Inferenzmethoden

Einheit 3

Verdichtung des logischen Schließens II

Matrix-Beweise

1. Verdichtung von Tableauxbeweisen
2. Der Matrixkalkül
3. Zweidimensionale Repräsentation

Matrix-Kalküle: Maschinennahe Beweissuche

- **Bestimme relevante Beweisinformation**
  - Welche komplementären Teilformeln schließen einen Beweiszweig ab?
  - Welche Terme sind für γ-Variablen einzusetzen?
  - In welcher Reihenfolge sind Beweisregeln anzuwenden?

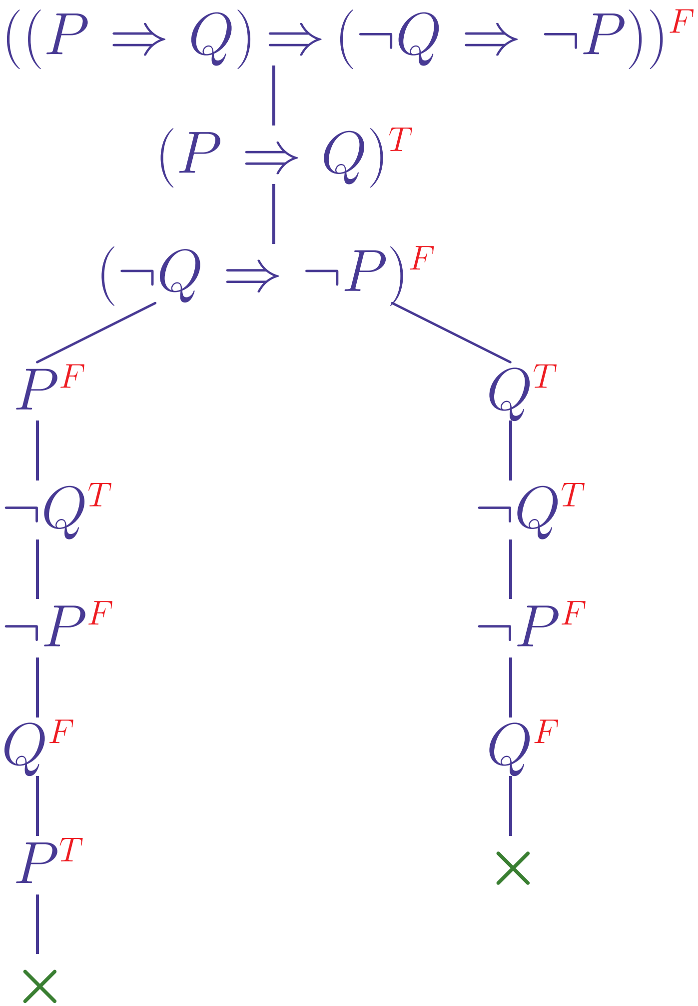
  Information reicht, um Tableauxbeweis ohne Suche zu rekonstruieren

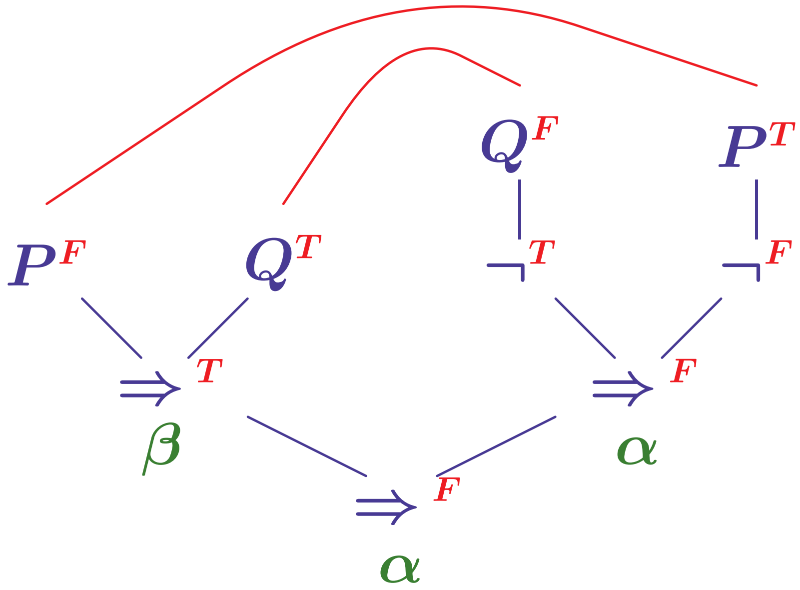
- **Kompakte Beweisrepräsentation**
  - Nur atomare Teilformeln (Literale) sind beweisrelevant
  - Beweiszweige repräsentierbar durch “Pfade” im Formelbaum
  - Beweisführung im Formelbaum vermeidet Erzeugung von Formelkopien

- **Zielorientiertes Vorgehen**
  - Verfolge Konnektionen bei Suche nach komplementären Literalen
  - Gezielte Instantiierung von Quantoren durch Unifikation
  - Reduktionsordnung bestimmt durch Baumordnung und Substitution

Matrixbeweis für $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$

Tableauxbeweis





Beweis für $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx)^T$$

$$(\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx)^F$$

$$(\forall x Px)^T$$

$$(\forall x Qx)^F$$

$$Qa^F$$

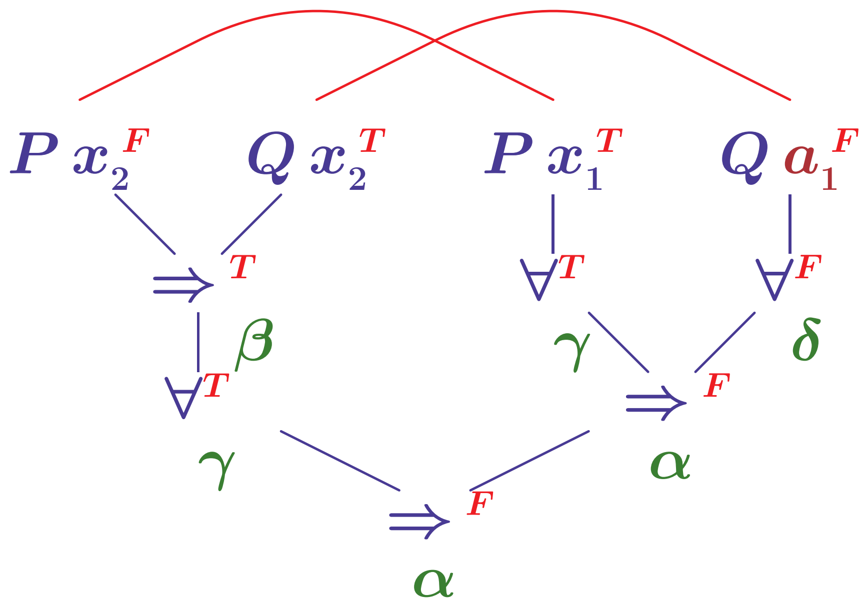
$$Pa^T$$

$$Pa \Rightarrow Qa^T$$

$$Pa^F \qquad\qquad Qa^T$$

$$\times \qquad\qquad \times$$

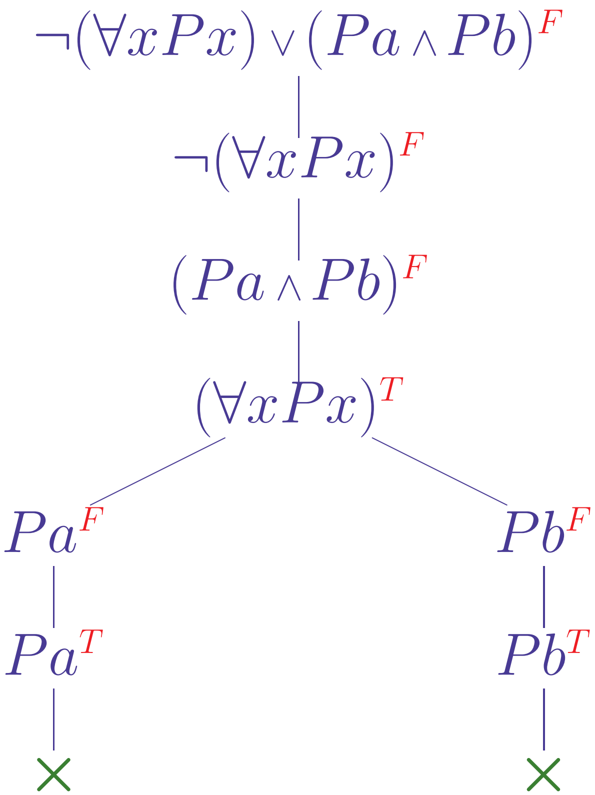
$\delta(a)$: $\forall x\ Qx$ muß vor den
γ-Knoten zerlegt werden



