

# Inferenzmethoden

## Einheit 6

### Das Extensionsverfahren für Nicht-Normalform-Matrizen



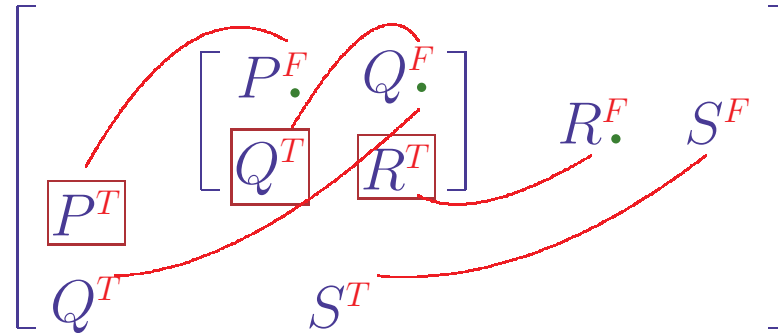
1. Anpassung der Grundkonzepte
2. Verfahren für Nicht-Normalform-Matrizen
3. Pfadexploration auf Formelbäumen

# DEDUKTION OHNE NORMALFORMBILDUNG

- **Normalform-Matrizen sind sehr einfach strukturiert**
  - Matrix  $\equiv$  Menge von Klauseln in  $\alpha$ -Beziehung
  - Klausel  $\equiv$  Menge von Literalen in  $\beta$ -Beziehung
  - Im Formelbaum müssten alle  $\alpha$ -Knoten vor den  $\beta$ -Knoten erscheinen
  - Nur wenige Formeln können direkt in Normalform repräsentiert werden
- **Normalformtransformationen sind “unnatürlich”**
  - Exponentielle Aufblähung der Formel möglich  $\mapsto$  Effizienzprobleme
  - Originalformel selten rekonstruierbar  $\mapsto$  Unverständliche Beweise
  - In nichtklassischen Logiken ist Normalisierung kaum möglich
- **Erweitere Extensionsverfahren auf Formelbäume**
  - Verwende allgemeine Konzepte anstelle der vereinfachten Klauselform
  - Matrizen sind komplexer (Mengen von Matrizen kleinerer Tiefe)
  - Pfadbegriff ist feiner (Menge von Literalen in  $\alpha$ -Beziehung)
  - Aufwendigere Pfadüberprüfung – sonst keine grundsätzliche Änderung

# NICHT-NORMALFORM – WAS MUSS ANGEPASST WERDEN?

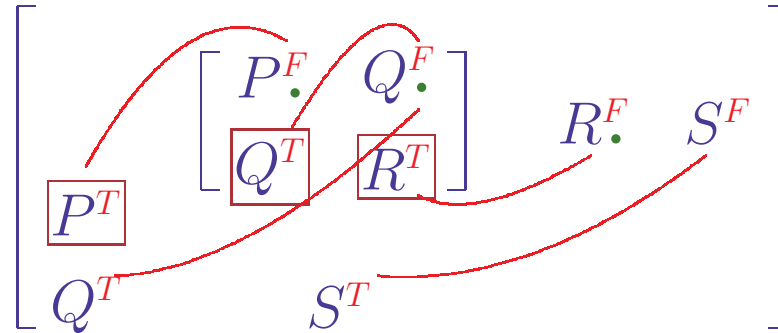
- **Erweiterung von Konzepten in der Aussagenlogik**



- Welche Literale gehören zum **aktuellen Pfad**?
- Was ist die “**aktuelle Klausel**”?
- **Extension**: Welcher Teil der Matrix kann noch **konnectiert** werden?
- **Bereinigung**: Wann ist eine “**Klausel**” abgeschlossen

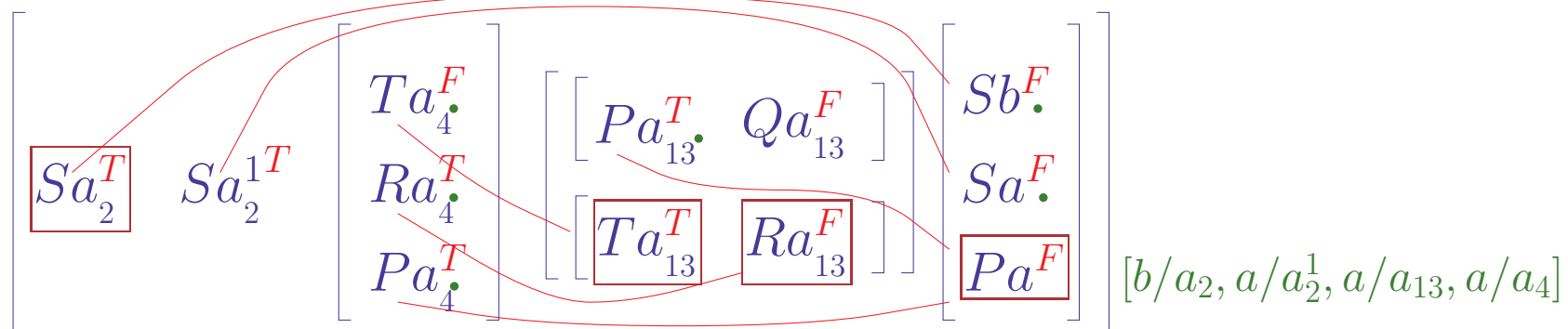
# NICHT-NORMALFORM – WAS MUSS ANGEPASST WERDEN?

## • Erweiterung von Konzepten in der Aussagenlogik



- Welche Literale gehören zum aktuellen Pfad?
- Was ist die “aktuelle Klausel”?
- **Extension:** Welcher Teil der Matrix kann noch konnektiert werden?
- **Bereinigung:** Wann ist eine “Klausel” abgeschlossen

## • Keine zusätzlichen Änderungen für Prädikatenlogik



# GRUNDKONZEPTE DES MATRIXKALKÜLS WIEDERHOLT

$$\left[ \begin{array}{cc} Sa_2^T & Sa_2^{1T} \\ \left[ \begin{array}{c} Ta_4^F \\ Ra_4^T \\ Pa_4^T \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} [Pa_{13}^T & Qa_{13}^F] \\ [Ta_{13}^T & Ra_{13}^F] \end{array} \right] \\ \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} Sb^F \\ Sa^F \\ Pa^F \end{array} \right]$$

## • $\alpha/\beta$ -Beziehung zwischen Literalen

- $u \sim_\alpha v$ :  $u \neq v$  und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ  $\alpha$
- $u \sim_\beta v$ :  $u \neq v$  und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ  $\beta$
- $u_\alpha = \{v \mid v \sim_\alpha u\}$ ,  $u_\beta = \{v \mid v \sim_\beta u\}$  und für  $u \neq v$  gilt  $v \in u_\alpha \Leftrightarrow v \notin u_\beta$

# GRUNDKONZEPTE DES MATRIXKALKÜLS WIEDERHOLT

$$\left[ \begin{array}{cc} Sa_2^T & Sa_2^{1T} \\ \left[ \begin{array}{c} Ta_4^F \\ Ra_4^T \\ Pa_4^T \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} [Pa_{13}^T & Qa_{13}^F] \\ [Ta_{13}^T & Ra_{13}^F] \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} Sb^F \\ Sa^F \\ Pa^F \end{array} \right] \end{array} \right]$$

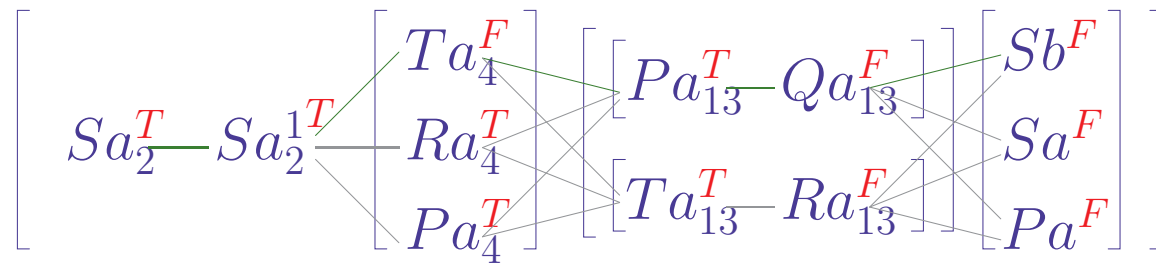
## ● $\alpha/\beta$ -Beziehung zwischen Literalen

- $u \sim_\alpha v$ :  $u \neq v$  und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ  $\alpha$
- $u \sim_\beta v$ :  $u \neq v$  und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ  $\beta$
- $u_\alpha = \{v \mid v \sim_\alpha u\}$ ,  $u_\beta = \{v \mid v \sim_\beta u\}$  und für  $u \neq v$  gilt  $v \in u_\alpha \Leftrightarrow v \notin u_\beta$

