# Inferenzmethoden

## Teil II

## Deduktionsverfahren

Automatische Suche nach Beweisen

# Inferenzmethoden

## Einheit 4

## Die Konnektionsmethode:
## Systematische Pfadüberprüfung

1. Aussagenlogische Einzelschritte
2. Ergänzungen für die Prädikatenlogik
3. Formale Darstellung als Kalkül
4. Eigenschaften

# MATRIXBASIERTE DEDUKTION

## Suche komplementäre Konnektionen in allen Pfaden

- **Zentrale Aufgabe: Überprüfung aller Pfade**
  – Explizite Überprüfung ist meist exponentiell: $\mathcal{O}(2^n)$ Pfade für $n$ Klauseln
- **Beobachtung: Untersuchung von Teilpfaden reicht**
  – Eine Konnektion auf dem Pfad macht alle Pfade komplementär, die den Teilpfad fortsetzen. Sie mussen nicht weiter untersucht werden.
- **Grundidee: Eliminiere Mengen von Pfaden**
  – Orientiere Überprüfung an Konnektionen $\mathcal{O}(m^2)$ für $m$ Literale
  – Eliminiere Pfade durch Literal $L$, die eine Konnektion mit $L$ enthalten. Untersuche systematisch die restlichen Pfade durch $L$
- **Basisstrategie: Extensionsverfahren (Tiefensuche)**
  – Kennzeichne abgeschlossene (komplementäre) Teilpfade
  – Verfolge den nächsten noch offenen Teilpfad
  Extension des Pfades bei konnektionenorientiertem Vorgehen
  – Markiere Teilpfade, die später noch zu betrachten sind

# Extensionsschritt "$\vdash$"

$$
\left[\begin{array}{cccc}
 & P^T & Q^T & R^T \\
P^F & Q^F & R^F & \\
\nearrow & & & \\
Q^F & R^F & & \\
\nearrow\ \uparrow & & &
\end{array}\right]
\quad \vdash \quad
\left[\begin{array}{cccc}
 & P^T\,\bullet & Q^T & R^T \\
\boxed{P^F} & Q^F & R^F & \\
 & \nearrow & & \\
Q^F & R^F & & \\
\nearrow & \nearrow\ \uparrow & &
\end{array}\right]
$$

$\uparrow$ markiert **aktuelle Klausel**

$\nearrow$ markiert Startliterale der noch offenen Teilpfade

$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades**

$\bullet$ markiert abgeschlossene Teilpfade

---

1. Wähle ein mit $\nearrow$ markiertes Literal $L$ der aktuellen Klausel
2. Ersetze $\nearrow$ durch Box $\boxed{L}$; wähle von $L$ ausgehende Konnektion
   Falls es weitere Konnektionen gibt, vermerke diese in Alternativenmenge
3. Markiere konnektiertes Literal mit $\bullet$
4. Markiere andere Literale der konnektierten Klausel mit $\nearrow$
5. Verschiebe $\uparrow$ auf die konnektierte Klausel

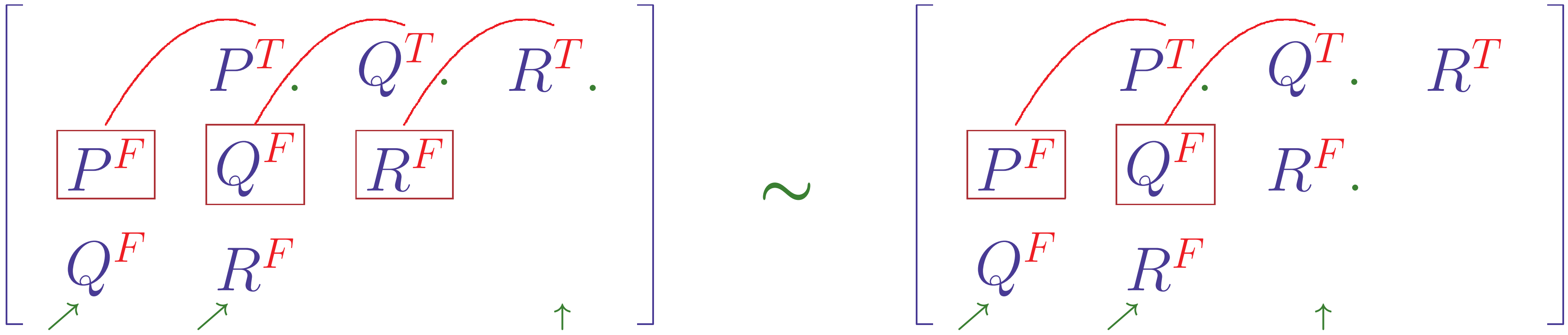
# Extensionsverfahren illustriert

$$
\left[\begin{array}{cccc}
 & P^T & Q^T & R^T \\
P^F & Q^F & R^F & \\
Q^F & R^F & & 
\end{array}\right]
\quad\vdash\quad
\left[\begin{array}{cccc}
 & P^T & Q^T & R^T \\
\boxed{P^F} & Q^F & R^F & \\
Q^F & R^F & & 
\end{array}\right]
$$

$$
\vdash
\left[\begin{array}{cccc}
 & P^T & Q^T & R^T \\
\boxed{P^F} & \boxed{Q^F} & R^F & \\
Q^F & R^F & & 
\end{array}\right]
\quad\vdash\quad
\left[\begin{array}{cccc}
 & P^T & Q^T & R^T \\
\boxed{P^F} & \boxed{Q^F} & \boxed{R^F} & \\
Q^F & R^F & & 
\end{array}\right]
$$

**Kein weiterer Extensionsschritt möglich**

# Bereinigungsschritt "$\sim$"



- **Keine Extension mehr möglich**
  - Keine Literale der aktuellen Klausel mit $\nearrow$ markiert
  - **Alle Alternativen des aktuellen Pfades sind überprüft**
- **Markiere aktuellen Pfad als abgeschlossen**
  1. Entferne Punktmarkierungen der aktuellen Klausel
  2. Setze $\uparrow$ zurück auf letzte Klausel des aktuellen Pfades
  3. Ersetze Markierung $\boxed{L}$ durch .
- **Setze Verfahren fort**
  - Weitere Extensions- oder Bereinigungsschritte

# Beweis für $P \wedge Q \;\vee\; \neg P \wedge Q \wedge R \;\vee\; \neg Q \wedge R \;\vee\; \neg R$

$$
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}
\vdash
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ \boxed{P^F} & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}
\vdash
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ \boxed{P^F} & \boxed{Q^F} & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}
$$

$$
\vdash
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ \boxed{P^F} & \boxed{Q^F} & \boxed{R^F} & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ \boxed{P^F} & \boxed{Q^F} & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ \boxed{P^F} & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}
$$