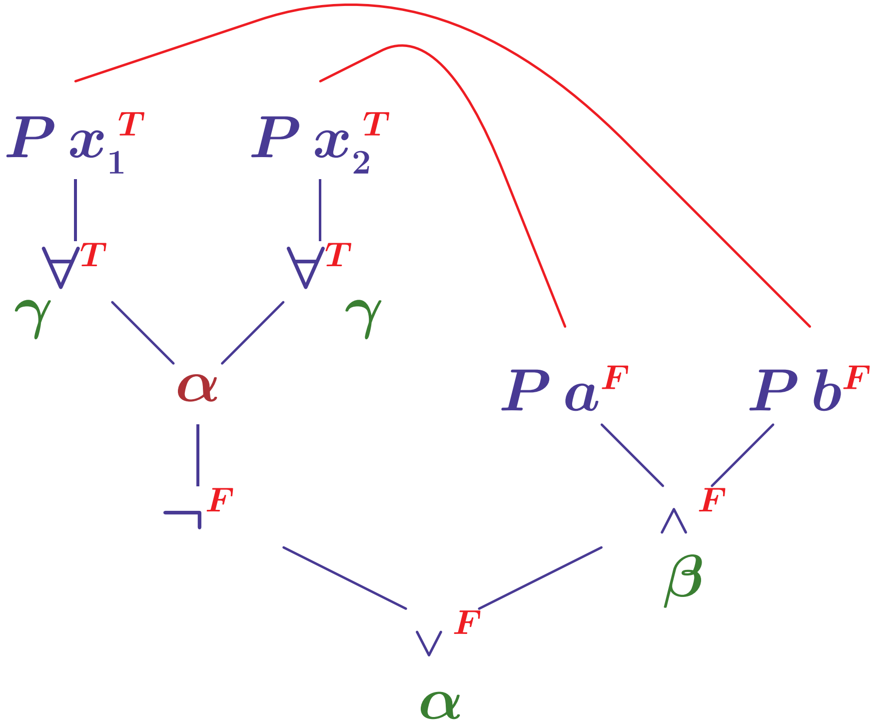
x_1 muß gleich x_2 sein
x_2 muß gleich a_1 sein
Instantiiere $x_1 := x_2 := a_1$

a_1 muß vor x_1/x_2
freigesetzt werden

Beweis für $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



Zwei Instanzen derselben Formel



γ-Formel hat Multiplizität 2
Instantiiere $x_1 := b$, $x_2 := a$

Matrixbeweise: Fundamentale Einsichten

- **Formelbaum enthält alle Teilformeln eines Beweises**
  - Es reicht, Knoten um Tableauxtypen und Polaritäten zu ergänzen
  - Beide hängen nur vom Konnektiv und bisheriger Polarität ab
- **Beweiszweige sind durch α-Knoten beschreibbar**
  - Nur β-Knoten erzeugen Verzweigungen
  - Knoten mit α-Knoten als gemeinsamen Vorfahr sind im gleichen Zweig
- **Komplementaritätstests reichen aus**
  - Alle Zweige müssen komplementäre Literale enthalten
  - Komplementarität kann durch Substitution erzeugt werden
  - γ-Variablen werden erst beim Komplementaritätstest instantiiert
  - γ-Knoten dürfen dupliziert werden
- **Substitutionen bestimmen Reduktionsordnung**
  - Tableauxbeweis muß Ordnung des Formelbaums berücksichtigen
  - Tableauxbeweis muß Variablen in Termen, die für γ-Variablen eingesetzt werden, bereits freigelegt haben

Matrixkalküle präzisiert: Formelbaum

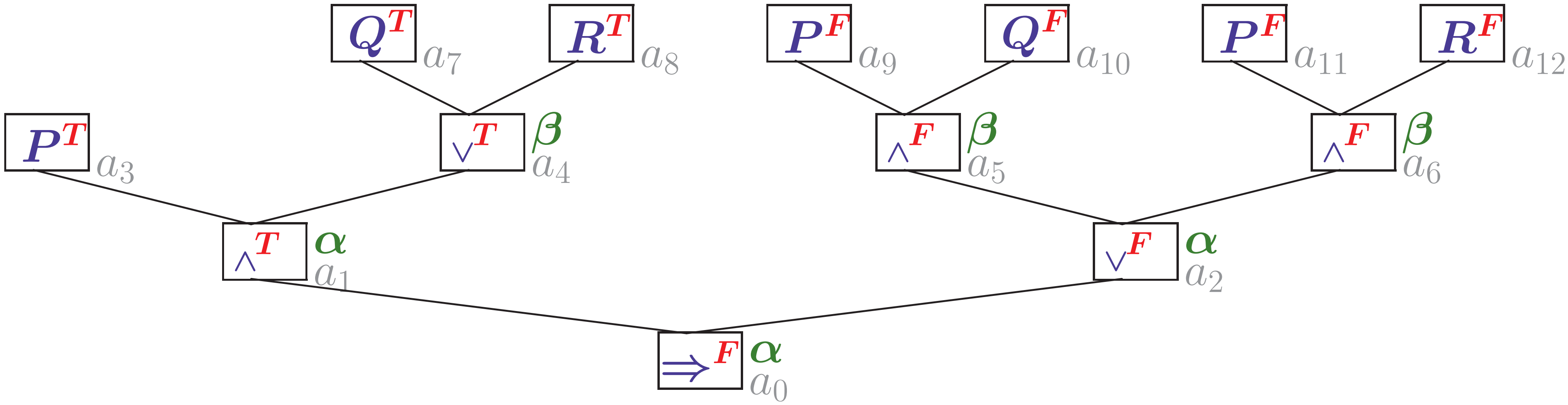
- **(Annotierter) Formelbaum**
  - Syntaxbaum der Formel, in der jeder Knoten markiert ist mit
    - **Position**: eindeutiger Name a_0, a_1, ..., mit dem Knoten identifiziert
    - **Label**: logisches Konnektiv oder atomare Formel
    - **Polarität**: T oder F (oft auch weniger suggestiv: "0 oder 1")
    - **Typ**: α, β, γ oder δ
  - Atome (atomare Positionen): Knoten mit atomaren Formeln als Label
  - Baumordnung $<$: partielle Ordnung der Knoten im Baum
  - Multiplizität $\boldsymbol{\mu(a_i)}$: Anzahl der Kopien des γ-Knotens a_i im Baum
    (≙ Anzahl der Instanzen des zugehörigen Quantors)

- **Systematische Zuordnung von Polarität und Typ**
  - Die Wurzel a_0 hat Polarität F
  - Typ/Nachfolgerpolarität einer Position a_i werden tabellarisch bestimmt

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1 α_2	X^T Y^T	X^F Y^F	X^T Y^F	X^F –	X^T –	β_1 β_2	X^F Y^F	X^T Y^T	X^F Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(a_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

Aufbau eines annotierten Formelbaums

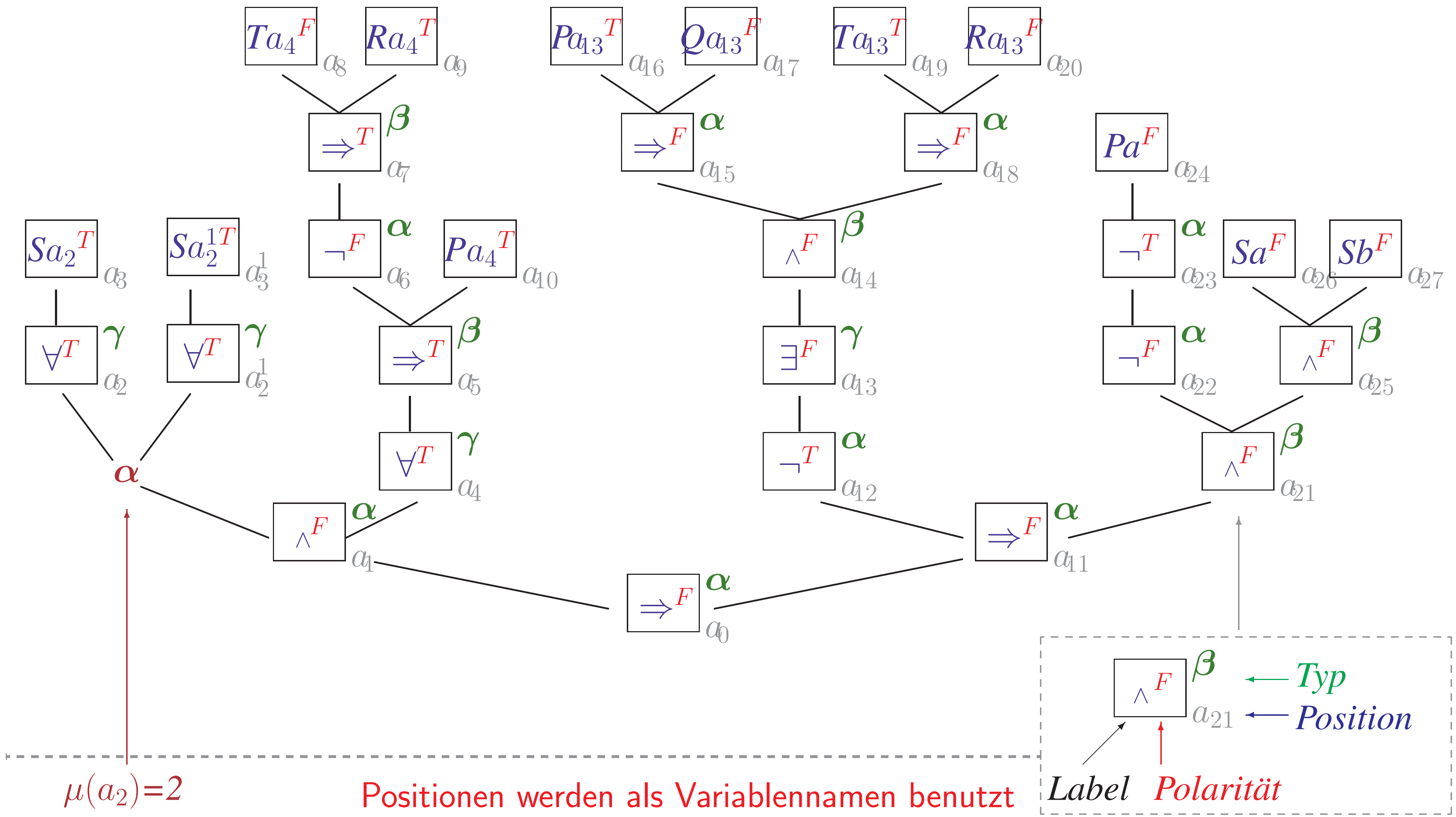
$$(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$$