## ● Matrix (der Tiefe n)

- Literal oder Menge von Matrizen der maximalen Tiefe n-1
- Submatrizen stehen in  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Beziehung (gerade/ungerade Tiefe)
- Präsentation:  $\alpha$ -Beziehungen neben-,  $\beta$ -Beziehungen übereinander

# GRUNDKONZEPTE DES MATRIXKALKÜLS WIEDERHOLT



## ● $\alpha/\beta$ -Beziehung zwischen Literalen

- $u \sim_\alpha v$ :  $u \neq v$  und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ  $\alpha$
- $u \sim_\beta v$ :  $u \neq v$  und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ  $\beta$
- $u_\alpha = \{v \mid v \sim_\alpha u\}$ ,  $u_\beta = \{v \mid v \sim_\beta u\}$  und für  $u \neq v$  gilt  $v \in u_\alpha \Leftrightarrow v \notin u_\beta$

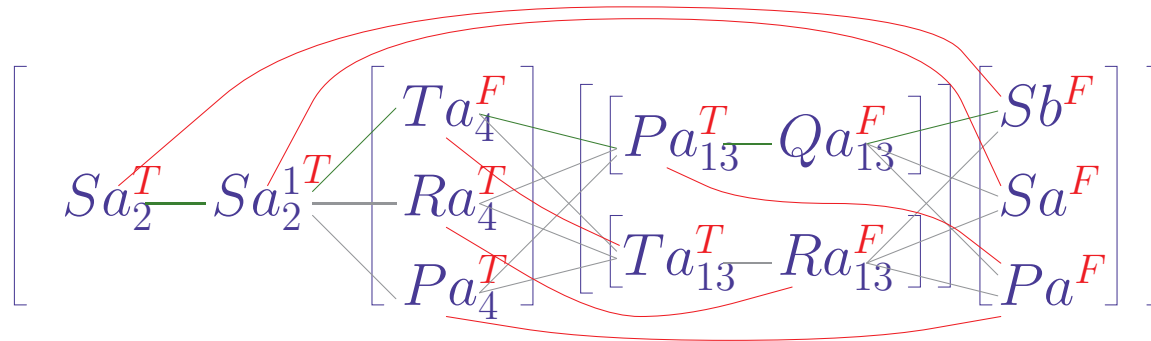
## ● Matrix (der Tiefe n)

- Literal oder Menge von Matrizen der maximalen Tiefe n-1
- Submatrizen stehen in  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Beziehung (gerade/ungerade Tiefe)
- Präsentation:  $\alpha$ -Beziehungen neben-,  $\beta$ -Beziehungen übereinander

## ● Pfad: (Maximale) Menge von Literalen in gegenseitiger $\alpha$ -Beziehung

- Implementierung verwendet induktive Definition auf Formelbaum

# GRUNDKONZEPTE DES MATRIXKALKÜLS WIEDERHOLT



## • $\alpha/\beta$ -Beziehung zwischen Literalen

- $u \sim_\alpha v$ :  $u \neq v$  und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ  $\alpha$
- $u \sim_\beta v$ :  $u \neq v$  und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ  $\beta$
- $u_\alpha = \{v \mid v \sim_\alpha u\}$ ,  $u_\beta = \{v \mid v \sim_\beta u\}$  und für  $u \neq v$  gilt  $v \in u_\alpha \Leftrightarrow v \notin u_\beta$

## • Matrix (der Tiefe n)

- Literal oder Menge von Matrizen der maximalen Tiefe n-1
- Submatrizen stehen in  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Beziehung (gerade/ungerade Tiefe)
- Präsentation:  $\alpha$ -Beziehungen neben-,  $\beta$ -Beziehungen übereinander

## • Pfad: (Maximale) Menge von Literalen in gegenseitiger $\alpha$ -Beziehung

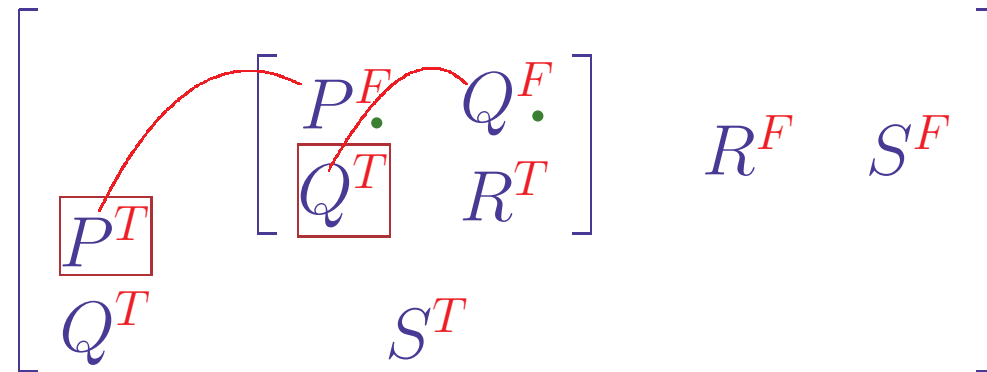
- Implementierung verwendet induktive Definition auf Formelbaum

## • $\sigma$ -komplementäre Konnektion

- Paar  $\{X_1^T, X_2^F\}$  von Literalen, deren Terme unter  $\sigma$  gleich sind



# ALLGEMEINES EXTENSIONSVERFAHREN: GRUNDKONZEPTE



- **Aktueller (aktiver) Pfad  $\mathcal{P}$**

- Nichtkomplementäre Menge von Literalen in gegenseitiger  $\alpha$ -Beziehung

Im Beispiel  $\mathcal{P} = \{P^F, Q^T\}$

- **Offene Teilmatrix  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$**

$\hat{=}$  ungenutzter Teil der Matrix

- Menge von Literalen, die zum aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  in  $\alpha$ -Beziehung stehen

Im Beispiel  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{Q^F, R^T, R^F, S^F\}$

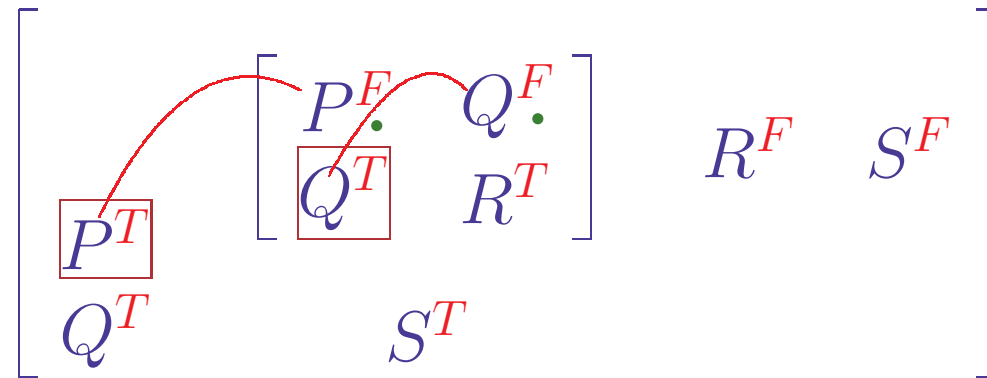
- **$L_{\beta}(\mathcal{P}) = \{v \in L_{\beta} \mid v \sim_{\alpha} \mathcal{P}\}$**

Klausel von  $L$  (bzgl.  $\mathcal{P}$ )

- Literale, die zum aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  in  $\alpha$ - und zu  $L$  in  $\beta$ -Beziehung stehen

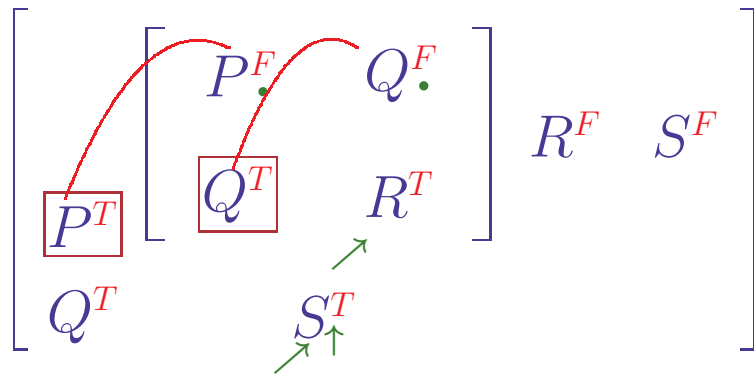
Im Beispiel  $Q^F_{\beta}(\mathcal{P}) = \{R^T\}$ ,  $R^T_{\beta}(\mathcal{P}) = \{Q^F\}$ ,  $R^F_{\beta}(\mathcal{P}) = \{\}, \dots$

