel

- **Matrix für** $(\forall x \exists y Pxy) \Rightarrow (\exists z Paz \wedge \exists z Pbz)^F$ ($\mu=2$)

$$\begin{bmatrix} Pa_1a_3^T & Pa_1^1a_3^1T & Paa_4^F \\ & & Pba_5^F \end{bmatrix}$$

a_1, a_1^1, a_4, a_5 Typ γ , a_3, a_3^1 Typ δ

$$\begin{bmatrix} P(x_1, fx_1)^T & P(x_2, fx_2)^T & Paz^F \\ & & Pbz'^F \end{bmatrix}$$

Matrix der skolemisierten Formel

- **Pfad durch eine Matrix**

- Tiefe 2, $M = \{c_1, \dots, c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, \dots, L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
- Tiefe $2n$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
- Tiefe $2n+1$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i

- **Pfad durch eine Matrix**

- Tiefe 2, $M = \{c_1, \dots, c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, \dots, L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
- Tiefe $2n$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
- Tiefe $2n+1$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i

- **Konnektionen, Komplementarität wie zuvor**

- Zulässigkeitsbedingung der Substitution am Formelbaum zu prüfen
oder direkt in Skolemfunktionen codiert

BEWEISKONZEPTE FORMULIERT FÜR MATRIZEN

- **Pfad durch eine Matrix**

- Tiefe 2, $M = \{c_1, \dots, c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, \dots, L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
- Tiefe $2n$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
- Tiefe $2n+1$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i

- **Konnektionen, Komplementarität wie zuvor**

- Zulässigkeitsbedingung der Substitution am Formelbaum zu prüfen
oder direkt in Skolemfunktionen codiert

- **Beispielbeweise**

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

BEWEISKONZEPTE FORMULIERT FÜR MATRIZEN

- **Pfad durch eine Matrix**

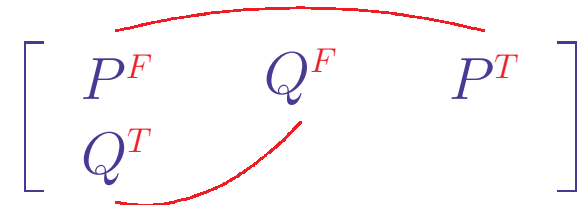
- Tiefe 2, $M = \{c_1, \dots, c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, \dots, L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
- Tiefe $2n$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
- Tiefe $2n+1$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i

- **Konnektionen, Komplementarität wie zuvor**

- Zulässigkeitsbedingung der Substitution am Formelbaum zu prüfen
oder direkt in Skolemfunktionen codiert

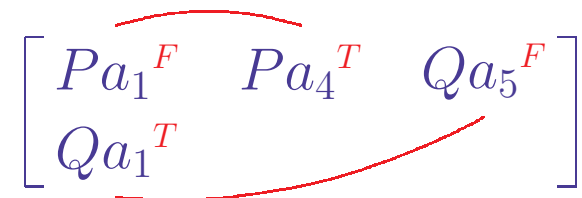
- **Beispielbeweise**

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$



$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$\sigma = [a_5/a_1, a_5/a_4]$ ist zulässig



BEWEISKONZEPTE FORMULIERT FÜR MATRIZEN

- **Pfad durch eine Matrix**

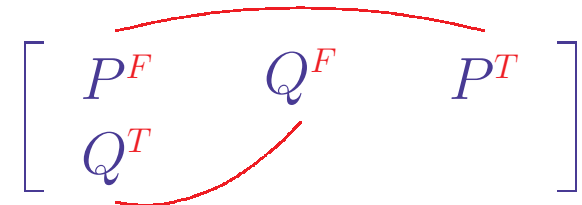
- Tiefe 2, $M = \{c_1, \dots, c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, \dots, L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
- Tiefe $2n$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup \dots \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
- Tiefe $2n+1$, $M = \{M_1, \dots, M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i

- **Konnektionen, Komplementarität wie zuvor**

- Zulässigkeitsbedingung der Substitution am Formelbaum zu prüfen
oder direkt in Skolemfunktionen codiert