α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$	β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$
α_1 α_2	X^T Y^T	X^F Y^F	X^T Y^F	X^F –	X^T –	β_1 β_2	X^F Y^F	X^T Y^T	X^F Y^T
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$				δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$	
$\gamma(a_i^j)$	$A[a_i^j/x]^T$	$A[a_i^j/x]^F$				$\delta(a_i)$	$A[a_i/x]^F$	$A[a_i/x]^T$	

Formelbaum mit Mulitplizität

$$(\forall x Sx) \wedge (\forall y \neg(Ty \Rightarrow Ry) \Rightarrow Py) \Rightarrow \neg(\exists z(Pz \Rightarrow Qz) \wedge (Tz \Rightarrow Rz)) \Rightarrow \neg\neg Pa \wedge Sa \wedge Sb$$

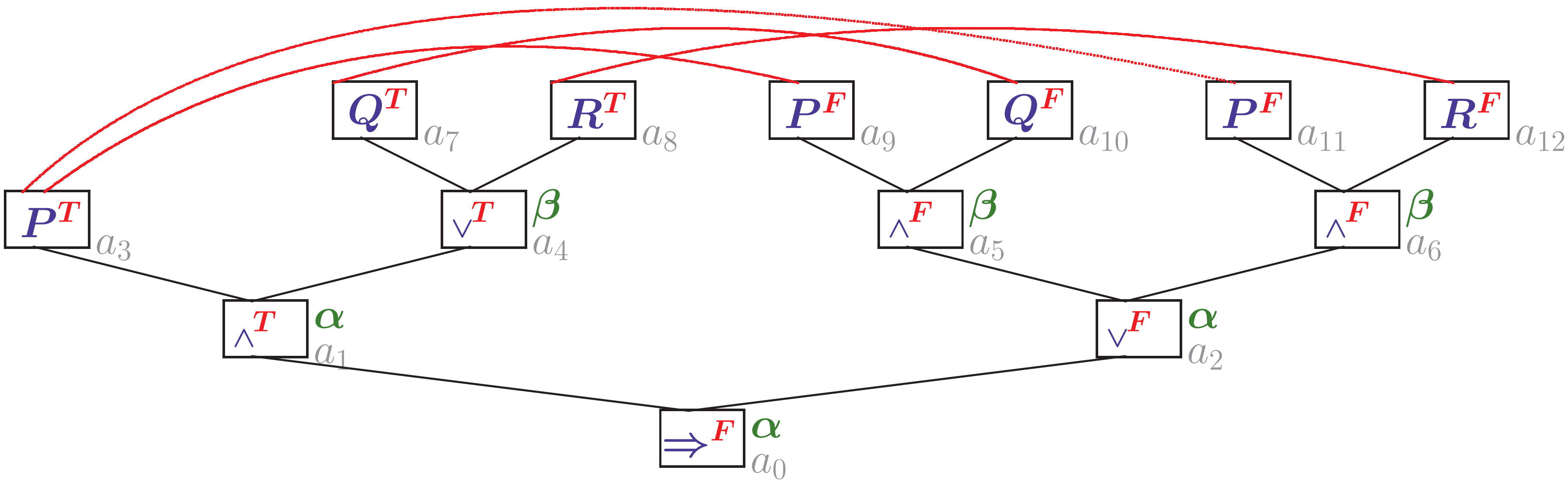


Positionen werden als Variablennamen benutzt

Matrixkalküle präzisiert: Pfade und Konnektionen

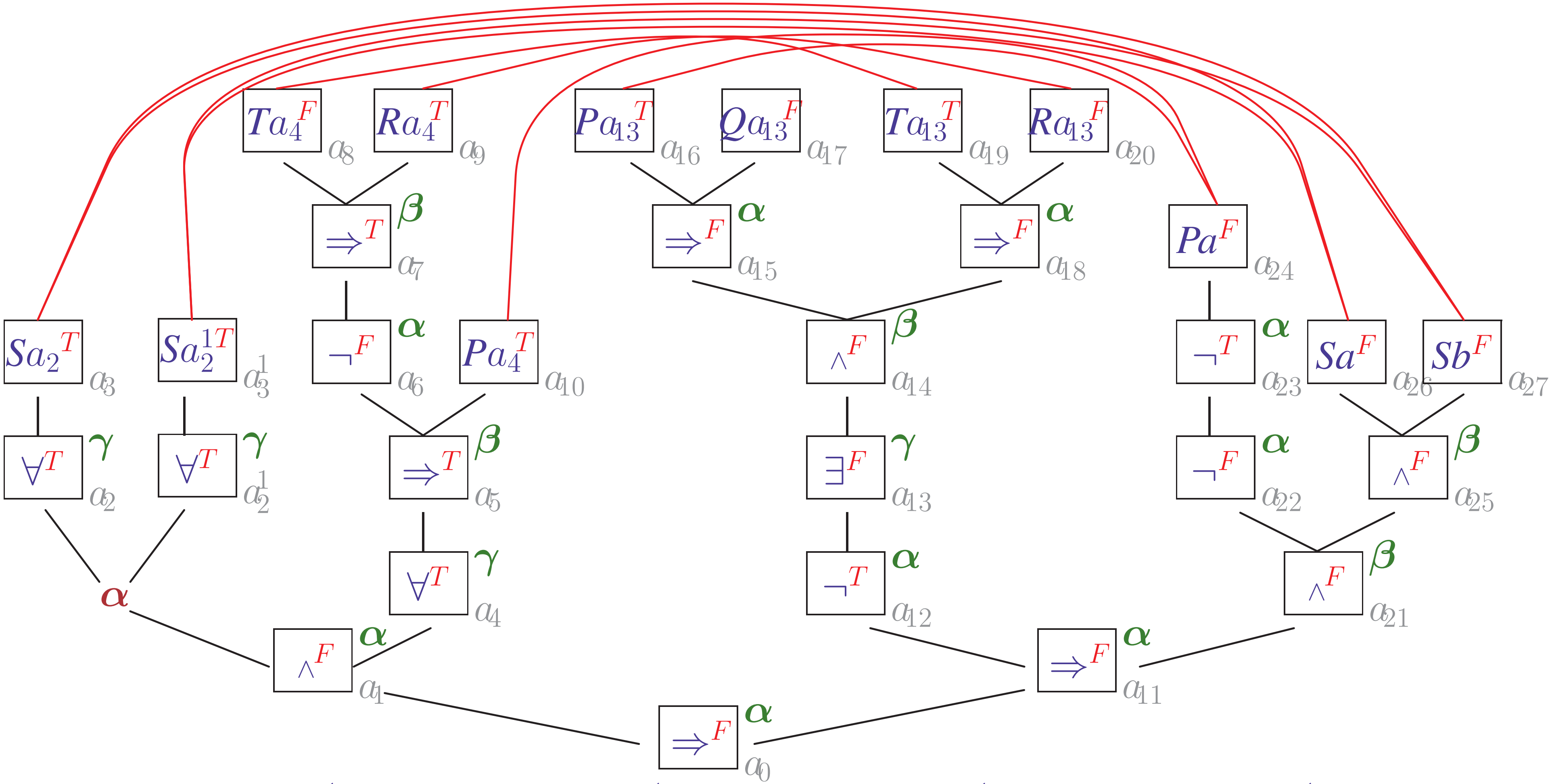
- **α/β-Beziehung zwischen atomaren Positionen**
  - $\boldsymbol{u \sim_\alpha v}$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ α
  - $\boldsymbol{u \sim_\beta v}$: $u \neq v$ und größter gemeinsamer Vorfahr hat Typ β
- **Pfad**
  - (Maximale) Menge von Atomen in gegenseitiger α-Beziehung
- **Konnektion**
  - Paar $\{u, v\}$ von Knoten mit gleichem Label, unterschiedlicher Polarität
- **Substitution**
  - Endliche Abbildung σ von γ-Variablen in Terme
- **σ-komplementäre Konnektion**
  - Konnektion $\{u, v\}$ deren Label mit der Substitution σ unifizierbar sind
- **Aufspannende Paarung für eine Formel F**
  - Paarung: Menge von σ-komplementären Konnektionen,
  - Aufspannend: jeder Pfad durch F enthält eine der Konnektionen

Pfade und Konnektionen in Formelbäumen



- **α/β-Beziehungen zwischen atomaren Formeln**
  - $a_7 \sim_\beta a_8$, $a_9 \sim_\beta a_{10}$, $a_{11} \sim_\beta a_{12}$
  - Für alle anderen Paare von Atomen gilt $a_i \sim_\alpha a_j$
- **Drei β-Beziehungen liefern 8 Pfade:**
  - $a_3a_7a_9a_{11}$, $a_3a_7a_9a_{12}$, $a_3a_7a_{10}a_{11}$, $a_3a_7a_{10}a_{12}$, $a_3a_8a_9a_{11}$, $a_3a_8a_9a_{12}$, $a_3a_8a_{10}a_{11}$, $a_3a_8a_{10}a_{12}$
- **4 Konnektionen**
  - a_3a_9, a_3a_{11}, a_7a_{10}, a_8a_{12}