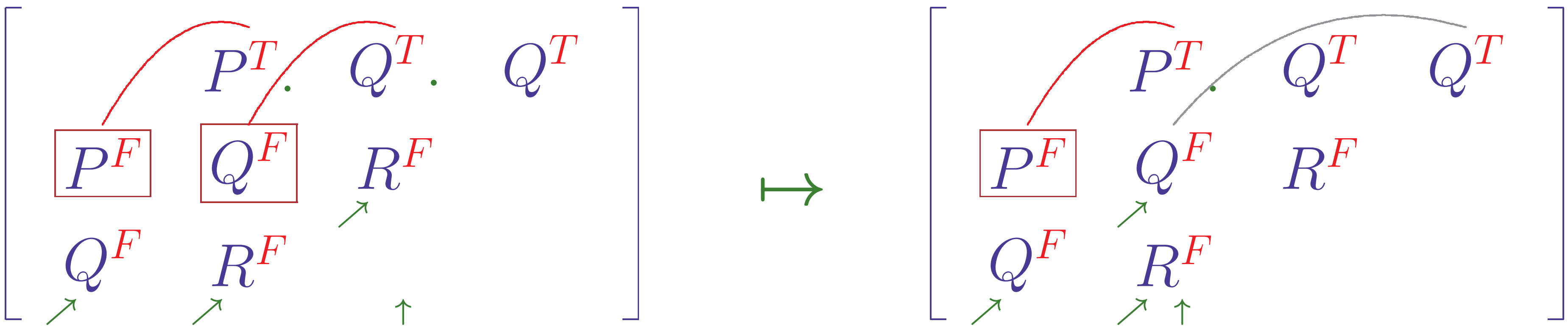
$$
\vdash
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ \boxed{P^F} & Q^F & R^F & \\ Q^F & \boxed{R^F} & & \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ \boxed{P^F} & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}
$$

$$
\vdash
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ \boxed{Q^F} & R^F & & \end{bmatrix}
\vdash
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & \boxed{R^F} & \\ \boxed{Q^F} & R^F & & \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ \boxed{Q^F} & R^F & & \end{bmatrix}
$$

$$
\sim
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}
\sim
\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix}
$$

# Rücksetzung (Backtracking) “$\mapsto$”

## Extension und Bereinigung alleine reicht nicht




- **Keine Extension mehr möglich**
  - Alternativenmenge nicht leer
  - **Eine andere Alternative muß verfolgt werden**
- **Mache vorhergehende Extensionen rückgängig**
  1. Gehe zurück zu Literal des aktuellen Pfades mit alternativen Konnektionen
  2. Stelle die damalige Konfiguration wieder
  3. Streiche die zuletzt betrachtete Konnektion aus der Alternativenmenge

# SEPARATION “$\leadsto$”

## Wenn die falsche Startklausel gewählt wurde ...

$$\left[\begin{array}{cccc} & P^T & R^F & R^T \\ \boxed{P^F} & Q^F & & \\ Q^F & & & \end{array}\right] \quad \leadsto \quad \left[\begin{array}{cc} R^F & R^T \end{array}\right]$$

- **Keine Extension mehr möglich**
  - Alternativenmenge leer
  - Noch unbetrachtete Klauseln vorhanden
  - **Gültigkeit hängt nur von verbleibenden Klauseln ab**
- **Untersuche nur die anderen Klauseln**
  1. Entferne alle Klauseln mit Literalen des aktuellen Pfades
  2. Starte Extensionsverfahren erneut auf reduzierter Matrix

# Gegenbeispiele

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ \boxed{P^F} & \boxed{Q^F} & \boxed{R^F} \\ Q^F & R^F & \end{bmatrix}$$

- **Keine Extension mehr möglich**
  - Alternativenmenge leer
  - Keine unbetrachteten Klauseln vorhanden
- **Extensionsbeweis schlägt fehl**
  - Der Pfad $\{P^F, Q^F, R^F\}$ kann nicht abgeschlossen werden
  - Matrix bzw. Eingabeformel sind nicht allgemeingültig
- **Pfad liefert Gegenbeispiel für Gültigkeit der Matrix**
  - Interpretiere Literale auf dem Pfad ($P$, $Q$ und $R$) mit falsch
  - Liefert Belegung, die $P \land Q \;\lor\; \neg P \land Q \land R \;\lor\; \neg Q \land R$ widerlegt

# KONNEKTIONSMETHODE – EINFACHE VERSION

1. Wähle rein positive Klausel als Startklausel und markiere sie mit $\uparrow$
   *Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative und eine rein positive Klausel*
2. Markiere alle Literale der aktuellen Klausel mit $\nearrow$
3. Wende Extensions- Bereinigungs-, Rücksetzungs- und Separationsschritte an, so lange dies möglich ist
4. Sind alle Literale der Startklausel betrachtet, so ist die Formel gültig
   Andernfalls ist sie nicht gültig, wenn alle Klauseln betrachtet wurden

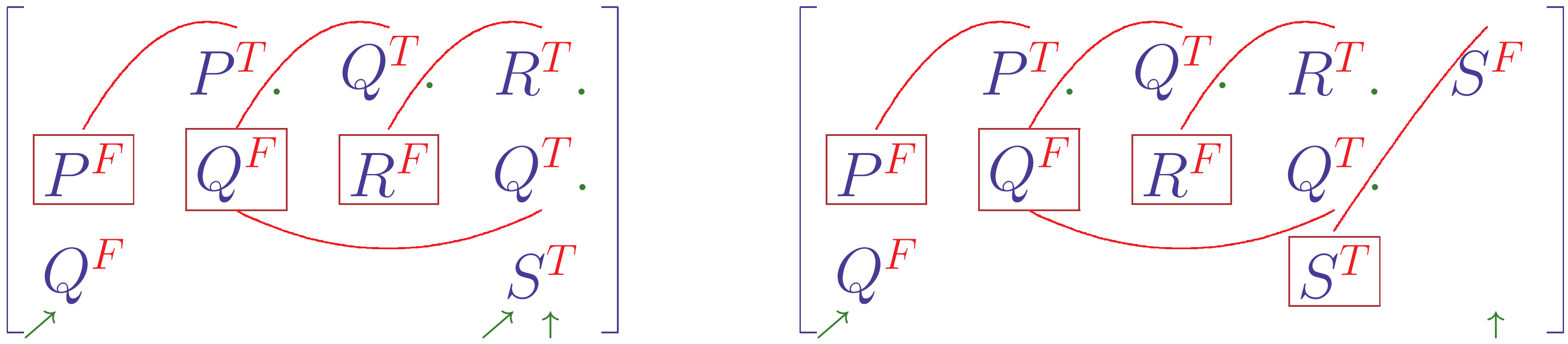
---

**5. Methode ist korrekt und vollständig für Hornformeln**

**6. Konnektionsmethode ist ein Kalkül, keine Strategie**

**7. Strategisch zu wählende Steuerungsparameter**
   – Wahl der Startklausel – sollte Zielklausel (Behauptung) sein
   – Anordnung der Literale in einer Klausel
   – Wahl der Konnektion bei mehreren Alternativen