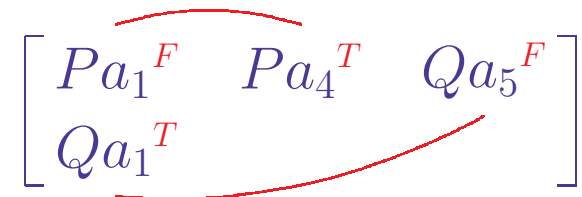
- **Beispielbeweise**

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$



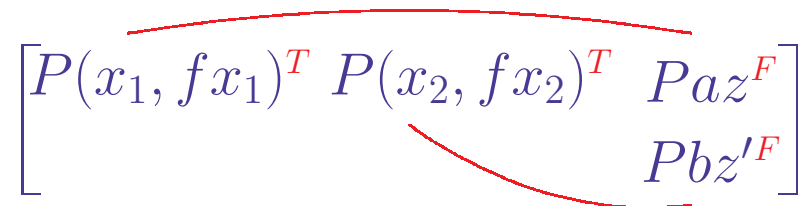
$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$\sigma = [a_5/a_1, a_5/a_4]$ ist zulässig



$$(\forall x \exists y Pxy) \Rightarrow (\exists z Paz \wedge \exists z Pbz)^F$$

$\sigma = [a, b, fa, fb/x_1, x_2, z, z']$ (Skolemform)



CODIERUNG DER MULTIPLIZITÄT IN MATRIZEN

- **Klauselkopien verbrauchen Speicherplatz**

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F$$

$$\begin{bmatrix} Px_1^T & Px_2^T & Pa^F \\ & & Pb^F \end{bmatrix}$$

- **Kurzform: Indizierte Konnektion**

- Konnektion mit Index für (implizite) Klauselkopie
- Verdichtete Codierung durch kleinere Matrix
- Bezug der Matrix zur Originalformel besser erkennbar

$$\begin{bmatrix} Px^T & Pa^F \\ & Pb^F \end{bmatrix}$$

- **Indizierte Matrix**

- Matrix M mit indizierter Paarung
- **Expandierte Form**: erweiterte Form mit expliziten Kopien von Klauseln
- **Pfade durch M** : Pfade durch expandierte Form von M

- **Aufspannende (indizierte) Paarung**

- Jeder Pfad (durch die indizierte Matrix) enthält eine Konnektion
- σ -komplementäre aufspannende indizierte Paarungen beweisen Gültigkeit

Charakterisierungstheorem für Matrizen

Eine Formel F in Matrixform ist gültig, wenn es

– eine zulässige Substitution σ

und

– eine Menge \mathcal{C} von indizierten σ -komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus \mathcal{C} enthält

Beweis folgt direkt aus Charakterisierungstheorem für Formeln

- Für skolemisierte Formeln ist keine Zulässigkeitsbedingung nötig
- Indizierte Matrizen werden nur bei sehr großen oder verschachtelten Matrizen verwendet, da das Erzeugen und Verarbeiten von Klauselkopien technisch leichter zu realisieren ist

Viele Beweissysteme verarbeiten nur Normalformen

- **Formeln werden schrittweise auf Normalform gebracht**
 - **Negationsnormalform**: Negationszeichen nur direkt vor Atomen
 - **Pränexnormalform**: Quantoren erscheinen nur zu Beginn der Formel
 - **Skolemnormalform**: Formel F enthält nur Quantoren vom Typ γ
 - **Konjunktive** (negativ) bzw. **Disjunktive Normalform** (positiv)
Formel F enthält nur Konjunktionen, Disjunktionen und Negationen
- **Vorteil: einfachere Beweisverfahren**
 - Unkomplizierte Matrix- und Pfadstruktur, leicht zu verarbeiten
- **Nachteil: Entstellung der Formel**
 - Exponentielle Aufblähung bei naiver Erzeugung der DNF / KNF
 - Originalformel selten rekonstruierbar
 - Erzeugung von Tableaux- bzw. Sequenzenbeweisen nahezu unmöglich
 - Verfahren lassen sich schlecht auf andere Logiken verallgemeinern

Suche komplementäre aufspannende indizierte Paarungen

- **Aufbau der Datenstruktur**
 - Annotierter Formelbaum mit Polaritäten und Typen oder Matrixform
 - Identifikation aller möglichen **Konnektionen**
- **Pfadexploration**
 - Prüfe ob jeder Pfad durch F mindestens **eine Konnektion** enthält
 - Konnektionenorientiertes Verfahren streicht Gruppen überprüfter Pfade
- **Unifikation**
 - Bestimme **Substitution σ** , die alle **Konnektionen komplementär** macht
 - Überprüfe **Zulässigkeit** der Substitution (trivial bei Skolemform)
 - Integriere Unifikationsverfahren in Pfadexplorationsschritte
- **Multiplizitätsbestimmung**
 - Erhöhe Multiplizität von γ -Knoten oder Konnektionsindizes dynamisch
- **Rücktransformation**
 - Erzeuge Tableaux-/Sequenzenbeweis aus Matrixbeweis