Pfade und Konnektionen in Formelbäumen



- **18 Pfade:** $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$, ... $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$, ...
- **8 Konnektionen:** a_3a_{26}, a_3a_{27}, $a_3^1a_{26}$, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19}, a_9a_{20}, $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$
  - a_3a_{26}, $a_3^1a_{27}$, a_8a_{19}, a_9a_{20}, $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$ komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$
  - a_3a_{27}, $a_3^1a_{26}$, a_8a_{19}, a_9a_{20}, $a_{10}a_{24}$, $a_{16}a_{24}$ komplementär unter $\sigma = [a/a_2, b/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$

Matrixkalküle präzisiert: Beweisbegriff

“Alle Zweige des Tableauxbeweises sind geschlossen”

- **σ induziert Reduktionsordnung $\lhd := (< \cup \sqsubset)^{+}$**
  - $v \sqsubset u$, falls v im term $\sigma(u)$ vorkommt (v δ-Position, u γ-Position)
    ($\hat{=}$ Quantor an Position v muß im Tableauxbeweis vor u freigelegt werden)
  - σ ist **zulässig**, falls $\lhd$ azyklisch ($\hat{=}$ eine Tableauxreduktion ist möglich)
- **Charakterisierungstheorem für klassische Logik**

  Eine Formel F ist gültig, wenn es

  – eine Multiplizität μ,

  – eine zulässige Substitution σ

  – und eine Menge $\mathcal{C}$ von σ-komplementären Konnektionen gibt,

  so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

Beweis des Charakterisierungstheorems (Skizze)

Eine Formel F ist gültig, wenn es eine Multiplizität μ, eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von σ-komplementären Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

- **Korrektheit: erzeuge Tableauxbeweis aus μ und σ**
  - Transformiere (azyklische) Reduktionsordnung $\lhd$ in lineare Ordnung
  - Wende Tableauxregeln in der Reihenfolge dieser Ordnung an
  - Instantiiere δ-Formeln wie im annotierten Formelbaum
  - Instantiiere γ-Formeln entsprechend der Substitution σ

  Per Konstruktion ist jeder Zweig des Tableaus geschlossen
- **Vollständigkeit: erzeuge $\mathcal{C}$, μ, σ aus Tableauxbeweis**
  - Generiere annotierten Formelbaum
  - Für γ-Knoten ist μ die Anzahl der Instanzen im Tableauxbeweis
  - Wähle Substitution σ passend zu den ausgeführten γ-Regeln
    σ ist zulässig aufgrund der Bedingungen an γ- und δ-Regeln
  - Wähle $\mathcal{C}$ als Menge der Formelpaare, welche die Zweige abschließen
    Alle Konnektionen sind σ-komplementär

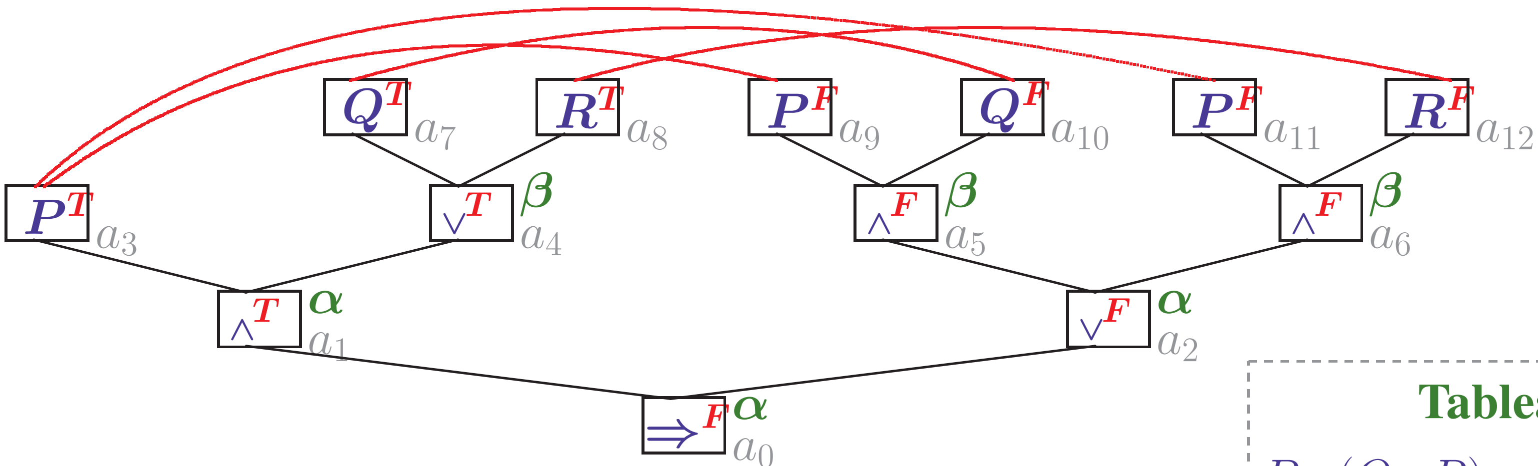
  Per Konstruktion enthält jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$

Aufgabe eines automatischen Beweisverfahrens

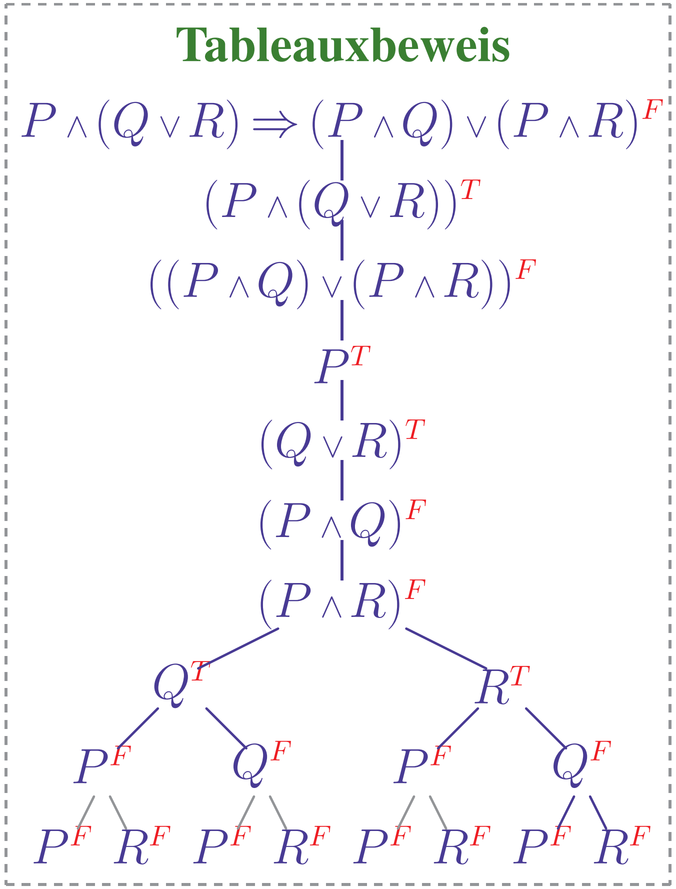
Prüfe Voraussetzungen des Charakterisierungstheorems

- **Identifiziere mögliche Konnektionen**
  – Statische Konstruktion nach Aufbau des Formelbaums
- **Systematische Pfadüberprüfung**
  – Teste, ob jeder Pfad durch F mindestens eine Konnektion enthält
- **Unifikation**
  – Bestimme Substitution σ, die Konnektionen komplementär macht
- **Zulässigkeitstest**
  – Prüfe, ob die aus σ induzierte Reduktionsordnung $\lhd$ azyklisch ist
- **Bestimme Multiplizität**
  – Erhöhe Multiplizität μ von γ-Knoten schrittweise, wenn erforderlich