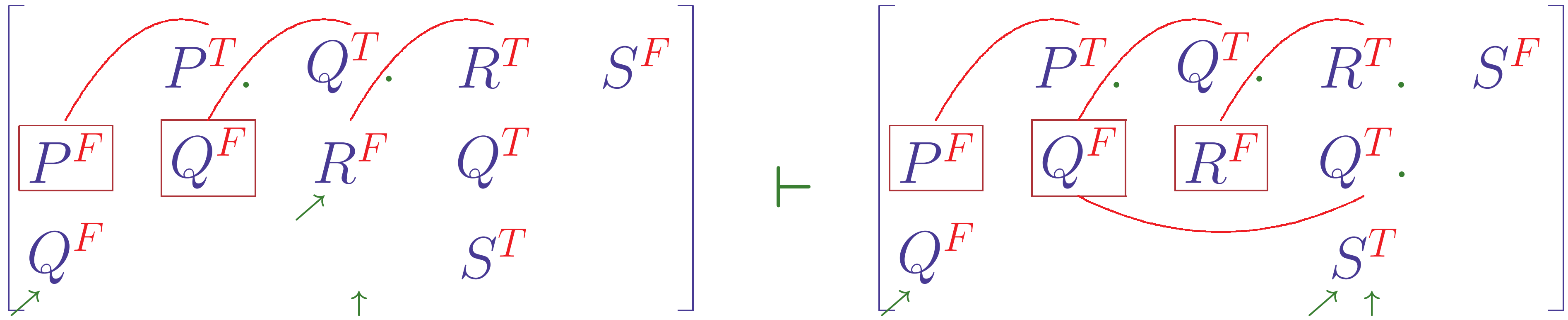
# Wenn keine Horn-Matrix vorliegt …




- **Keine normale Extension mehr möglich**
  - Konnektion zurück nach $Q^F$ ergäbe zyklischen aktuellen Pfad
- **Pfad $\boxed{P^F}$ $\boxed{Q^F}$ darf nicht abgeschlossen werden**
  - Pfade durch $P^F$ $Q^F$ $R^F$ $S^T$ sind nicht komplementär
  - Matrix ist nicht gültig
- **$Q^T$ muß aber als abgeschlossen markiert werden**
  - Pfade durch $P^F$ $Q^F$ $R^F$ $Q^T$ sind komplementär
  - Matrix auf rechter Seite ist gültig

**Extensionsschritt muß verallgemeinert werden**

# Allgemeiner Extensionsschritt “⊢”




↑ markiert **aktuelle Klausel**

↗ markiert Startliterale der noch offenen Teilpfade

$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades**

. markiert abgeschlossene Teilpfade

---

1. Wähle ein mit ↗ markiertes Literal $\boldsymbol{L}$ der aktuellen Klausel
2. Ersetze ↗ durch Box $\boxed{\boldsymbol{L}}$; wähle von $\boldsymbol{L}$ ausgehende Konnektion
   Falls es weitere Konnektionen gibt, vermerke diese in Alternativenmenge
3. Markiere alle Literale der konnektierten Klausel, die
   mit einem Literal des aktuellen Pfades konnektiert sind, mit .
4. Markiere andere Literale der konnektierten Klausel mit ↗
5. Verschiebe ↑ auf die konnektierte Klausel

# Allgemeiner Extensionsschritt – illustriert

$$\left[\begin{array}{cccc} & P^T \cdot & Q^T \cdot & R^T \cdot \\ \boxed{P^F} & \boxed{Q^F} & \boxed{R^F} & Q^T \cdot \\ & & & P^T \cdot \\ & & & \uparrow \end{array}\right]$$

Wähle ein mit $\nearrow$ markiertes Literal $L$ der aktuellen Klausel

1. Wähle neues Literal $R^F$; markiere $R^T$ als geschlossen
2. Konnektiere mit $Q^F$
3. Konnektiere mit $P^F$

**Komplexität linear in Länge des aktuellen Pfades**

# Beweis für $P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$

$$\begin{bmatrix} P^F & P^F & P^T & P^T \\ Q^F & Q^T & Q^F & Q^T \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} \boxed{P^F} & P^F & P^T. & P^T \\ Q^F & Q^T & Q^F & Q^T \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} \boxed{P^F} & P^F & P^T. & P^T. \\ Q^F & Q^T & \boxed{Q^F} & Q^T. \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} \boxed{P^F} & P^F & P^T. & P^T \\ Q^F & Q^T & Q^F. & Q^T \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} P^F. & P^F & P^T & P^T \\ Q^F & Q^T & Q^F & Q^T \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} P^F. & P^F & P^T & P^T \\ \boxed{Q^F} & Q^T. & Q^F & Q^T \end{bmatrix}$$

$$\vdash \begin{bmatrix} P^F. & \boxed{P^F} & P^T. & P^T \\ \boxed{Q^F} & Q^T. & Q^F & Q^T \end{bmatrix} \vdash \begin{bmatrix} P^F. & \boxed{P^F} & P^T. & P^T. \\ \boxed{Q^F} & Q^T. & \boxed{Q^F} & Q^T. \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} P^F. & \boxed{P^F} & P^T. & P^T \\ \boxed{Q^F} & Q^T. & Q^F. & Q^T \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} P^F. & P^F. & P^T & P^T \\ \boxed{Q^F} & Q^T. & Q^F & Q^T \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} P^F. & P^F & P^T & P^T \\ Q^F. & Q^T & Q^F & Q^T \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} P^F & P^F & P^T & P^T \\ Q^F & Q^T & Q^F & Q^T \end{bmatrix}$$