# ALLGEMEINES EXTENSIONSVERFAHREN: GRUNDKONZEPTE



- Aktuelles Teilziel  $\mathcal{G}$**  (zu  $\mathcal{P}$ )  $\hat{=}$  abgeschlossene Literale der aktuellen Klausel
  - Menge von Literalen der offenen Teilmatrix in gegenseitiger  $\beta$ -Beziehung
  - Im Beispiel  $\mathcal{G} = \{Q^F\}$  (Definition erlaubt mehr, aber  $Q^F$  ist mit  $Q^T$  konnektiert)
- Aktives Ziel  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$**   $\hat{=}$  Indikator für aktuellen Stand der Beweissuche
  - Nichtkomplementärer aktueller Pfad  $\mathcal{P}$  und passendes aktuelles Teilziel  $\mathcal{G}$
  - Im Beispiel  $(\mathcal{P}, \mathcal{C}) = (\{P^F, Q^T\}, \{Q^F\})$
- Offenes Ziel  $\mathcal{C}$**  (zu  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ )  $\hat{=}$  offene Literale der aktuellen Klausel
  - Literale der offenen Teilmatrix, die zu  $\mathcal{G}$  in  $\beta$ -Beziehung stehen
  - Eindeutig durch  $\mathcal{M}$  und aktives Ziel bestimmt:  $\mathcal{C} = \{v \mid v \sim_{\alpha} \mathcal{P} \wedge v \sim_{\beta} \mathcal{G}\}$
  - Im Beispiel  $\mathcal{C} = \{R^T\}$

# REFORMULIERUNG DES EXTENSIONSSCHRITTS



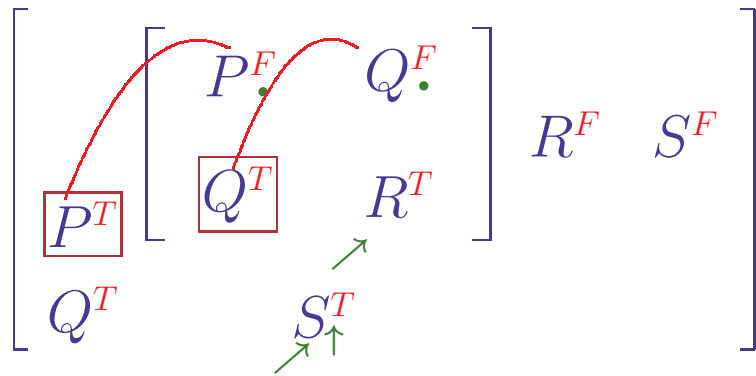
↑ markiert **aktuelle "Klausel"**

$\boxed{P}$  markiert Literale des **aktuellen Pfades**  $\mathcal{P}$

↗ markiert Literale des offenen Ziels  $\mathcal{C}$

• markiert abgeschlossene Teilpfade

# REFORMULIERUNG DES EXTENSIONSSCHRITTS



↑ markiert **aktuelle "Klausel"**

$\boxed{P}$  markiert Literale des **aktuellen Pfades  $\mathcal{P}$**

↗ markiert Literale des **offenen Ziels  $\mathcal{C}$**

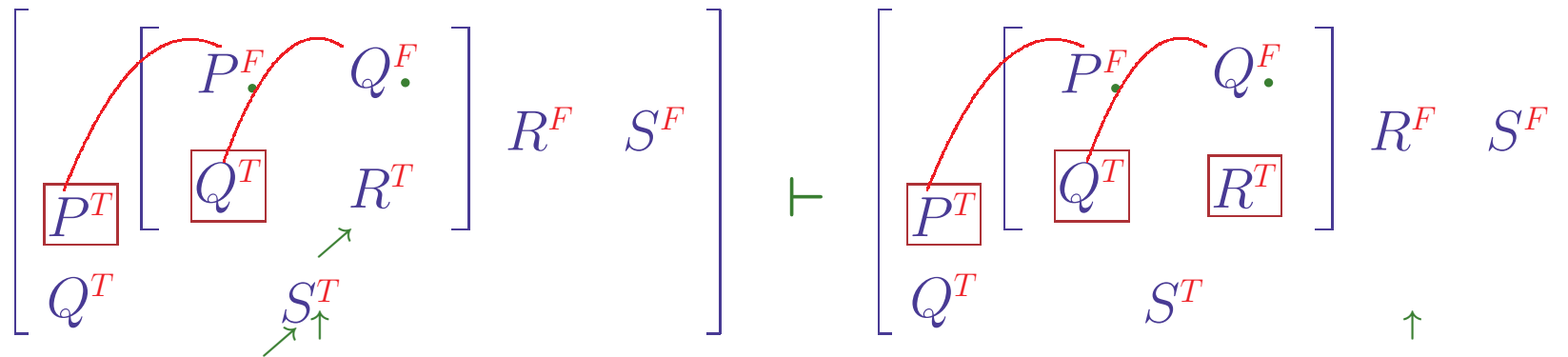
• markiert **abgeschlossene Teilpfade**

1. Wähle ein Literal  $L$  des zu  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  offenen Ziels  $\mathcal{C}$

markiert mit ↗

(Wähle ein mit ↗ markiertes Literal  $L$  der aktuellen Klausel)

# REFORMULIERUNG DES EXTENSIONSSCHRITTS



↑ markiert **aktuelle "Klausel"**

$\boxed{P}$  markiert Literale des **aktuellen Pfades  $\mathcal{P}$**

↗ markiert Literale des **offenen Ziels  $\mathcal{C}$**

• markiert **abgeschlossene Teilpfade**

1. Wähle ein Literal  $L$  des zu  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  offenen Ziels  $\mathcal{C}$

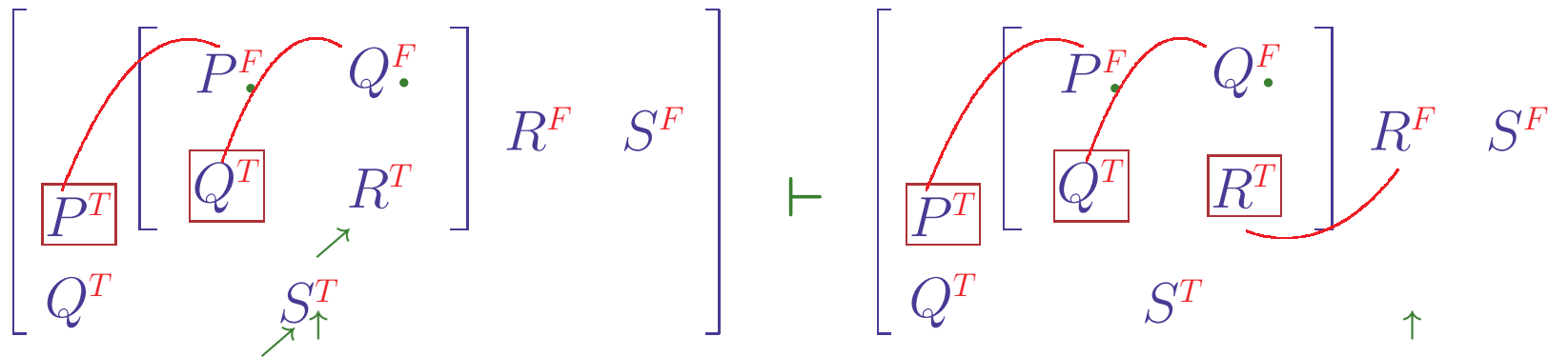
markiert mit ↗

2. Erweitere den aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  um  $L$

markiere mit Box  $\boxed{L}$

(Ersetze ↗ durch Box  $\boxed{L}$ )

# REFORMULIERUNG DES EXTENSIONSSCHRITTS



↑ markiert **aktuelle "Klausel"**

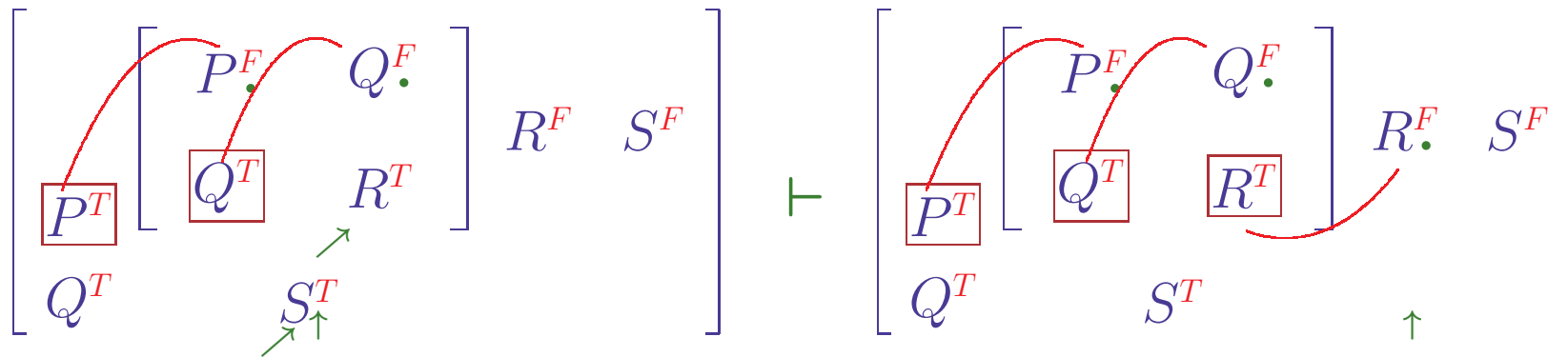
$\boxed{P}$  markiert Literale des **aktuellen Pfades  $\mathcal{P}$**