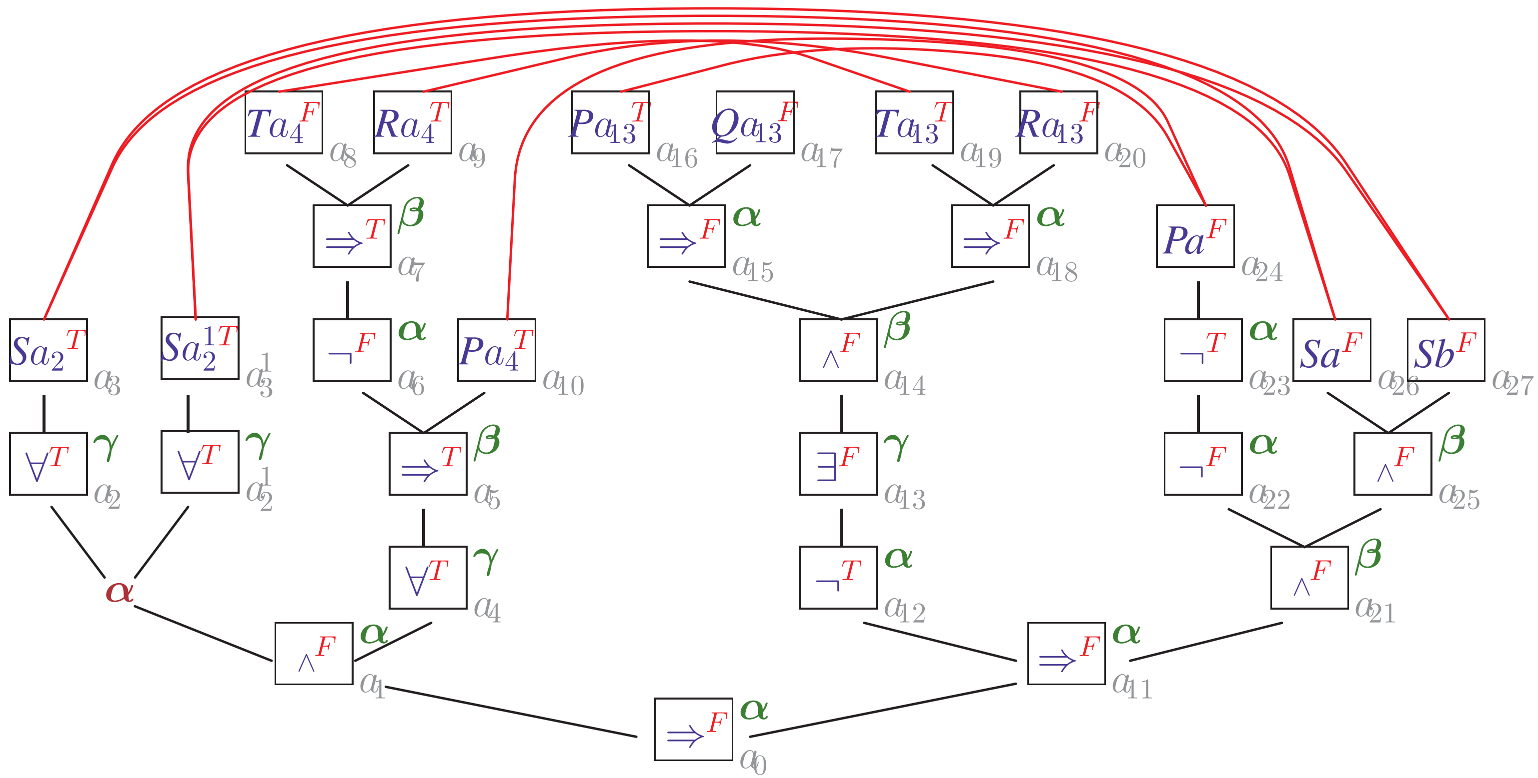
Beweis für $(P \wedge (Q \vee R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$



- **Alle Pfade enthalten eine Konnektion**
  - $a_3a_7a_9a_{11}$, $a_3a_7a_9a_{12}$, $a_3a_7a_{10}a_{11}$, $a_3a_7a_{10}a_{12}$, $a_3a_8a_9a_{11}$, $a_3a_8a_9a_{12}$, $a_3a_8a_{10}a_{11}$, $a_3a_8a_{10}a_{12}$
- **Die Formel ist gültig**
  - Alle Konnektionen sind komplementär
- **Reduktionsordnung ist Baumordnung**
  - Mögliche Linearisierung: $a_0\ a_1\ a_2\ a_4\ a_5\ a_6$



Matrixbeweis mit Substitution



- **Alle 18 Pfade enthalten eine Konnektion:**

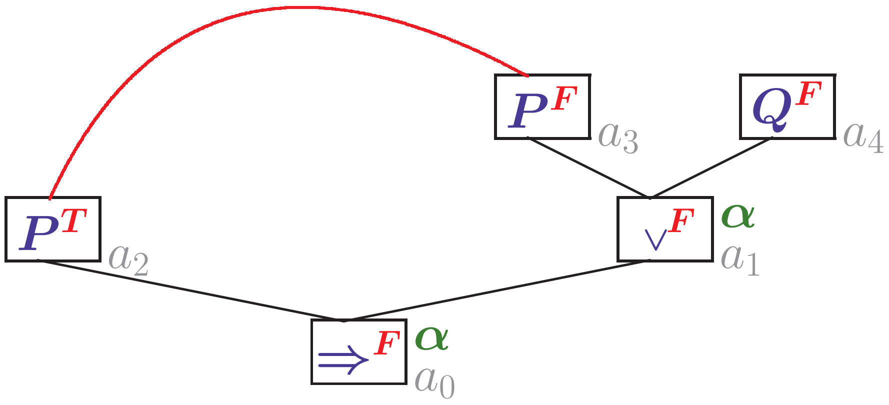
  $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{16}a_{17}a_{27}$, $a_3a_3^1a_8a_{19}a_{20}a_{24}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{26}$, $a_3a_3^1a_8a_{18}a_{19}a_{27}$, $a_3a_3^1a_9a_{16}a_{17}a_{24}$,... $a_3a_3^1a_{10}a_{16}a_{17}a_{24}$,...

  $\mathcal{C} = \{ \{a_3a_{27}\}, \{a_3^1a_{26}\}, \{a_8a_{19}\}, \{a_9a_{20}\}, \{a_{10}a_{24}\}, \{a_{16}a_{24}\} \}$

- **$\mathcal{C}$ ist komplementär unter $\sigma = [b/a_2, a/a_2^1, a/a_4, a/a_{13}]$**
  – σ ist zulässig, da keine δ-Positionen vorhanden ($\lhd = <$)

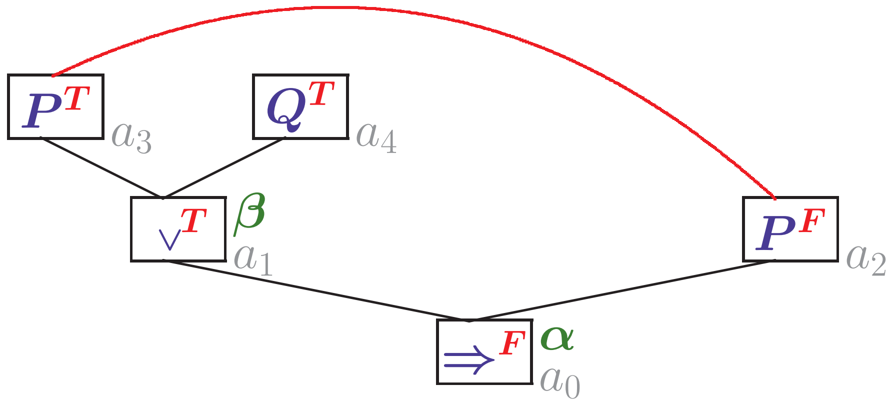
- **Die Formel ist gültig**

Erfolgreiche und erfolglose Beweisversuche



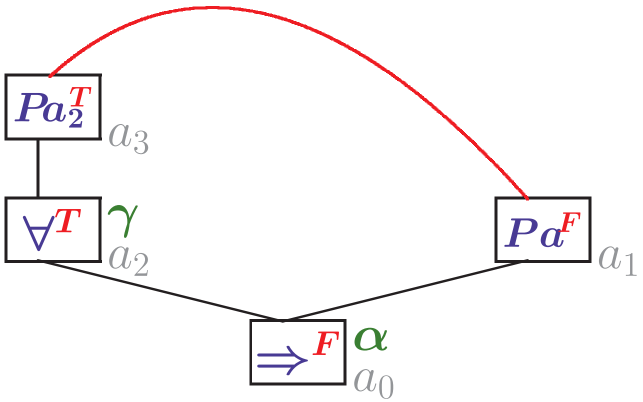
Einziger Pfad $a_2a_3a_4$ *ist komplementär*

$P \Rightarrow P \vee Q$ **ist gültig**



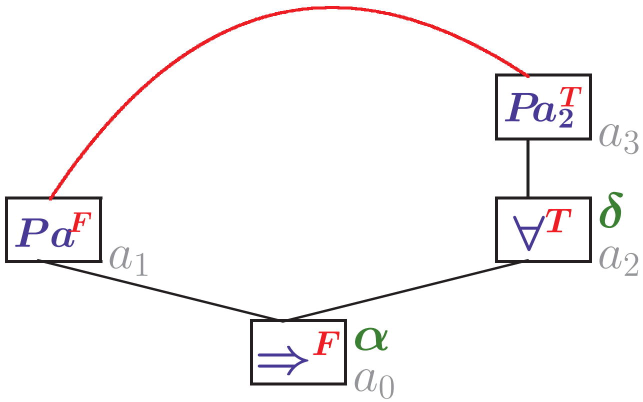
Zweiter Pfad a_4a_2 *ist ohne Konnektion*

$P \vee Q \Rightarrow P$ **ist nicht gültig**



Pfad a_3a_1 *komplementär mit* $\sigma = [a/a_2]$

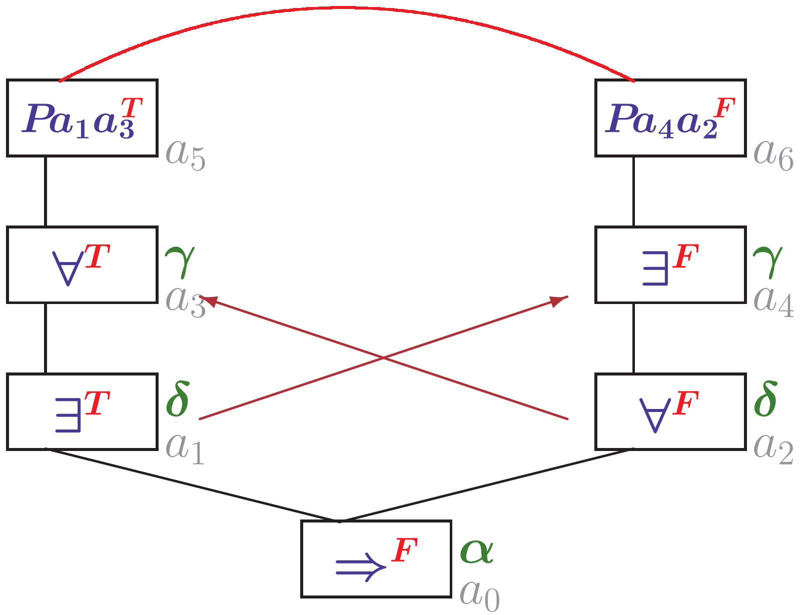
$\forall x\ Px \Rightarrow Pa$ **ist gültig**