# Beweis für $P\wedge Q \;\vee\; \neg P\wedge Q \;\vee\; \neg Q\wedge R \;\vee\; \neg P\wedge\neg Q \;\vee\; P$

$$\begin{bmatrix} P^F & P^T & Q^T & P^T & P^F \\ Q^F & Q^F & R^F & Q^T & \end{bmatrix} \;\vdash\; \begin{bmatrix} \boxed{P^F} & P^T. & Q^T & P^T & P^F \\ Q^F & Q^F & R^F & Q^T & \end{bmatrix}$$

$$\vdash\; \begin{bmatrix} \boxed{P^F} & P^T. & Q^T. & P^T & P^F \\ Q^F & \boxed{Q^F} & R^F & Q^T & \end{bmatrix} \;\mapsto\; \begin{bmatrix} \boxed{P^F} & P^T. & Q^T & P^T. & P^F \\ Q^F & \boxed{Q^F} & R^F & Q^T. & \end{bmatrix}$$

$$\sim\; \begin{bmatrix} \boxed{P^F} & P^T. & Q^T. & P^T & P^F \\ Q^F & Q^F. & R^F & Q^T & \end{bmatrix} \;\sim\; \begin{bmatrix} P^F. & P^T & Q^T & P^T & P^F \\ Q^F & Q^F & R^F & Q^T & \end{bmatrix}$$

$$\vdash\; \begin{bmatrix} P^F. & P^T & Q^T. & P^T & P^F \\ \boxed{Q^F} & Q^F & R^F & Q^T & \end{bmatrix} \;\mapsto\; \begin{bmatrix} P^F. & P^T & Q^T. & P^T & P^F \\ \boxed{Q^F} & Q^F & R^F & Q^T & \end{bmatrix}$$

$$\vdash\; \begin{bmatrix} P^F. & P^T & Q^T & P^T & P^F. \\ \boxed{Q^F} & Q^F & R^F & Q^T. & \end{bmatrix} \;\sim\; \begin{bmatrix} P^F. & P^T & Q^T & P^T. & P^F \\ \boxed{Q^F} & Q^F & R^F & Q^T. & \end{bmatrix}$$

$$\sim\; \begin{bmatrix} P^F. & P^T & Q^T & P^T & P^F \\ Q^F. & Q^F & R^F & Q^T & \end{bmatrix} \;\sim\; \begin{bmatrix} P^F & P^T & Q^T & P^T & P^F \\ Q^F & Q^F & R^F & Q^T & \end{bmatrix}$$

# Konnektionsmethode für die Prädikatenlogik

## Liften der aussagenlogischen Methode

- **Zulässige Substitution muß bestimmt werden**
  - Verfahren muß partielle Substitution $\sigma$ mitführen und erweitern
- **Erweiterung des Extensionsschrittes "$\vdash$"**
  - Konnektierte Literale müssen unifiziert werden
  - Alternativen werden komplexer
- **Bereinigungsschritt "$\sim$" bleibt i.w. unverändert**
- **(Implizite) Klauselkopien können nötig sein**
  - Erzeuge Klauselkopien bzw. Indizierung dynamisch
- **Erweiterung des Rücksetzungsschrittes "$\mapsto$"**
  - Alternative konnektierte Klauseln
  - Alternative Substitutionen und passende konnektierte Literale
  - Alternative Startklauseln (ersetzt Separationsschritt)
  - Zusätzliche Instanzen der Matrix

# Prädikatenlogische Erweiterung des Extensionsschrittes

$$
\left[\begin{array}{cccc}
 & Hx^{T} & Sx^{T} & Ac^{T} \\
Hc^{F} & Sx^{F} & Ax^{F} & \\
\nearrow\ \uparrow & & &
\end{array}\right]_{[\,]}
\;\vdash\;
\left[\begin{array}{cccc}
 & Hx^{T}\,\centerdot & Sx^{T} & Ac^{T} \\
\boxed{Hc^{F}} & Sx^{F} & Ax^{F} & \\
 & \nearrow\ \uparrow & &
\end{array}\right]_{[c/x]}
$$

$\uparrow$ markiert **aktuelle Klausel**

$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades**

Aktuelle Substitution $\sigma$ wird mitgeführt

$\nearrow$ markiert Startliterale der noch offenen Teilpfade

$\centerdot$ markiert abgeschlossene Teilpfade

---

1. Wähle ein mit $\nearrow$ markiertes Literal $\boldsymbol{L}$ der aktuellen Klausel
2. Ersetze $\nearrow$ durch Box $\boxed{\boldsymbol{L}}$; wähle von $\boldsymbol{L}$ ausgehende Konnektion
   Falls es weitere Konnektionen gibt, vermerke diese in Alternativenmenge
3. Unifiziere die konnektierten (mit $\boldsymbol{\sigma}$ modifizierten) Terme und erweitere $\boldsymbol{\sigma}$
   Falls Terme nicht unifizierbar sind, breche den Extensionsschritt ab
4. Markiere alle Literale der konnektierten Klausel, die unter $\boldsymbol{\sigma}$ komplementär zu einem Literal des aktuellen Pfades sind, mit $\centerdot$
5. Markiere andere Literale der konnektierten Klausel mit $\nearrow$
6. Verschiebe $\uparrow$ auf die konnektierte Klausel

# Einfacher prädikatenlogischer Extensionsbeweis

$$
\begin{bmatrix} & Hx^T & Sx^T & Ac^T \\ Hc^F & Sx^F & Ax^F & \end{bmatrix} []
\quad \vdash \quad
\begin{bmatrix} & Hx^T. & Sx^T & Ac^T \\ \boxed{Hc^F} & Sx^F & Ax^F & \end{bmatrix} [c/x]
$$

$$
\vdash \quad
\begin{bmatrix} & Hx^T. & Sx^T. & Ac^T \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & Ax^F & \end{bmatrix} [c/x]
\quad \vdash \quad
\begin{bmatrix} & Hx^T. & Sx^T. & Ac^T. \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & \end{bmatrix} [c/x]
$$

$$
\sim \quad
\begin{bmatrix} & Hx^T. & Sx^T. & Ac^T \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & Ax^F. & \end{bmatrix} [c/x]
\quad \sim \quad
\begin{bmatrix} & Hx^T. & Sx^T & Ac^T \\ \boxed{Hc^F} & Sx^F. & Ax^F & \end{bmatrix} [c/x]
$$

$$
\sim \quad
\begin{bmatrix} & Hx^T & Sx^T & Ac^T \\ Hc^F. & Sx^F & Ax^F & \end{bmatrix} [c/x]
\quad \sim \quad
\begin{bmatrix} & Hx^T & Sx^T & Ac^T \\ Hc^F & Sx^F & Ax^F & \end{bmatrix} [c/x]
$$