↗ markiert Literale des offenen Ziels  $\mathcal{C}$

• markiert **abgeschlossene Teilpfade**

1. Wähle ein Literal  $L$  des zu  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  offenen Ziels  $\mathcal{C}$  markiert mit ↗
2. Erweitere den aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  um  $L$  markiere mit Box  $\boxed{L}$
3. Wähle ein mit  $L$  konnektiertes Literal  $\bar{L}$  der offenen Teilmatrix  
 Vermerke Alternativen in **Alternativenmenge**  
 (wähle von  $L$  ausgehende Konnektion)

# REFORMULIERUNG DES EXTENSIONSSCHRITTS



↑ markiert **aktuelle "Klausel"**

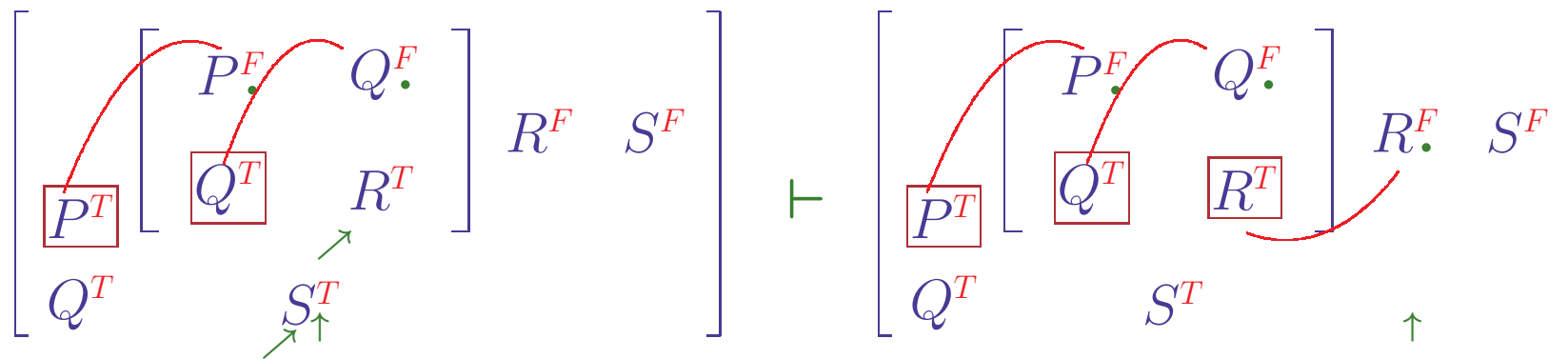
$\boxed{P}$  markiert Literale des **aktuellen Pfades  $\mathcal{P}$**

↗ markiert Literale des offenen Ziels  $\mathcal{C}$

• markiert abgeschlossene Teilpfade

1. Wähle ein Literal  $L$  des zu  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  offenen Ziels  $\mathcal{C}$  markiert mit ↗
2. Erweitere den aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  um  $L$  markiere mit Box  $\boxed{L}$
3. Wähle ein mit  $L$  konnektiertes Literal  $\bar{L}$  der offenen Teilmatrix  
Vermerke Alternativen in **Alternativenmenge**
4. Wähle Teilmenge  $\mathcal{G}$  der Literale der Klausel von  $\bar{L}$ , die mit dem  
aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  konnektiert sind, und eine Substitution  $\rho$ , welche die  
mit  $\sigma$  modifizierten Konnektionen komplementär macht markiere mit •  
(Markiere alle Literale der konnektierten Klausel, die unter  $\sigma$  komplementär zu einem  
Literal des aktuellen Pfades sind, mit •.)

# REFORMULIERUNG DES EXTENSIONSSCHRITTS



↑ markiert **aktuelle "Klausel"**

□ markiert Literale des **aktuellen Pfades  $\mathcal{P}$**

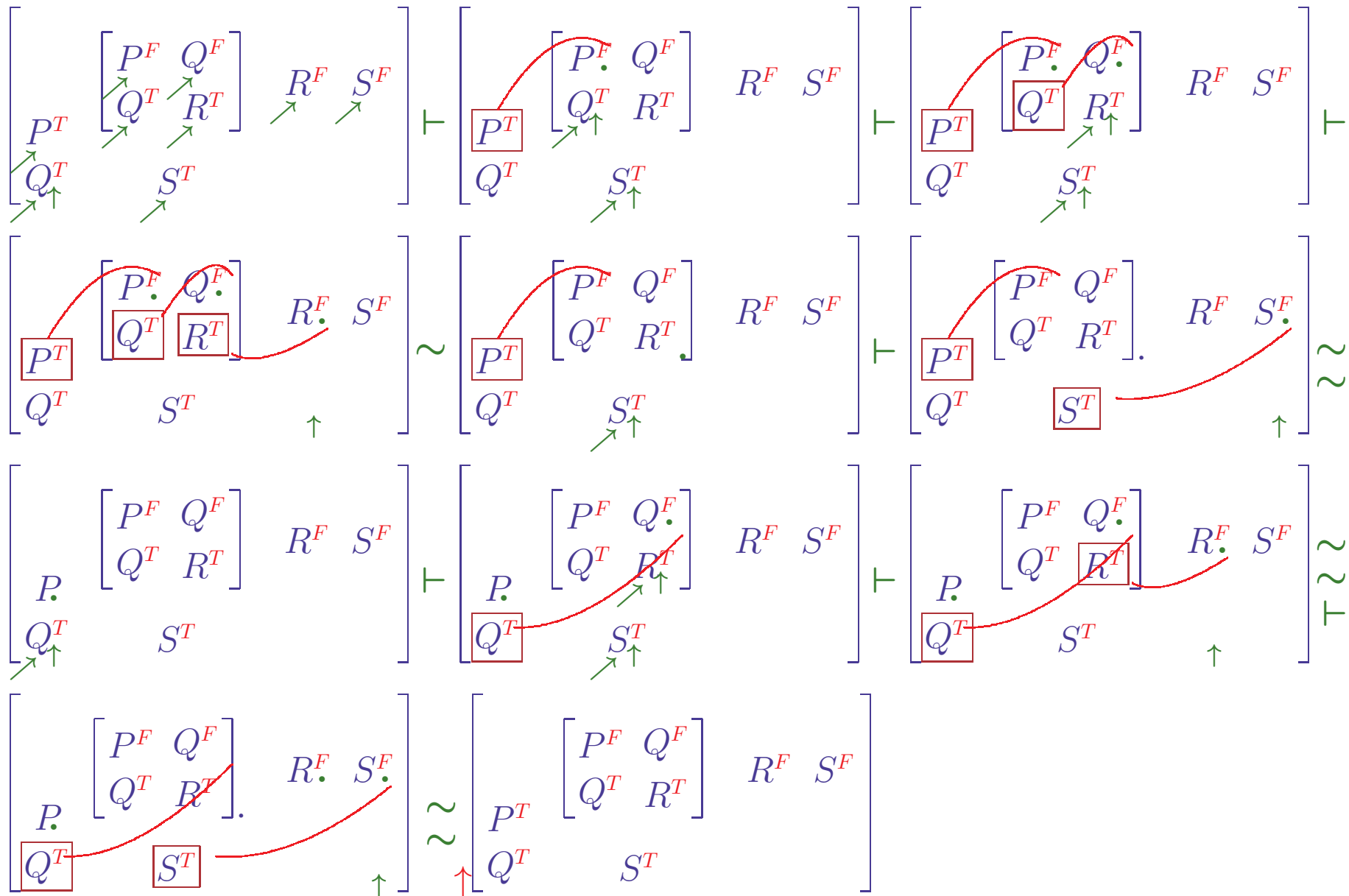
↗ markiert Literale des **offenen Ziels  $\mathcal{C}$**