Pfad a_1a_3 *ist nicht unifizierbar*

$Pa \Rightarrow \forall x\ Px$ **ist nicht gültig**

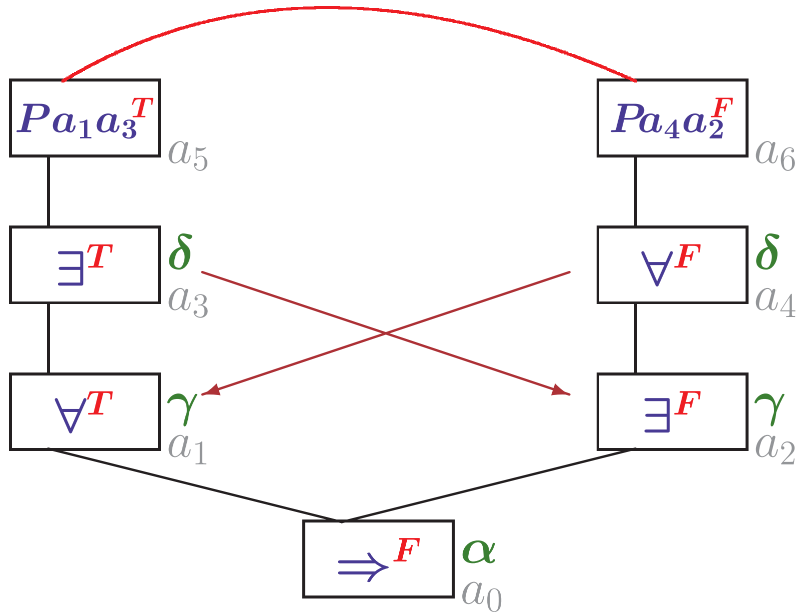
Erfolgreiche und erfolglose Beweisversuche



Pfad $\boldsymbol{a_5a_6}$ *komplementär mit* $\boldsymbol{\sigma}$=$[\boldsymbol{a_2, a_1/a_3, a_4}]$

Induzierte Reduktionsordnung ist azyklisch

$\exists x \forall y\ Pxy \Rightarrow \forall y \exists x\ Pxy$ **ist gültig**



Pfad $\boldsymbol{a_5a_6}$ *komplementär mit* $\boldsymbol{\sigma}$=$[\boldsymbol{a_3, a_4/a_2, a_1}]$

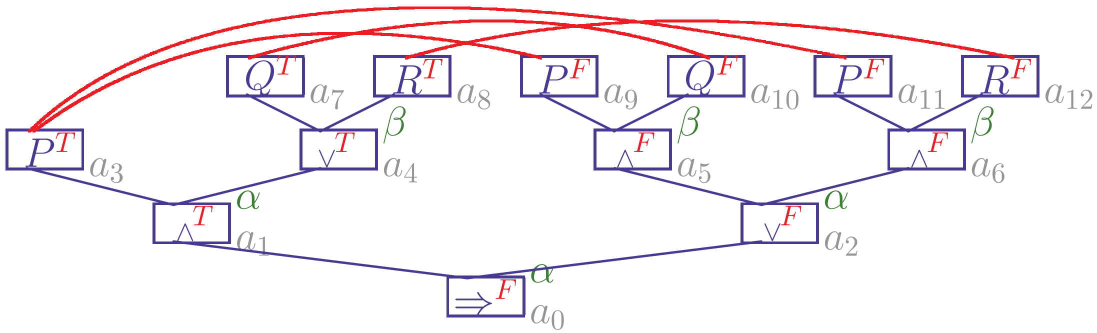
Induzierte Reduktionsordnung ist zyklisch

$\forall x \exists y\ Pxy \Rightarrow \exists y \forall x\ Pxy$ **ist nicht gültig**

Matrixdarstellung einer Formel

2-dimensionale Repräsentation der Atome zur Verdichtung und Veranschaulichung der Beweismethodik

- **Pfadüberprüfung hängt nur an α/β-Struktur**
  - Nur die Atome sind beweisrelevant
  - Pfade sind Ketten von Literalen in α-Beziehung
  - Verschiedene Pfade werden durch β-Verzweigungen getrennt
- **Matrix: 2-dimensionale Darstellung der α/β-Struktur**
  - Literale in α-Beziehung erscheinen nebeneinander
  - Literale in β-Beziehung erscheinen übereinander
  - Pfade sind (maximale) Ketten von Literalen, die nebeneinander stehen



$$\begin{bmatrix} P^T & Q^T & P^F & P^F \\ & R^T & Q^F & R^F \end{bmatrix}$$

Was geschieht mit Quantoren bzw. γ/δ-Knoten?

Zwei grundsätzliche Vorgehensweisen

- **“Treue” Repräsentation des annotierten Formelbaums**
  - Variablen in Literalen sind Positionen der zugehörigen γ/δ-Knoten
  - γ- und δ-Variablen sind als solche gekennzeichnet
  - Konnektierte Literale werden unifiziert
  - Zulässigkeit der Substitution wird anhand des Formelbaums geprüft
- **Transformiere Formel zuvor in Skolemnormalform**
  - Es gibt nur noch γ-Variablen in Literalen
  - δ-Variablen in Literalen werden durch Funktionen ersetzt, welche Abhängigkeiten von γ-Variablen codieren
  - Bei der Unifikation können γ-Variablen nicht durch δ-Variablen ersetzt werden, die von ihnen abhängen
  - Alle generierten Substitutionen sind zulässig (kein Test erforderlich)
  - Beweis kann ausschließlich innerhalb der Matrix geführt werden

Transformiere $\exists x \forall y\, P(x,y)$ in Skolemnormalform

- **Existenzquantifizierte Variable x ist γ-Variable**
  – Im Tableauxbeweis darf x durch einen beliebigen Term t ersetzt werden
- **Allquantifizierte Variable y ist δ-Variable**
  – Im Tableauxbeweis muß y durch eine neue Variable a ersetzt werden
  – Die Variable a darf in nicht bereits t vorkommen
- **Verhindere unzulässige Unifikationen**
  – Modifiziere Formel so, daß Unifikation x nicht durch einen Term ersetzen kann, der die neue Variable a für y enthält
  – Wähle neues Funktionssymbol f und ersetze y durch den Term $f(x)$
  – $f(x)$ repräsentiert Beliebigkeit von a und Abhängigkeit von x
    · Da f neu ist, kann $f(x)$ genauso interpretiert werden wie a
    · Eine Substitution kann x nicht durch $f(x)$ ersetzen
- **Erzeuge die Formel $\exists x\, P(x, f(x))$**

Erzeugung der Skolemnormalform

- **Normalformen für eine Formel F**
  - **Pränexnormalform**: Quantoren erscheinen nur zu Beginn der Formel
  - **Skolemnormalform**: Formel F enthält nur Quantoren vom Typ γ

    Gilt zusätzlich Pränexnormalform, dann hat F nur Existenzquantoren

- **Skolemisierung: Transformation in Skolemnormalform**
  - Ausgangspunkt Pränexnormalform: eliminiere Allquantoren

    Transformiere $\exists x_1..x_n \forall y\, F$ in $\exists x_1..x_n\, F[f(x_1..x_n)/y]$ wobei f neu
  - Allgemein: eliminiere δ-Quantoren und δ-Variablen

    Transformiere $Q_\delta y\, F$ in $F[f(a_1..a_n)/y]$ wobei f neu ist und die a_i die γ-Vorfahren des Quantors Q_δ sind

- **Beispiele**
  - Skolemisierung von $\exists x \forall y\, Pxy \Rightarrow \forall y \exists x\, Pxy$ ergibt $\forall y\, Pay \Rightarrow \exists x\, Pxb$
  - ... von $\forall x \exists y\, Pxy \Rightarrow \exists y \forall x\, Pxy$ ergibt $\forall x\, P(x, fx) \Rightarrow \exists y\, P(gy, y)$