# Verallgemeinerungen des Extensionsschrittes I

**Alle neuen Konnektionen müssen komplementär sein**

$$\begin{bmatrix} & Hy^{T}\,. & Sx^{T} \\ \boxed{Hc^{F}} & Sx^{F} & Hx^{T} \\ & \nearrow\ \uparrow & \end{bmatrix} [c/y] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hy^{T}\,. & Sx^{T}\,. \\ \boxed{Hc^{F}} & \boxed{Sx^{F}} & Hx^{T}\,. \\ & & \uparrow \end{bmatrix} [c/y, c/x]$$

## $Hx^{T}$ ist konnektiert mit $Hc^{F}$

– Konnektion nicht komplementär unter (erweiterter) Substitution $\sigma$

– Konnektion wird aber komplementär, wenn $\sigma$ nochmals erweitert wird

$$\Downarrow$$

## Verallgemeinere Schritt 4 auf unifizierbare Konnektionen

“Markiere alle Literale der konnektierten Klausel, die unter einer Erweiterung von $\sigma$ komplementär zu einem Literal des aktuellen Pfades sind, mit **.**”

# Verallgemeinerungen des Extensionsschrittes II

$$\begin{bmatrix} & Hy^T. & Sx^T. & Ax^T \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & Ax^F & Hx^T \\ & & & Sd^T \end{bmatrix}[c/y] \vdash \begin{bmatrix} & Hy^T. & Sx^T. & Ax^T. \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T. \\ & & & Sd^T \end{bmatrix}[c/y,c/x]$$

$$\vdash \begin{bmatrix} & Hy^T. & Sx^T. & Ax^T. \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T \\ & & & Sd^T. \end{bmatrix}[c/y,d/x]$$

**$Hx^T$ ist konnektiert mit $Hc^F$, $Sx^F$ mit $Sd^T$**

– $(Hx^T, Hc^F)$ ist unifizierbar durch Erweiterung von $\sigma$ auf $[c/y, c/x]$

– $(Sx^F, Sd^T)$ ist unifizierbar durch Erweiterung von $\sigma$ auf $[c/y, d/x]$

– Mehrere alternative Extensionen mit verschiedenen Substitutionen möglich

$$\Downarrow$$

**Verallgemeinere Schritte 3/4 und den Rücksetzungsschritt**

– Bilde Unifikatoren für alle Teilmengen konnektierter Literale

– Verfolge eine Alternative und speichere die anderen

# Allgemeiner prädikatenlogischer Extensionsschritt

1. Wähle ein mit $\nearrow$ markiertes Literal $L$ der aktuellen Klausel
2. Ersetze $\nearrow$ durch Box $\boxed{L}$; wähle von $L$ ausgehende Konnektion
   Falls es weitere Konnektionen gibt, vermerke diese in Alternativenmenge
3. Wähle Teilmenge der Literale der konnektierten Klausel, die mit dem aktuellen Pfad konnektiert sind, und eine Substitution $\rho$, welche die mit $\sigma$ modifizierten Konnektionen komplementär macht
   Erweitere $\sigma$ mit der zusätzlich generierten Substitution $\rho$
   Vermerke weitere Teilmengen und Substitutionen in Alternativenmenge
   Falls es keine solche Teilmenge gibt, breche den Extensionsschritt ab
4. Markiere alle gewählten Literale der konnektierten Klausel mit $\bullet$
5. Markiere andere Literale der konnektierten Klausel mit $\nearrow$
6. Verschiebe $\uparrow$ auf die konnektierte Klausel

## Keine Extension oder Bereinigung mehr möglich

$$\left[\begin{array}{cccc} Hx^T. & Sx^T. & Ax^T. & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T. \\ & & & Sd^T \end{array}\right][c/y, c/x] \quad \mapsto \quad \left[\begin{array}{cccc} Hy^T. & Sx^T. & Ax^T. & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T \\ & & & Sd^T. \end{array}\right][c/y, d/x]$$

- **Alternativenmengen nicht leer?**
  1. Gehe zurück auf Literal des aktuellen Pfades, von dem aus
     (a) eine alternative Unifikation möglich war oder
     (b) eine alternative Konnektion beginnt
  2. Stelle die damalige Konfiguration und Substitution wieder her
  3. Streiche die neu betrachtete Konnektion / Unifikation aus der entsprechenden Alternativenmenge
- **Alternativenmengen leer?**
  Versuche Neustart mit alternativer Startklausel oder Klauselkopie

# Prädikatenlogischer Extensionsbeweis

$$\left[\begin{array}{ccccc} & Hy^T & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ Hc^F & Sx^F & Ax^F & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{array}\right] []
\quad \vdash \quad
\left[\begin{array}{ccccc} & Hy^T. & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & Sx^F & Ax^F & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{array}\right] [c/y]$$

$$\vdash \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^T. & Sx^T. & Ax^T & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & Ax^F & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{array}\right] [c/y]
\quad \vdash \quad
\left[\begin{array}{ccccc} & Hy^T. & Sx^T. & Ax^T. & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T. & \\ & & & Sd^T & \end{array}\right] [c, c/y, x]$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^T. & Sx^T. & Ax^T. & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T & \\ & & & Sd^T. & \end{array}\right] [c, d/y, x]
\quad \vdash \quad
\left[\begin{array}{ccccc} & Hy^T. & Sx^T. & Ax^T. & Hd^F. \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & \boxed{Hx^T} & \\ & & & Sd^T. & \end{array}\right] [c, d/y, x]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} & Hy^T. & Sx^T. & Ax^T. & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T. & \\ & & & Sd^T. & \end{array}\right] [c, d/y, x]
\quad \sim^4 \quad
\left[\begin{array}{ccccc} & Hy^T & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ Hc^F & Sx^F & Ax^F & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{array}\right] [c, d/y, x]$$

# ALLGEMEINE RÜCKSETZUNG: KLAUSELKOPIE

$$\begin{bmatrix} \boxed{Pffy^F} & Px^F & Pc^T \\ & Pfx^T. & \end{bmatrix}_{[fy/x]} \quad \begin{array}{c} \mapsto \\ \vdash \end{array} \quad \begin{bmatrix} \boxed{Pffy^F} & \boxed{Px_1{}^F} & \boxed{Px_2{}^F} & Pc^T. \\ & Pfx_1{}^T.\,Pfx_2{}^T. & & \end{bmatrix}_{[fc,\, c,\, c/x_1,\, x_2,\, y]}$$