• markiert **abgeschlossene Teilpfade**

1. Wähle ein Literal  $L$  des zu  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  offenen Ziels  $\mathcal{C}$  markiert mit ↗
2. Erweitere den aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  um  $L$  markiere mit Box □
3. Wähle ein mit  $L$  konnektiertes Literal  $\bar{L}$  der offenen Teilmatrix  
Vermerke Alternativen in **Alternativenmenge**
4. Wähle Teilmenge  $\mathcal{G}$  der Literale der Klausel von  $\bar{L}$ , die mit dem aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  konnektiert sind, und eine Substitution  $\rho$ , welche die mit  $\sigma$  modifizierten Konnektionen komplementär macht markiere mit •
  - Erweitere  $\sigma$  mit  $\rho$ ; vermerke alternative Teilmengen / Substitutionen
  - Breche den Extensionsschritt ab, falls es keine solche Teilmenge gibt



# EXTENSIONSBEWeis AUF NICHT-NORMALFORM MATRIZEN



- **2-D Matrizen sind nur eine Illustration**

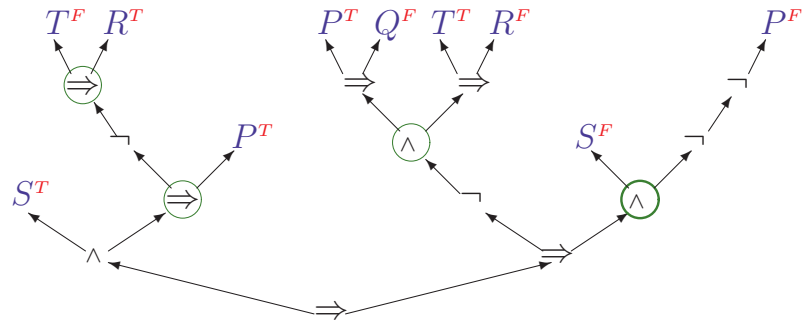
- Die Markierungen  $\uparrow$ ,  $\nearrow$   $L$ , sind nur optische Hilfsmittel
- Implementiertes Verfahren verarbeitet **Verwaltungsvariablen** für offene Ziele, offene Teilmatrix, aktuelle Pfade, Konnektionen, etc

- **Beschreibe Schritte mit Formelbaumkonzepten**

- Erlaubt **Herleitung** einer (nichtoptimierten) Referenzimplementierung **direkt aus dem Charakterisierungstheorem**
- Beweis der Korrektheit und Vollständigkeit der Implementierung wird erheblich erleichtert
- Methodik auch jenseits von Prädikatenlogik erster Stufe anwendbar

**Details in Fachaufsätzen auf der Veranstaltungswebseite**

# EXTENSIONSSCHRITT AUF FORMELBÄUMEN

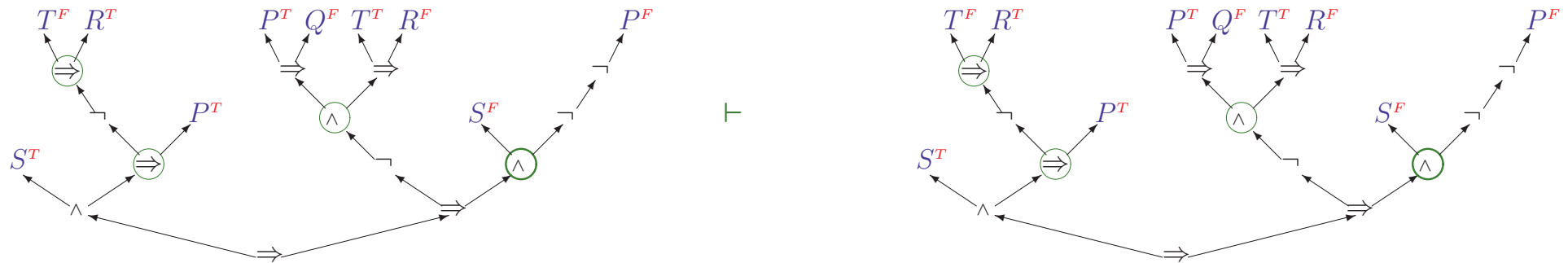


$$\mathcal{P} = \{\}$$

$$\mathcal{G} = \{\}$$

$$\mathcal{C} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$$

# EXTENSIONSSCHRITT AUF FORMELBÄUMEN



$$\mathcal{P} = \{\}$$

$$L = S^T,$$

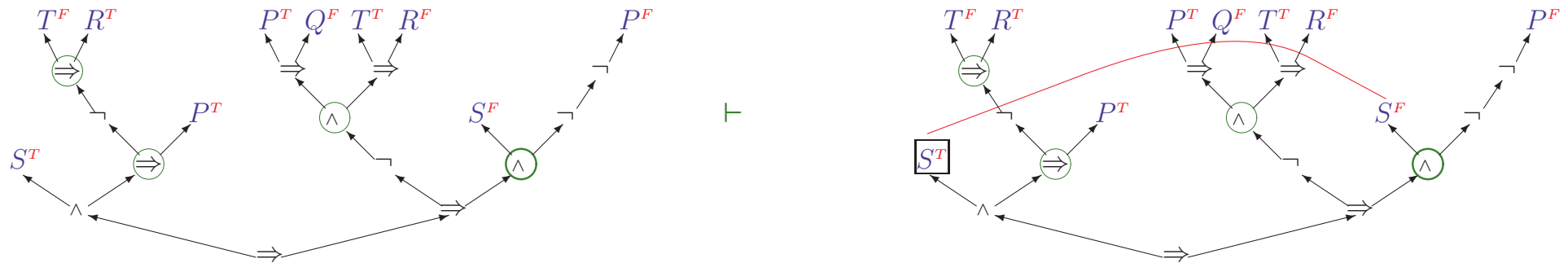
$$\mathcal{G} = \{\}$$

$$\mathcal{C} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$$

1. Wähle ein Literal  $L$  des zu  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  offenen Ziels  $\mathcal{C}$



# EXTENSIONSSCHRITT AUF FORMELBÄUMEN



⊢

$$\mathcal{P} = \{\}$$

$$\mathcal{G} = \{\}$$

$$\mathcal{C} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$$

$$L = S^T, \mathcal{P} = \{S^T\}, M_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$$

$$\bar{L} = S^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{P^F\},$$

1. Wähle ein Literal  $L$  des zu  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  offenen Ziels  $\mathcal{C}$
2. Erweitere den aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  um  $L$
3. Wähle ein mit  $L$  konnektiertes Literal  $\bar{L}$  der offenen Teilmatrix  
Vermerke Alternativen in **Alternativenmenge**

# EXTENSIONSSCHRITT AUF FORMELBÄUMEN



$$\mathcal{P} = \{ \}$$

$$\mathcal{G} = \{ \}$$

$$\mathcal{C} = \{ S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F \}$$

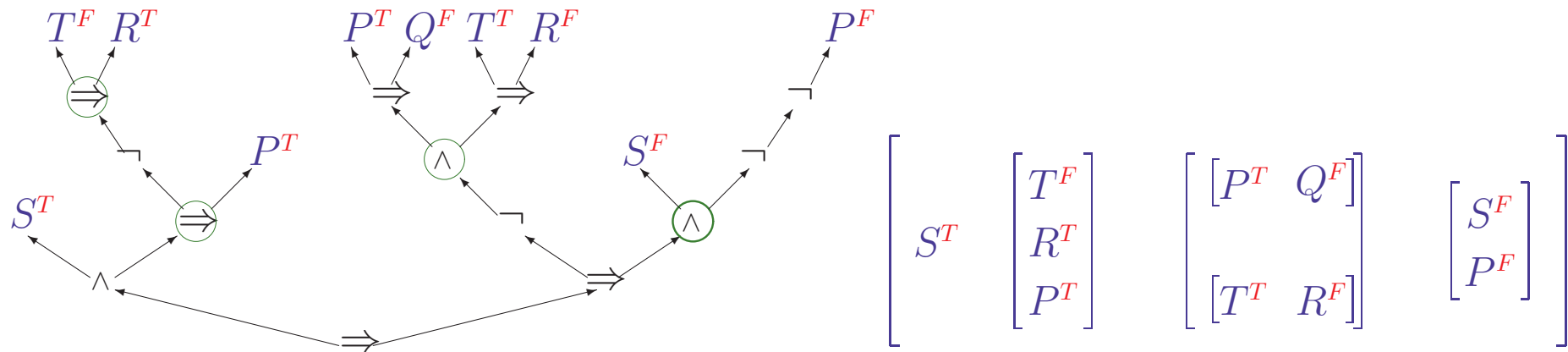
$$L = S^T, \mathcal{P} = \{ S^T \}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{ T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F \}$$

$$\bar{L} = S^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{ P^F \}, \mathcal{G} = \{ S^F \}$$

$$\mathcal{C} = \{ P^F \}$$

1. Wähle ein Literal  $L$  des zu  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  offenen Ziels  $\mathcal{C}$
2. Erweitere den aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  um  $L$
3. Wähle ein mit  $L$  konnektiertes Literal  $\bar{L}$  der offenen Teilmatrix  
Vermerke Alternativen in **Alternativenmenge**
4. Wähle Teilmenge  $\mathcal{G}$  von  $\{ \bar{L} \} \cup \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P})$ , die mit dem aktuellen Pfad  $\mathcal{P}$  konnektiert sind, und eine Substitution  $\rho$ , welche die mit  $\sigma$  modifizierten Konnektionen komplementär macht
  - Erweitere  $\sigma$  mit  $\rho$  und vermerke alternative Teilmengen und Substitutionen
  - Breche den Extensionsschritt ab, falls es keine solche Teilmenge gibt