Skolemisierung erhält Gültigkeitt

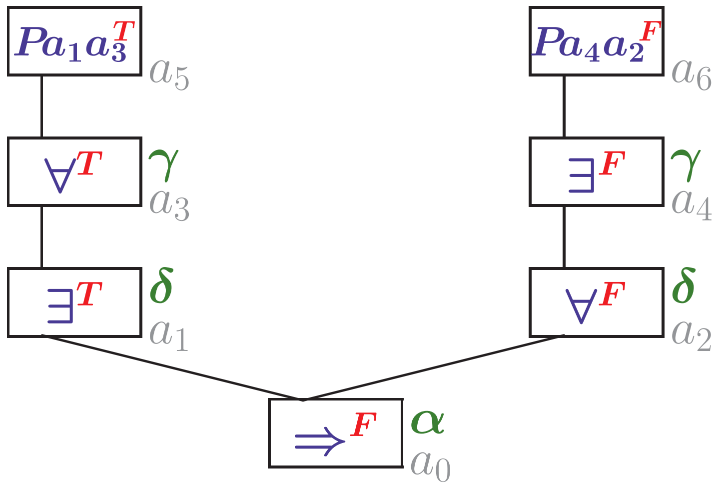
- **F ist gültig g.d.w. die Skolemisierung von F gültig ist**
  - Beweis: Induktion über Skolemisierungsschritte im Formelbaum
  - Kernargumente sind die folgenden
    - · Für jede Interpretation ι und jedes $u \in \mathcal{U}$ gibt es ein $F \in \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ mit $F(\iota(x)) = u$, also $\iota_f^F(fx) = \iota_a^u(a)$
    - · Für jede Interpretation ι gilt
      $\iota(\delta) \;\leftrightarrow\; \iota_a^u(\delta(a))$ für ein neues a und ein $u \in \mathcal{U}$
      $\qquad\;\leftrightarrow\; \iota_f^F(\delta(fx))$ für ein neues f und ein $F \in \mathcal{U} \to \mathcal{U}$
    - · Für jede Interpretation ι' gibt es ι, f, F mit $\iota' = \iota_f^F$
    - · δ gültig $\leftrightarrow$ $\iota(\delta)$ bzw. $\iota_f^F(\delta(fx))$ für alle ι $\leftrightarrow$ $\iota'(\delta(fx))$ für alle ι'
  - Analoges gilt auch für Erfüllbarkeit

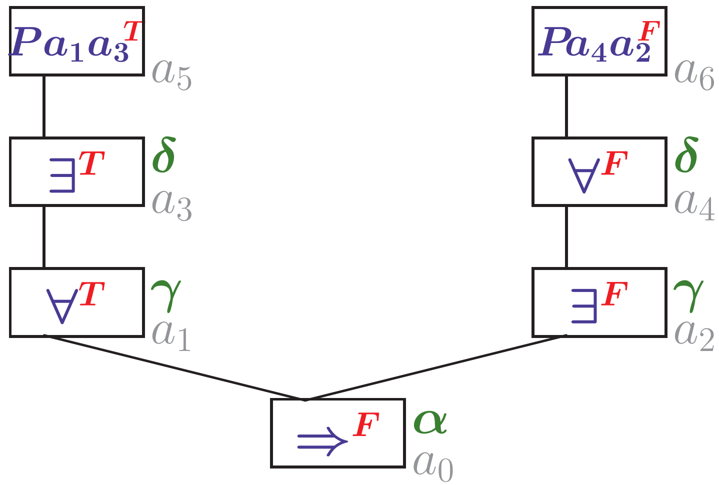
- **Substitutionen auf Formeln in Skolem-NF sind zulässig**
  - Beweis trivial, da Formeln in Skolem-NF keine δ-Positionen besitzen

Matrixdarstellung quantifizerter Formeln

- **Formelbäume**

$\exists x \forall y\, Pxy \Rightarrow \forall y \exists x\, Pxy$ $\qquad\qquad$ $\forall x \exists y\, Pxy \Rightarrow \exists y \forall x\, Pxy$





- **Treue zweidimensionale Matrixformen**

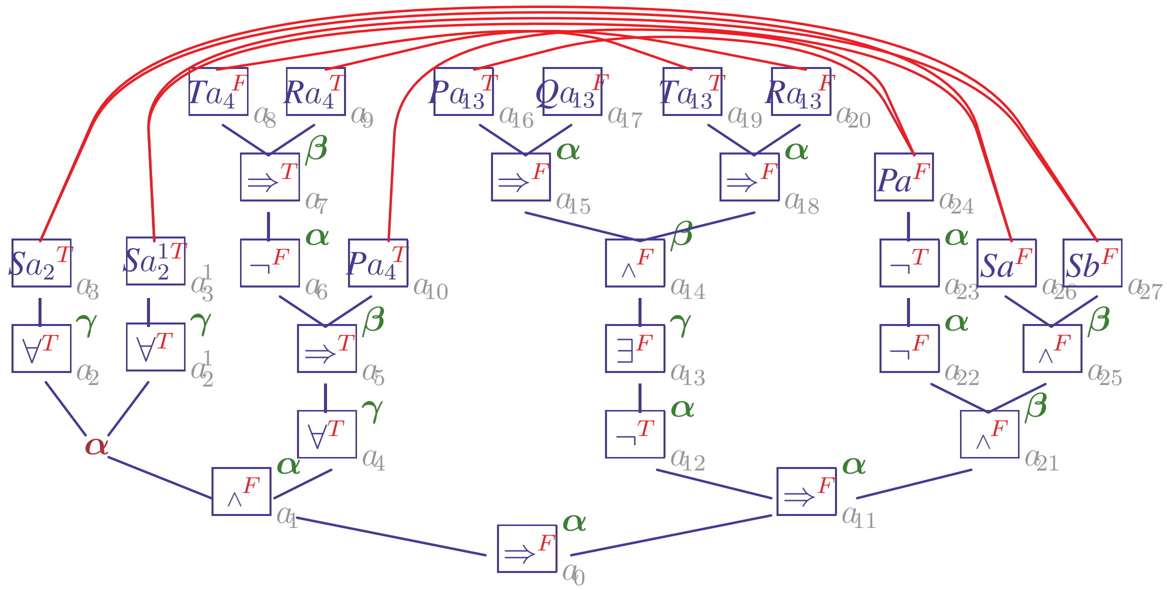
$\left[\; Pa_1a_3{}^T \quad Pa_4a_2{}^F \;\right]$ $\qquad\qquad$ $\left[\; Pa_1a_3{}^T \quad Pa_4a_2{}^F \;\right]$

a_3, a_4 *haben Typ* γ, a_1, a_2 *haben Typ* δ $\qquad\qquad$ a_1, a_2 *haben Typ* γ, a_3, a_4 *haben Typ* δ

- **Zweidimensionale Matrizen der skolemisierten Formeln**

$\left[P(a,y)^T \;\; P(x,b)^F\right]$ $\qquad\qquad$ $\left[P(x,fx)^T \;\; P(gy,y)^F\right]$

Matrixdarstellung einer komplexen Formel

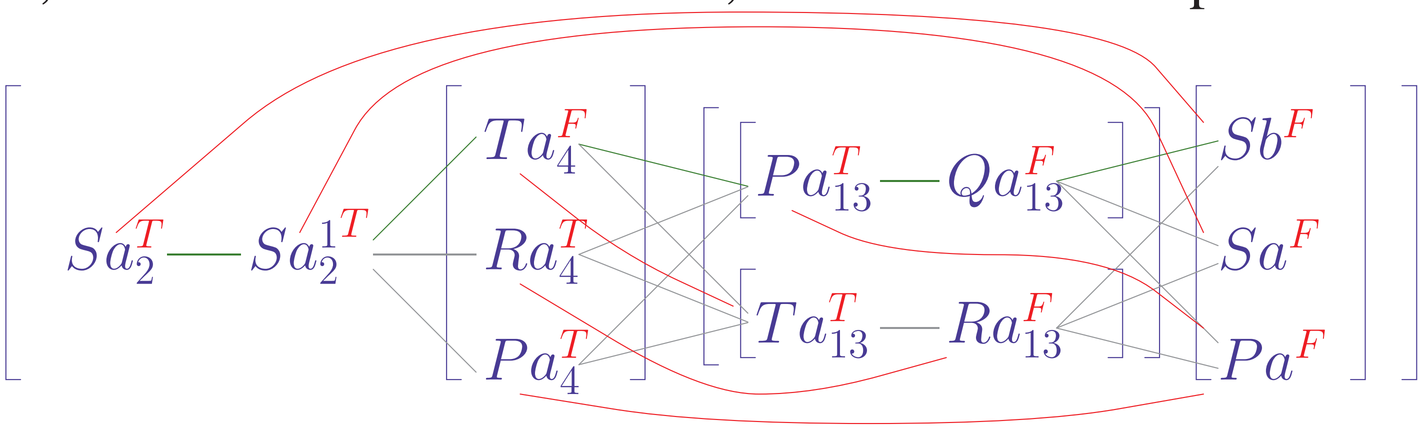


2-dimensionale Matrixstruktur zu einfach

– Wechsel zwischen α/β-Knoten führt zu Schachtelung

– 2-dimensionale Darstellung verwendet Klammern

– Pfade, die eine Submatrix betreten, müssen diese komplett durchlaufen



Matrixdarstellung einer Formel präzisiert

- **Einfache Matrizen (Normalform-Matrizen)**
  - **Literal**: atomare Formel mit Polarität
    positives Literal: Polarität F **negatives Literal**: Polarität T
  - **Klausel**: endliche Mengen $c = \{L_1, \ldots, L_k\}$ von Literalen
    Horn-Klausel: Klausel mit höchstens einem negativen Literal
  - **Matrix**: endliche Menge $M = \{c_1, \ldots, c_n\}$ von Klauseln
    Horn-Matrix: Menge von Horn-Klauseln
- **Allgemeine Definition: Matrizen der Tiefe n**
  - **Tiefe 0**: Literal L
  - **Tiefe n+1**: endliche Menge von Matrizen der maximalen Tiefe n
    Klauseln sind Matrizen der Tiefe 1, einfache Matrizen sind Matrizen der Tiefe 2
- **Lesarten von Matrizen**
  - Ein Literal repräsentiert sich selbst
  - Matrix der Tiefe 2n-1: Menge von Matrizen in β-Beziehung
  - Matrix der Tiefe 2n: Menge von Matrizen in α-Beziehung
    Eine Klausel repräsentiert eine Menge von Literalen in β-Beziehung
    Eine einfache Matrix repräsentiert eine Menge von Klauseln in α-Beziehung