- **Extensionsschritt undurchführbar**
  - Neue Substitution $[c/x]$ widerspricht existierender Substitution $[fy/x]$
- **Formel $(\forall x\, Px \Rightarrow Pfx) \wedge Pc \;\Rightarrow\; \exists y\, Pffy$ ist gültig**
  - Argument $\forall x\, Px \Rightarrow Pfx$ kann doppelt verwendet werden
- **Extensionsbeweis benötigt Klauselkopie**
- **Es gibt viele offene Fragen**
  - Automatische Erzeugung von Kopien bei Rücksetzung?
    - Tiefensuche: Kopien frühzeitig dynamisch erzeugen
    - Breitensuche: Kopien nach erfolgloser Beweisführung
  - **Suche terminiert nicht immer**, da Prädikatenlogik unentscheidbar

# Prädikatenlogischer Extensionsbeweis mit Klauselkopie

$$\left[\begin{array}{ccc} Pffy^F & Px^F & Pc^T \\ & Pfx^T & \end{array}\right]_{[]}$$

$$\vdash \left[\begin{array}{ccc} \boxed{Pffy^F} & Px^F & Pc^T \\ & Pfx^T & \end{array}\right]_{[fy/x]}$$

$$\vdash \left[\begin{array}{ccc} \boxed{Pffy^F} & \boxed{Px^F} & Pc^T \\ & Pfx^T & \end{array}\right]_{[fy/x,\, c/x]?}$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{cccc} \boxed{Pffy^F} & Px_1^F & Px_2^F & Pc^T \\ & Pfx_1^T & Pfx_2^T & \end{array}\right]_{[fy/x_1]}$$

$$\vdash \left[\begin{array}{cccc} \boxed{Pffy^F} & \boxed{Px_1^F} & Px_2^F & Pc^T \\ & Pfx_1^T & Pfx_2^T & \end{array}\right]_{[fx_2,\, x_2/x_1,\, y]}$$

$$\vdash \left[\begin{array}{cccc} \boxed{Pffy^F} & \boxed{Px_1^F} & \boxed{Px_2^F} & Pc^T \\ & Pfx_1^T & Pfx_2^T & \end{array}\right]_{[fc,\, c,\, c/x_1,\, x_2,\, y]}$$

$$\sim^3 \left[\begin{array}{cccc} Pffy^F & Px_1^F & Px_2^F & Pc^T \\ & Pfx_1^T & Pfx_2^T & \end{array}\right]_{[fc,\, c,\, c/x_1,\, x_2,\, y]}$$

# Allgemeine Prädikatenlogische Rücksetzung

$$\left[\begin{array}{llll} \boxed{Pc^T} & Pfx^T & Pffy^F & Pfz^T \\ & Px^F. & & \end{array}\right]_{[c/x]} \quad \begin{array}{c}\mapsto\\ \vdash\end{array} \quad \left[\begin{array}{llll} Pc^T & Pfx^T & Pffy^F. & \boxed{Pfz^T} \\ & Px^F & & \end{array}\right]_{[fy/z]}$$

$$\left[\begin{array}{lll} \boxed{Pc^T} & Pfx^T & Pffy^F \\ & Px^F. & \end{array}\right]_{[c/x]} \quad \begin{array}{c}\mapsto\\ \vdash\end{array} \quad \left[\begin{array}{lllll} \boxed{Pc^T} & \boxed{Pfx_1^T} & \boxed{Pfx_2^T} & Pffy_1^F. & Pffy_2^F \\ & Px_1^F. & Px_2^F. & & \end{array}\right]_{[c,fc,c/x_1,x_2,y_1]}$$

- **Alternativenmengen nicht leer?** ✓
  1. Gehe zurück auf Literal des aktuellen Pfades, von dem aus
     (a) eine alternative Unifikation möglich war oder
     (b) eine alternative Konnektion beginnt
  2. Stelle die damalige Konfiguration und Substitution wieder her
  3. Streiche neu betrachtete Konnektion / Unifikation aus entsprechender Alternativenmenge
- **Alternativenmengen leer?**

  (a) Wähle alternative Startklausel, falls vorhanden, und beginne neu

  (b) Erzeuge Kopie einiger (aller) $\gamma$-Klauseln und starte Verfahren erneut

# Formalisierung des Extensionsverfahrens

- **Beweissuche basiert auf wenigen Einzelschritten**
  – Initialisierung von aktueller Klausel (Startklausel) und aktuellem Pfad
  – Extensionsschritt: Extension + Reduktion der konnektierten Klausel
  – Bereinigung: Abschluß eines Pfades
  – Rücksetzung: Revidierung falscher Entscheidungen (kein echter Schritt)
- **Eigentliche Beweissuche ist Wahl von Alternativen**
  – Auswahl des anzuwendenden Einzelschritts
  – Auswahl einer (rein positiven) Startklausel
  – Auswahl eines Literals der aktuellen Klausel für eine Extension
  – Auswahl der Konnektion für eine Extension
  – Auswahl von Konnektionen/Substitutionen für Reduktionen
  – Auswahl einer $\gamma$-Klausel zur Erzeugung einer Klauselkopie
- **Trenne Suche von schematischen Einzelschritten**
  – Formuliere Einzelschritte als (parametrisierte) Regeln eines Kalküls
  – Implementiere Suchstrategien für Auswahl von Regeln und Parameter

# Ein formaler Kalkül für das Extensionsverfahren

- **Einzelschritte operieren auf wenigen Daten**
  - Aktuelle Klausel, restliche Matrix, aktueller Pfad, aktuelle Substitution
  - Regeln verwalten Objekte der Form $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma$
- **Der Konnektionskalkül ist analytisch**
  - Ziel ist “Beweisbarkeit” zu zeigen, geschrieben als $\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma$
  - Regeln formuliert im Stil der Refinement Logik (ohne Hypothesen)
  - Auswahlparameter müssen als Parameter der Regeln anggeben werden
    z.B. Literal $L$ aus $\mathcal{C}$, das für eine Konnektion verwendet wird
  - Nebenbedingungen eines Schritte werden als Unterziele beschrieben
    z.B. Zugehörigkeit $L \in \mathcal{C}$ oder Komplementarität $\sigma(L) = \sigma(\overline{L'})$
    Eine Implementierung würde diese Bedingungen separat testen

**Weitere Verdichtung des Matrixkalküls**

# Regeln des Konnektionskalküls

- **Startregel**
  - Um $\mathcal{M}$ zu beweisen wähle Startklausel $\mathcal{C} \in \mathcal{M}$, setze $\mathcal{P} = \{\}$, $\sigma = [\,]$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vdash \mathcal{M} \\ \qquad \vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \{\}, [\,] \\ \qquad \vdash \mathcal{C} \in \mathcal{M} \end{array}} \quad \texttt{Start } \mathcal{C}$$