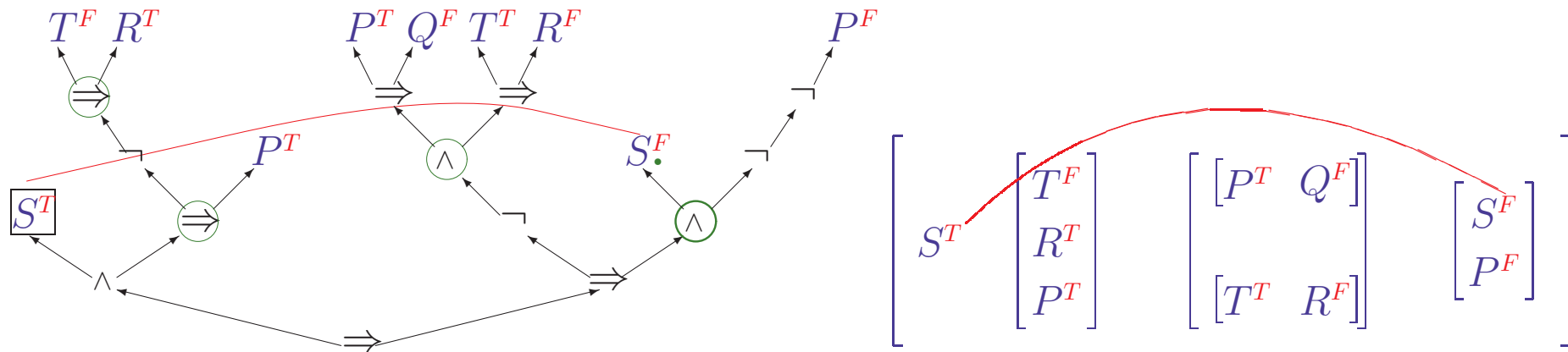
# EXTENSIONSBEWEIS AUF FORMELBÄUMEN AM BEISPIEL



Start	$\mathcal{P} = \{\}, \mathcal{G} = \{\}, \mathcal{C} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	
Zweiter Schritt	
Dritter Schritt	
Vierter Schritt	

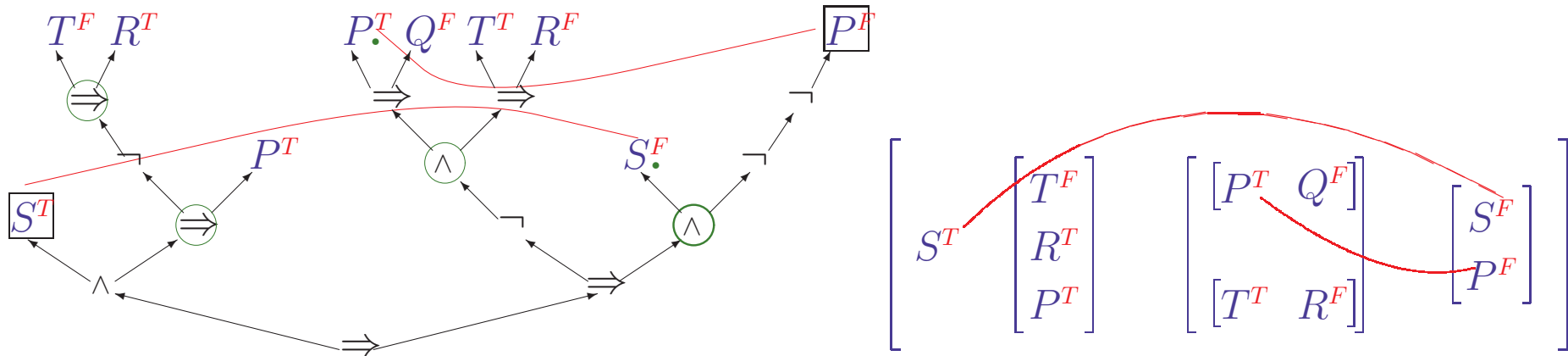


# EXTENSIONSBEWEIS AUF FORMELBÄUMEN AM BEISPIEL



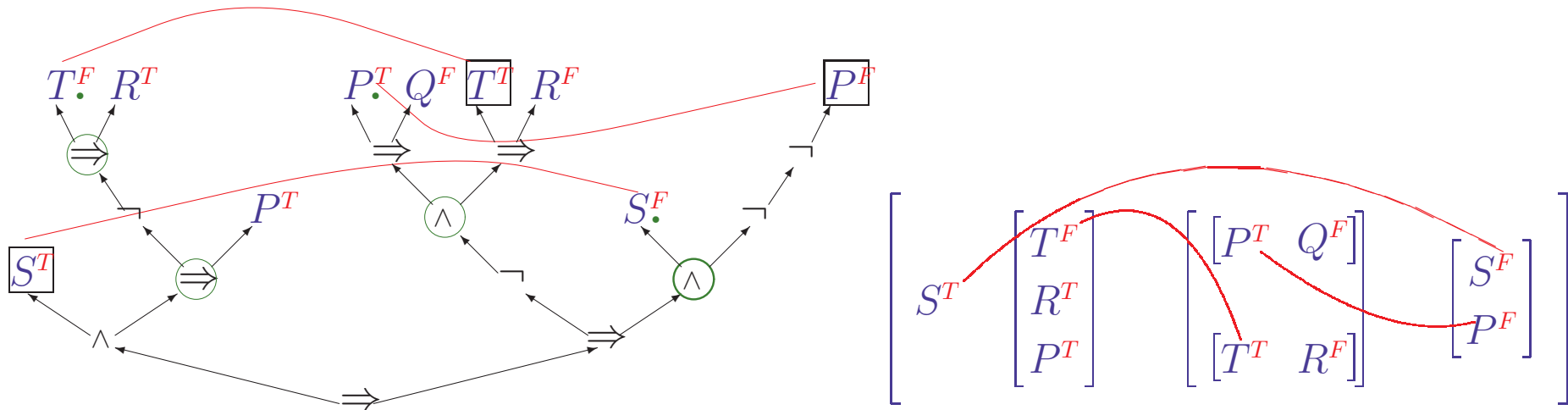
Start	$\mathcal{P} = \{\}, \mathcal{G} = \{\}, \mathcal{C} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	$L = S^T, \mathcal{P} = \{S^T\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$ $\bar{L} = S^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{P^F\}, \mathcal{G} = \{S^F\}, \mathcal{C} = \{P^F\}$
Zweiter Schritt	
Dritter Schritt	
Vierter Schritt	

# EXTENSIONSBEWEIS AUF FORMELBÄUMEN AM BEISPIEL



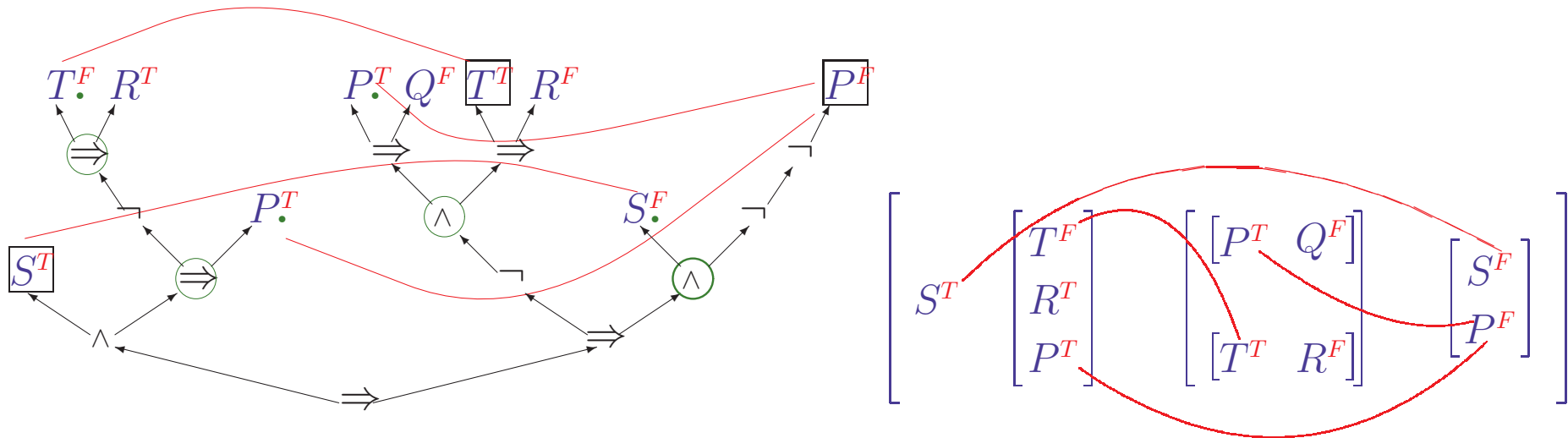
Start	$\mathcal{P} = \{\}, \mathcal{G} = \{\}, \mathcal{C} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	$L = S^T, \mathcal{P} = \{S^T\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$ $\bar{L} = S^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{P^F\}, \mathcal{G} = \{S^F\}, \mathcal{C} = \{P^F\}$
Zweiter Schritt	$L = P^F, \mathcal{P} = \{S^T, P^F\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F\}$ $\bar{L} = P_2^T, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{T^T, R^F\}, \mathcal{G} = \{P_2^T\}, \mathcal{C} = \{T^T, R^F\}$
Dritter Schritt	
Vierter Schritt	