Positive/negative Lesart einfacher Matrizen

- **Negative Repräsentation als KNF:**
  - Repräsentiert indirekte Beweisführung (Tableaux, Prolog, ...)
  - Ein Literal X^F repräsentiert $\neg X$,
    X^T repräsentiert X
  - Eine Klausel repräsentiert die Disjunktion ihrer Literale
  - Eine Matrix repräsentiert die Konjunktion ihrer Klauseln
- **Positive Repräsentation als DNF:**
  - Repräsentiert direkte Beweisführung (Sequenzenkalkül,...)
  - Ein Literal X^F repräsentiert X,
    X^T repräsentiert $\neg X$
  - Eine Klausel repräsentiert die Konjunktion ihrer Literale
  - Eine Matrix repräsentiert die Disjunktion ihrer Klauseln

Matrixbeweise sind unabhängig von der Repräsentation

Präsentation von Matrizen

- **Mengenschreibweise**
  - Mit Polarität: $\{\{P^F\}, \{P^T, Q^F\}, \{Q^T, R^F\}, \{R^T\}\}$

    Kurzform: $\{\{P\}, \{\overline{P}, Q\}, \{\overline{Q}, R\}, \{\overline{R}\}\}$
  - Negative Repräsentation: $\neg P \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R) \wedge R$

    Positive Repräsentation: $P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge R) \vee \neg R$

- **2-dimensionale Matrixformen:**

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & \neg P & \neg Q & \neg R \\ P & Q & R & \end{bmatrix}$$

- **Gedrehte Repräsentation als** Prolog **Programm**

$$\begin{bmatrix} R^T & \\ Q^T & R^F \\ P^T & Q^F \\ & P^F \end{bmatrix}$$

```
R.
Q :- R.
P :- Q.
  :- P?
```

Erzeugung zweidimensionaler Matrizen

- **Schrittweisen Erzeugung beim Parsen der Formel**

$$\alpha \mapsto \begin{bmatrix}\alpha_1 \; \alpha_2\end{bmatrix} \qquad \beta \mapsto \begin{bmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{bmatrix} \qquad \gamma \mapsto \gamma(a_i^j) \qquad \delta \mapsto \delta(a_i)$$

- **Ausflachen "gleichartiger" Teilmatrizen**

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1 M_2\end{bmatrix} \; M_3\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}M_1 \; M_2 \; M_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1 M_2\end{bmatrix} \; \begin{bmatrix}M_3 M_4\end{bmatrix}\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}M_1 \; M_2 \; M_3 \; M_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1 \\ M_2\end{bmatrix} & M_3\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}M_1 & M_3 \\ M_2 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1 \\ M_2\end{bmatrix} \\ M_3\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}M_1 \\ M_2 \\ M_3\end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Systematischer Aufbau von Matrizen

- **Matrix für** $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

- **Matrix für** $(\forall x\, Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$

$$\begin{bmatrix} Pa_1{}^F & Pa_4{}^T & Qa_5{}^F \\ Qa_1{}^T & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} Px^F & Py^T & Qa^F \\ Qx^T & & \end{bmatrix}$$

a_1, a_4 *haben Typ* γ, a_5 *hat Typ* δ — Matrix der skolemisierten Formel

- **Matrix für** $(\forall x \exists y\, Pxy) \Rightarrow (\exists z\, Paz \wedge \exists z\, Pbz)^F$ $(\mu{=}2)$

$$\begin{bmatrix} Pa_1a_3{}^T & Pa_1^1a_3^{1T} & Paa_4{}^F \\ & & Pba_5{}^F \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} P(x_1, fx_1)^T & P(x_2, fx_2)^T & Paz^F \\ & & Pbz'^F \end{bmatrix}$$

a_1, a_1^1, a_4, a_5 *Typ* γ, a_3, a_3^1 *Typ* δ — Matrix der skolemisierten Formel

Beweiskonzepte formuliert für Matrizen

- **Pfad durch eine Matrix**
  - Tiefe 2, $M = \{c_1, .., c_n\}$: Menge von Literalen $\{L_1, .., L_n\}$ mit $L_i \in c_i$
  - Tiefe 2n, $M = \{M_1, .., M_n\}$: Vereinigung $p_1 \cup .. \cup p_n$ mit p_i Pfad durch M_i
  - Tiefe 2n+1, $M = \{M_1, .., M_n\}$: einer der Pfade p_i durch eines der M_i
- **Konnektionen, Komplementarität wie zuvor**
  - Zulässigkeitsbedingung der Substitution am Formelbaum zu prüfen oder direkt in Skolemfunktionen codiert
- **Beispielbeweise**

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))^F$$

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & P^T \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

$$(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))^F$$

$\sigma = [a_5/a_1, a_5/a_4]$ *ist zulässig*

$$\begin{bmatrix} Pa_1{}^F & Pa_4{}^T & Qa_5{}^F \\ Qa_1{}^T & & \end{bmatrix}$$

$$(\forall x \exists y\, Pxy) \Rightarrow (\exists z\, Paz \wedge \exists z\, Pbz)^F$$

$\sigma = [a, b, fa, fb/x_1, x_2, z, z']$ (Skolemform)

$$\begin{bmatrix} P(x_1, fx_1)^T & P(x_2, fx_2)^T & \begin{matrix} Paz^F \\ Pbz'^F \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Codierung der Multiplizität in Matrizen

- **Klauselkopien verbrauchen Speicherplatz**

$$\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)^F \qquad \begin{bmatrix} P{x_1}^T & P{x_2}^T & \begin{matrix} Pa^F \\ Pb^F \end{matrix} \end{bmatrix}$$

- **Kurzform: Indizierte Konnektion**
  - Konnektion mit Index für (implizite) Klauselkopie
  - Verdichtete Codierung durch kleinere Matrix
  - Bezug der Matrix zur Originalformel besser erkennbar

$$\begin{bmatrix} Px^T & \begin{matrix} Pa^F \\ Pb^F \end{matrix} \end{bmatrix}$$

- **Indizierte Matrix**
  - Matrix M mit indizierter Paarung
  - Expandierte Form: erweiterte Form mit expliziten Kopien von Klauseln
  - Pfade durch M: Pfade durch expandierte Form von M
- **Aufspannende (indizierte) Paarung**
  - Jeder Pfad (durch die indizierte Matrix) enthält eine Konnektion
  - σ-komplementäre aufspannende indizierte Paarungen beweisen Gültigkeit

Charakterisierungstheorem für Matrizen

Eine Formel F in Matrixform ist gültig, wenn es

– eine zulässige Substitution σ

und

– eine Menge $\mathcal{C}$ von indizierten σ-komplementären Konnektionen

gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

Beweis folgt direkt aus Charakterisierungstheorem für Formeln

– Für skolemisierte Formeln ist keine Zulässigkeitsbedingung nötig

– Indizierte Matrizen werden nur bei sehr großen oder verschachtelten Matrizen verwendet, da das Erzeugen und Verarbeiten von Klauselkopien technisch leichter zu realisieren ist

Anmerkungen zu Normalformen

Viele Beweissysteme verarbeiten nur Normalformen

- **Formeln werden schrittweise auf Normalform gebracht**
  – **Negationsnormalform**: Negationszeichen nur direkt vor Atomen
  – **Pränexnormalform**: Quantoren erscheinen nur zu Beginn der Formel
  – **Skolemnormalform**: Formel F enthält nur Quantoren vom Typ γ
  – **Konjunktive** (negativ) bzw. **Disjunktive Normalform** (positiv)
  Formel F enthält nur Konjunktionen, Disjunktionen und Negationen
- **Vorteil: einfachere Beweisverfahren**
  – Unkomplizierte Matrix- und Pfadstruktur, leicht zu verarbeiten
- **Nachteil: Entstellung der Formel**
  – Exponentielle Aufblähung bei naiver Erzeugung der DNF / KNF
  – Originalformel selten rekonstruierbar
  – Erzeugung von Tableaux- bzw. Sequenzenbeweisen nahezu unmöglich
  – Verfahren lassen sich schlecht auf andere Logiken verallgemeinern

Beweissuche im Matrixkalkül

Suche komplementäre aufspannende indizierte Paarungen

- **Aufbau der Datenstruktur**
  - Annotierter Formelbaum mit Polaritäten und Typen oder Matrixform
  - Identifikation aller möglichen Konnektionen
- **Pfadexploration**
  - Prüfe ob jeder Pfad durch F mindestens eine Konnektion enthält
  - Konnektionenorientiertes Verfahren streicht Gruppen überprüfter Pfade
- **Unifikation**
  - Bestimme Substitution σ, die alle Konnektionen komplementär macht
  - Überprüfe Zulässigkeit der Substitution (trivial bei Skolemform)
  - Integriere Unifikationsverfahren in Pfadexplorationsschritte
- **Multiplizitätsbestimmung**
  - Erhöhe Multiplizität von γ-Knoten oder Konnektionsindizes dynamisch
- **Rücktransformation**
  - Erzeuge Tableaux-/Sequenzenbeweis aus Matrixbeweis