  - Beweisbarkeitssymbol $\vdash$ wird (nur) für diese Regel überladen

- **Bereinigung: Abschluß des aktuellen Pfades**
  - Im Konnektionskalkül enthält $\mathcal{C}$ nur die noch offenen Literale
  - Der aktuelle Pfad $\mathcal{P}$ ist im Kontext $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma$ abgeschlossen, wenn $\mathcal{C} = \{\}$ ist, d.h. alle Literale der aktuellen Klausel $\mathcal{C}$ sind abgeschlossen

$$\boxed{\vdash \{\}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma} \quad \texttt{Axiom}$$

  - Regel schließt einen Ast im Konnektionskalkülbeweis
  - Beweissuche geht über auf den nächsten ungeschlossenen Ast

# Regeln des Konnektionskalküls II

- **Extension: Verlängerung des aktuellen Pfades**
  - Um $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma$ zu beweisen, wähle Literal $L$ aus $\mathcal{C}$
    wähle komplementäres Literal $L'$ aus (Kopie) einer anderen Klausel $\mathcal{C}'$
    erweitere $\mathcal{P}$ um $L$, neue aktuelle Klausel wird $\mathcal{C}'\backslash L'$
  - Nach erfolgreichem Abschluß dieses Astes müssen die verbleibenden Literale von $\mathcal{C}$ geprüft werden, also $\mathcal{C}\backslash L, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma \\ \qquad \vdash \mathcal{C}'\backslash L', \mathcal{M}, \mathcal{P}\cup\{L_1\}, \sigma \\ \qquad \vdash \mathcal{C}\backslash L, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma \\ \qquad \vdash L \in \mathcal{C} \\ \qquad \vdash \mathcal{C}' \in \mathcal{M} \\ \qquad \vdash L' \in \mathcal{C}' \\ \qquad \vdash \sigma(L') = \sigma(\overline{L}) \end{array}} \quad \texttt{Extension}\ \ L, L', C'$$

  - Im allgemeinen Extensionsschritt wird die konnektierten Klausel $\mathcal{C}'$ durch weitere Konnektionen reduziert. Dies ist eine separate Regel.

# Regeln des Konnektionskalküls III

- **Reduktion: eliminiere konnektierte Literale**
  - Um $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma$ zu beweisen, wähle Literal $L$ aus aktuellem Pfad $\mathcal{P}$ und streiche komplementäres Literal $L'$ aus $\mathcal{C}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma \\ \qquad \vdash \mathcal{C}\backslash L, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma \\ \qquad \vdash L \in \mathcal{C} \\ \qquad \vdash L' \in \mathcal{P} \\ \qquad \vdash \sigma(L') = \sigma(\overline{L}) \end{array}} \quad \texttt{Reduction}\ L, L'$$

- **Anmerkungen zur Beweissuche im Konnektionskalküls**
  - Die Menge aller Konnektionen könnte a priori bestimmt werden.
    aber es ist weniger Aufwand, dies dynamisch zu prüfen
  - Eine Suchprozedur müsste alle Parameter systematisch durchlaufen
    Rücksetzung ist Teil dieser systematischen Suche
  - $\sigma$ muß global sein, wird aber durch lokale Unifikation konstruiert
    Dabei wird im Prinzip immer der gesamte Beweisbaum modifiziert
  - Logische Programmiersprachen haben diese Suche fest eingebaut

# Beweis für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_1, .., \mathcal{C}_4\} = \{\,\{P^F, Q^F\}, \{P^T, Q^F, R^F\}, \{Q^T, R^F\}, \{R^T\}\,\}$$

| | |
|---|---|
| $\vdash \mathcal{M}$ | BY Start $\mathcal{C}_1$ |
| 1. $\vdash \{P^F, Q^F\},\ \mathcal{M},\ \{\}, [\,]$ | BY Extension $P^F, P^T, \mathcal{C}_2$ |
| 1.1. $\vdash \{Q^F, R^F\},\ \mathcal{M},\ \{P^F\}, [\,]$ | BY Extension $Q^F, Q^T, \mathcal{C}_3$ |
| 1.1.1. $\vdash \{R^F\},\ \mathcal{M},\ \{P^F, Q^F\}, [\,]$ | BY Extension $R^F, R^T, \mathcal{C}_4$ |
| 1.1.1.1. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{P^F, Q^F, R^F\}, [\,]$ | BY Axiom |
| 1.1.1.2. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{P^F, Q^F\}, [\,]$ | BY Axiom |
| 1.1.2. $\vdash \{R^F\},\ \mathcal{M},\ \{P^F\}, [\,]$ | BY Extension $R^F, R^T, \mathcal{C}_4$ |
| 1.1.2.1. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{P^F, R^F\}, [\,]$ | BY Axiom |
| 1.1.2.2. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{P^F\}, [\,]$ | BY Axiom |
| 1.2. $\vdash \{Q^F\},\ \mathcal{M},\ \{\}, [\,]$ | BY Extension $Q^F, Q^T, \mathcal{C}_3$ |
| 1.2.1. $\vdash \{R^F\},\ \mathcal{M},\ \{Q^F\}, [\,]$ | BY Extension $R^F, R^T, \mathcal{C}_4$ |
| 1.2.1.1. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{Q^F, R^F\}, [\,]$ | BY Axiom |
| 1.2.1.2. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{Q^F\}, [\,]$ | BY Axiom |
| 1.2.2. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{\}, [\,]$ | BY Axiom |