# EXTENSIONSBEWEIS AUF FORMELBÄUMEN AM BEISPIEL



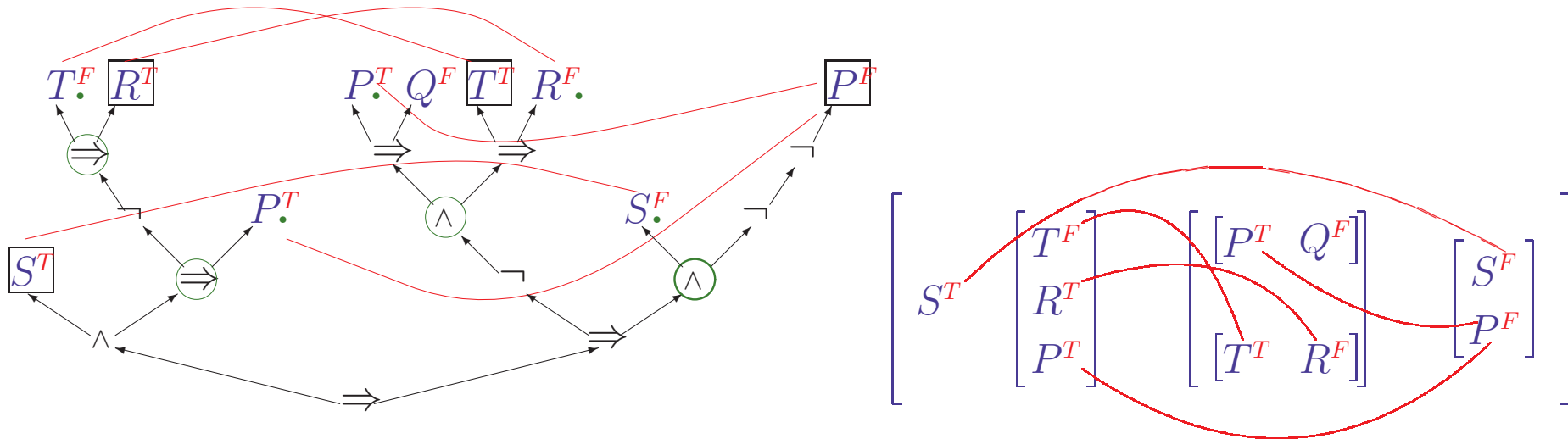
Start	$\mathcal{P} = \{\}, \mathcal{G} = \{\}, \mathcal{C} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	$L = S^T, \mathcal{P} = \{S^T\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$ $\bar{L} = S^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{P^F\}, \mathcal{G} = \{S^F\}, \mathcal{C} = \{P^F\}$
Zweiter Schritt	$L = P^F, \mathcal{P} = \{S^T, P^F\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F\}$ $\bar{L} = P_2^T, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{T^T, R^F\}, \mathcal{G} = \{P_2^T\}, \mathcal{C} = \{T^T, R^F\}$
Dritter Schritt	$L = T^T, \mathcal{P} = \{S^T, P^F, T^T\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, R^F\}$ $\bar{L} = T^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{R^T, P^T\}, \mathcal{G} = \{T^F, \dots\}$
Vierter Schritt	

# EXTENSIONSBEWEIS AUF FORMELBÄUMEN AM BEISPIEL



Start	$\mathcal{P} = \{\}, \mathcal{G} = \{\}, \mathcal{C} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	$L = S^T, \mathcal{P} = \{S^T\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$ $\bar{L} = S^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{P^F\}, \mathcal{G} = \{S^F\}, \mathcal{C} = \{P^F\}$
Zweiter Schritt	$L = P^F, \mathcal{P} = \{S^T, P^F\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F\}$ $\bar{L} = P_2^T, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{T^T, R^F\}, \mathcal{G} = \{P_2^T\}, \mathcal{C} = \{T^T, R^F\}$
Dritter Schritt	$L = T^T, \mathcal{P} = \{S^T, P^F, T^T\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, R^F\}$ $\bar{L} = T^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{R^T, P^T\}, \mathcal{G} = \{T^F, P^T\}, \mathcal{C} = \{R^T\}$
Vierter Schritt	

# EXTENSIONSBEWEIS AUF FORMELBÄUMEN AM BEISPIEL



Start	$\mathcal{P} = \{\}, \mathcal{G} = \{\}, \mathcal{C} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$
Erster Schritt	$L = S^T, \mathcal{P} = \{S^T\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$ $\bar{L} = S^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{P^F\}, \mathcal{G} = \{S^F\}, \mathcal{C} = \{P^F\}$
Zweiter Schritt	$L = P^F, \mathcal{P} = \{S^T, P^F\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F\}$ $\bar{L} = P_2^T, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{T^T, R^F\}, \mathcal{G} = \{P_2^T\}, \mathcal{C} = \{T^T, R^F\}$
Dritter Schritt	$L = T^T, \mathcal{P} = \{S^T, P^F, T^T\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, R^F\}$ $\bar{L} = T^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{R^T, P^T\}, \mathcal{G} = \{T^F, P^T\}, \mathcal{C} = \{R^T\}$
Vierter Schritt	$L = R^T, \mathcal{P} = \{S^T, P^F, T^T, R^T\}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{R^F\}$ $\bar{L} = R^F, \bar{L}_{\beta}(\mathcal{P}) = \{\}, \mathcal{G} = \{R^F\}, \mathcal{C} = \{\}$

# HERLEITUNG EINES BEWEISVERFAHRENS (I)

- **Definiere Beweisbarkeit von  $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  ( $\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ )**
  - $\mathcal{M}$  Matrix,  $\mathcal{P}$  aktueller Pfad,  $\mathcal{C}$  offenes Ziel
  - $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  ist **beweisbar**, wenn alle Pfade durch  $\mathcal{M}$ , die  $\mathcal{P} \cup \{L\}$  für ein Literal  $L \in \mathcal{C}$  erweitern, unter einer Substitution  $\sigma$  komplementär sind
- **Satz: Eine Formel  $F$  ist gültig, g.d.w  $\vdash \mathcal{M}_F, \mathcal{M}_F, \{\}$** 
  - ... für eine Multiplizität  $\mu$  und eine zulässige Substitution  $\sigma$
  - Dabei ist  $\mathcal{M}_F$  die Matrix der Formel  $F$

## Beweis:

- $\mathcal{M}_F, \mathcal{M}_F, \{\}$  ist genau dann beweisbar, wenn jeder Pfad durch  $\mathcal{M}_F$  und ein beliebiges Literal  $L$  aus  $\mathcal{M}_F$  komplementär ist  
also, wenn jeder Pfad durch  $\mathcal{M}_F$  komplementär ist
- Aufgrund des Charakterisierungstheorems für klassische Logik ist  
 $\mathcal{M}_F, \mathcal{M}_F, \{\}$  also genau dann wenn beweisbar, wenn  $F$  gültig ist.