**Kürzer und zielorientierter als entsprechender Tableauxbeweis**

# Beweis für

$$Hc \Leftarrow (\forall x, y\ (Hy \Leftarrow Sx) \wedge (Sx \Leftarrow Ax) \wedge (Ax \vee Hx \vee Sd) \wedge \neg Hd)$$

$$\mathcal{M} = \{\,\{Hc^F\}, \{Hy^T, Sx^F\}, \{Sx^T, Ax^F\}, \{Ax^T, Hx^T, Sd^T\}, \{Hd^F\}\,\}$$

| | |
|---|---|
| $\vdash\ \mathcal{M}$ | BY Start $\mathcal{C}_1$ |
| 1. $\vdash\ \{Hc^F\},\ \mathcal{M},\ \{\}, [c, d/y, x]$ | BY Extension $Hc^F, Hy^T, \mathcal{C}_2$ |
| 1.1. $\vdash\ \{Sx^F\},\ \mathcal{M},\ \{Hc^F\}, [c, d/y, x]$ | BY Extension $Sx^F, Sx^T, \mathcal{C}_3$ |
| 1.1.1. $\vdash\ \{Ax^F\},\ \mathcal{M},\ \{Hc^F, Sx^F\}, [c, d/y, x]$ | BY Extension $Ax^F, Ax^T, \mathcal{C}_4$ |
| 1.1.1.1. $\vdash\ \{Hx^T, Sd^T\},\ \mathcal{M},\ \{Hc^F, Sx^F, Ax^F\}, [c, d/y, x]$ | BY Reduction $Sf^T, Sx^F$ |
| 1.1.1.1.1. $\vdash\ \{Hx^T\},\ \mathcal{M},\ \{Hc^F, Sx^F, Ax^F\}, [c, d/y, x]$ | BY Extension $Hx^T, Hd^F, \mathcal{C}_5$ |
| 1.1.1.1.1.1. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{Hc^F, Sx^F, Ax^F, Hx^T\}, [c, d/y, x]$ | BY Axiom |
| 1.1.1.1.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{Hc^F, Sx^F, Ax^F\}, [c, d/y, x]$ | BY Axiom |
| 1.1.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{Hc^F, Sx^F\}, [c, d/y, x]$ | |
| 1.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{Hc^F\}, [c, d/y, x]$ | |
| 1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{\}, [c, d/y, x]$ | |

**Substitution wird global angepaßt**

# BEWEIS FÜR $Pc \wedge (\forall x\, Px \Rightarrow Pfx) \Rightarrow \exists y\, Pffy$

$$\mathcal{M} = \{\, \{Pc^T\}, \{Px^F, Pfx^T\}, \{Pffy^F\} \,\}$$

| | |
|---|---|
| $\vdash \mathcal{M}$ | BY Start $\mathcal{C}_3$ |
| 1. $\vdash \{Pffy^F\},\ \mathcal{M},\ \{\}, [fc, c, c'/x, x', y]$ | BY Extension $Pffy^F, Pfx^T, \mathcal{C}_2$ |
| 1.1. $\vdash \{Px^F\},\ \mathcal{M},\ \{Pffy^F\}, [fc, c, c'/x, x', y]$ | BY Extension $Px^F, Fx'^T, \mathcal{C}_2'$ |
| 1.1.1. $\vdash \{Px'^F\},\ \mathcal{M},\ \{Pffy^F, Px^F\}, [fc, c, c'/x, x', y]$ | BY Extension $Px'^F, Pc^T, \mathcal{C}_1$ |
| 1.1.1.1. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{Pffy^F, Px^F, Px'^F\}, [fc, c, c'/x, x', y]$ | BY Axiom |
| 1.1.1.2. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{Pffy^F, Px^F\}, [fc, c, c'/x, x', y]$ | BY Axiom |
| 1.1.2. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{Pffy^F\}, [fc, c, c'/x, x', y]$ | BY Axiom |
| 1.2. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{\}, [fc, c, c'/x, x', y]$ | BY Axiom |

**Substitution wird global angepaßt, Kopie dynamisch erzeugt**

# Eigenschaften des Extensionsverfahren

- **Korrekt und vollständig**
  - Verfahren akzeptiert Formel, g.dw. Matrixcharakterisierung überprüft ist
    - · Akzeptierte Formeln sind gültig
    - · Jede gültige prädikatenlogische Formel kann bewiesen werden
  - Reduktion ist notwendig für Vollständigkeit des Kalküls

    Beweissuchprozeß benötigt Rücksetzung für Vollständigkeit
- **Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik**
  - Für alle aussagenlogische Formeln hält die Konnektionsmethode nach endlich vielen Schritten an und liefert Beweise oder Gegenbeispiele
  - In begrenzter Form gilt dies sogar prädikatenlogisch (subtile Details)
- **Kalkül liefert Grundlage für Implementierung**
  - Logische Programmiersprachen können Kalkül direkt implementieren
  - Ansonsten muß Suchprozeß/Unifikation explizit implementiert werden

# KOMPLEXITÄT DES EXTENSIONSVERFAHREN

- **Aussagenlogisch (nur) im schlimmsten Fall exponentiell**
  - Schlimmster Fall: alle Pfade werden komplett geprüft
  - Es gibt maximal $m^n$ Pfade bei $n$ Klauseln mit insgesamt $m$ Literalen
  - Größenordnung $\mathcal{O}(2^n)$
- **Das Gültigkeitsproblem is $co\!-\!NP$-vollständig**
  - Erfüllbarkeit (SAT) ist $NP$-vollständig
  - Beweisverfahren müssen exponentiell sein, wenn $P{\neq}NP$
  - Es ist wichtig, die Anzahl der Klauseln klein zu halten
  - Es lohnt sich, im Vorfeld Klauselreduktionen durchzuführen $\mapsto$ später
- **Prädikatenlogische Gültigkeit ist sogar unentscheidbar**
  - Prädikatenlogische Verfahren müssen die Suchtiefe begrenzen
- **Verfahren ist im Mittel deutlich besser**
  - Exponentiell / $co\!-\!NP$-vollständig ist der schlimmste Fall
  - Extensionsverfahren ist linear bei Hornklauseln
  - Extensionsverfahren ist linear bei maximal 2 Literalen je Klausel

# Extensionsverfahren im Rückblick

- **Verdichtung des Tableauxverfahrens**
  - Kompaktheit: operiere ausschließlich auf atomaren Teilformeln
    keine Erzeugung überflüssiger Kopien
  - Konnektionenorientierung bei Beweissuche:
    gezielte Auswahl beweisrelevanter Teilformeln
  - Unifikation: gezielte Instantiierung von Quantoren

  Beweissuche kann erheblich effizienter implementiert werden

- **Es gibt viele Ähnlichkeiten**

| **Äste im Tableau** | $\widehat{=}$ | **Pfade durch die Matrix** |
|---|---|---|
| $\alpha$-Regel (Pfadverlängerung) | $\widehat{=}$ | Extensionschritt |
| $\beta$-Regel (Verzweigung) | $\widehat{=}$ | Markierung der noch offenen Literale |
| $\gamma$-Regel | $\widehat{=}$ | Instantiierung einer Variablen |
| $\delta$-Regel | $\widehat{=}$ | Einführung einer neuen Konstanten |
| Abgeschlossener Ast | $\widehat{=}$ | Komplementäre Konnektion im Pfad |

  Es ist möglich, Tableauxbeweise aus Matrixbeweisen zu rekonstruieren