## HERLEITUNG EINES BEWEISVERFAHRENS (II)

**Satz:**  $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  ist genau dann beweisbar, wenn

(1)  $\mathcal{C} = \{\}$ , oder

(2) Es gibt eine komplementäre Konnektion  $\{L, \bar{L}\}$  mit  $L \in \mathcal{C}$

und (a)  $\bar{L} \in \mathcal{P}$  und  $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  ist beweisbar

oder (b)  $\bar{L} \sim_\alpha \mathcal{P} \cup \{L\} = \mathcal{P}'$  und  $\bar{L}_\beta(\mathcal{P}'), \mathcal{M}_{\mathcal{P}'}, \mathcal{P}'$

sowie  $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  sind beweisbar

**Beweis**  $\Rightarrow$  : Sei  $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  beweisbar und  $\mathcal{C} \neq \{\}$

- Da  $\mathcal{P}$  nicht komplementär,  $\mathcal{C}$  offenes Ziel und jeder Pfad durch  $\mathcal{P}, \mathcal{M}$  und  $\mathcal{C}$  komplementär ist, gibt es eine komplementäre Konnektion  $\{L, \bar{L}\}$  mit  $L \in \mathcal{C}$  und  $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  ist beweisbar.
- Wenn  $\bar{L} \notin \mathcal{P}$  dann muß  $\bar{L} \sim_\alpha \mathcal{P} \cup \{L\} = \mathcal{P}'$  gelten.
- Sei  $\mathcal{P}''$  Erweiterung von  $\mathcal{P}' \cup \{u\}$  für ein  $u \in \bar{L}_\beta(\mathcal{P}')$
- Da  $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  beweisbar ist und  $L \in \mathcal{C}$ , muß  $\mathcal{P}''$  komplementär sein.
- Also ist  $\bar{L}_\beta(\mathcal{P}'), \mathcal{M}_{\mathcal{P}'}, \mathcal{P}'$  beweisbar.

# HERLEITUNG EINES BEWEISVERFAHRENS (III)

$\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  g.d.w. (1)  $\mathcal{C} = \{\}$  oder (2) Es gibt eine komplementäre Konnektion  $\{L, \bar{L}\}$  mit  $L \in \mathcal{C}$  und (a)  $\bar{L} \in \mathcal{P}$  und  $\vdash \mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$

oder (b)  $\bar{L} \sim_\alpha \mathcal{P} \cup \{L\} = \mathcal{P}'$  und  $\vdash \bar{L}_\beta(\mathcal{P}'), \mathcal{M}_{\mathcal{P}'}, \mathcal{P}'$  sowie  $\vdash \mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$

**Beweis**  $\Leftarrow$  : Ist  $\mathcal{C} = \{\}$ , dann ist  $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  trivialerweise beweisbar.

– Ansonsten sei  $L \in \mathcal{C}$ ,  $\{L, \bar{L}\}$  komplementäre Konnektion,  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{L\}$ ,  $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  beweisbar,  $v \in \mathcal{C}$  und  $\mathcal{P}''$  eine Erweiterung von  $\mathcal{P} \cup \{v\}$ .

– Ist  $L \notin \mathcal{P}''$ , dann gibt es ein  $u \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{C}$  mit  $u \not\sim_\alpha L^*$ , also  $u \in L_\beta$ .

Da  $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  beweisbar ist, muß  $\mathcal{P}''$  komplementär sein.

– Ist  $L \in \mathcal{P}''$  und  $\bar{L} \in \mathcal{P}$ , dann ist  $\mathcal{P}''$  offensichtlich komplementär.

– Ist  $L \in \mathcal{P}''$  und  $\bar{L} \notin \mathcal{P}$ , dann gibt es ein  $u \in \mathcal{P}''$  mit  $u \not\sim_\alpha \bar{L}$ , also  $u \in \bar{L}_\beta$ .

Für dieses  $u$  gilt  $u \sim_\alpha \mathcal{P}'$ , also  $u \in \bar{L}_\beta(\mathcal{P}')$ . Außerdem gilt  $\bar{L} \sim_\alpha \mathcal{P}'$  per

Konstruktion. Da  $\bar{L}_\beta(\mathcal{P}'), \mathcal{M}_{\mathcal{P}'}, \mathcal{P}'$  beweisbar ist, ist  $\mathcal{P}''$  komplementär

Damit sind alle Bedingungen für die Beweisbarkeit von  $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  erfüllt.

---

\* Ansonsten wäre  $L \sim_\alpha u$  für alle  $u \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{C}$  und wegen  $L \in \mathcal{C}$  auch für alle anderen  $u \in \mathcal{P}''$ . Da  $\mathcal{P}''$  maximal bzgl.  $\sim_\alpha$  ist, müßte dann aber  $L \in \mathcal{P}''$  gelten.

$u$  ist nicht unbedingt identisch zu  $v$ , da aus  $v \in \mathcal{C}$  und  $L \in \mathcal{C}$  nicht  $v \sim_\beta L$  folgt.



- **Grundkonzepte müssen geringfügig erweitert werden**

- Regeln verwalten Objekte der Form  $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma$

- Aktuelle Klausel, Restmatrix, aktueller Pfad sind allgemeiner als zuvor

- Substitution  $\sigma$  wird lokal bestimmt und an Unterziele weitergereicht

In Unterzielen erzeugte Substitutionen werden zurückgereicht

- **Regeln haben nun eine theoretische Rechtfertigung**

- Sätze über Beweisbarkeit von  $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  gelten auch für Normalformen

- Die Multiplizität kann auch dynamisch bestimmt werden, denn

$\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}}, \mathcal{P}$  gilt genau dann, wenn  $\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$

$\Rightarrow$  : alle Pfade durch  $\mathcal{P}$ , Literale aus  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{M}$  sind auch Pfade durch  $\mathcal{P}$ , Literale aus  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$

$\Leftarrow$  : sind alle Pfade durch  $\mathcal{P}$ , Literale aus  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{M}$  komplementär, dann auch die Pfade, die dabei durch  $\mathcal{P}$ , Literale aus  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$  gehen

# REGELN DES KONNEKTIONSKALKÜLS

## ● Startregel

- Um  $\mathcal{M}$  zu beweisen wähle Startziel  $\mathcal{C}=\mathcal{M}$ , setze  $\mathcal{P} = \{\}$ ,  $\sigma = []$

$\vdash \mathcal{M}$	ret $\sigma$
$\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	ret $\sigma$ Start

- Endgültige Substitution  $\sigma$  wird beim Beweis des Unterziels bestimmt
- Korrektheit und Vollständigkeit folgt aus Herleitung auf Folie 11

## ● Bereinigung: Abschluß des aktuellen Pfades

- $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  ist beweisbar, wenn  $\mathcal{C}$  leer ist (Herleitung auf Folie 12)

$\vdash \{\}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma$	ret $\sigma$ Axiom
---	--------------------

- Regel schließt einen Ast im Konnektionskalkülbeweis
- Die bisherige (Eingabe-)substitution  $\sigma$  wird Rückgabewert der Regel

# REGELN DES KONNEKTIONSKALKÜLS II

## ● Extension: Verlängerung des aktuellen Pfades

- $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  ist beweisbar, wenn es  $L \in \mathcal{C}$  und  $L' \sim_{\alpha} \mathcal{P} \cup \{L\}$  gibt, sodaß  $\{L, L'\}$  komplementäre Konnektion und  $L'_{\beta}(\mathcal{P} \cup \{L\}), \mathcal{M}, \mathcal{P} \cup \{L\}$  sowie  $\mathcal{C} \cap L_{\beta}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  beweisbar sind (Herleitung auf Folien 12 / 14)

$\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma$	ret $\sigma_2$
$\vdash L'_{\beta}(\mathcal{P} \cup \{L\}), \mathcal{M}, \mathcal{P} \cup \{L\}, \sigma\rho$	ret $\sigma_1$
$\vdash \mathcal{C} \cap L_{\beta}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma_1$	ret $\sigma_2$
$\vdash L \in \mathcal{C}$	
$\vdash L' \sim_{\alpha} \mathcal{P} \cup \{L\}$	
$\vdash \sigma\rho(L') = \sigma\rho(\bar{L})$	

Extension  $L, L', \rho$

- Bisherige Substitution  $\sigma$  kann um eine Substitution  $\rho$  erweitert werden
- Rückgabesubstitution des ersten Unterziels wird weitergereicht
- Die Rückgabesubstitution des zweiten Unterziels wird zurückgegeben
- Da  $\mathcal{M}$  unverändert bleibt, sind dynamische Kopien möglich

Formale Details nicht trivial

# REGELN DES KONNEKTIONSKALKÜLS III

## • Reduktion: eliminiere konnektierte Literale

- $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  ist beweisbar, wenn es  $L \in \mathcal{C}$  und  $L' \in \mathcal{P}$  gibt, sodaß  $\{L, L'\}$  komplementär und  $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$  beweisbar ist (Herleitung Folie 12)

$\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma$	ret $\sigma_1$
$\vdash \mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma\rho$	ret $\sigma_1$
$\vdash L \in \mathcal{C}$	
$\vdash L' \in \mathcal{P}$	
$\vdash \sigma\rho(L') = \sigma\rho(\bar{L})$	

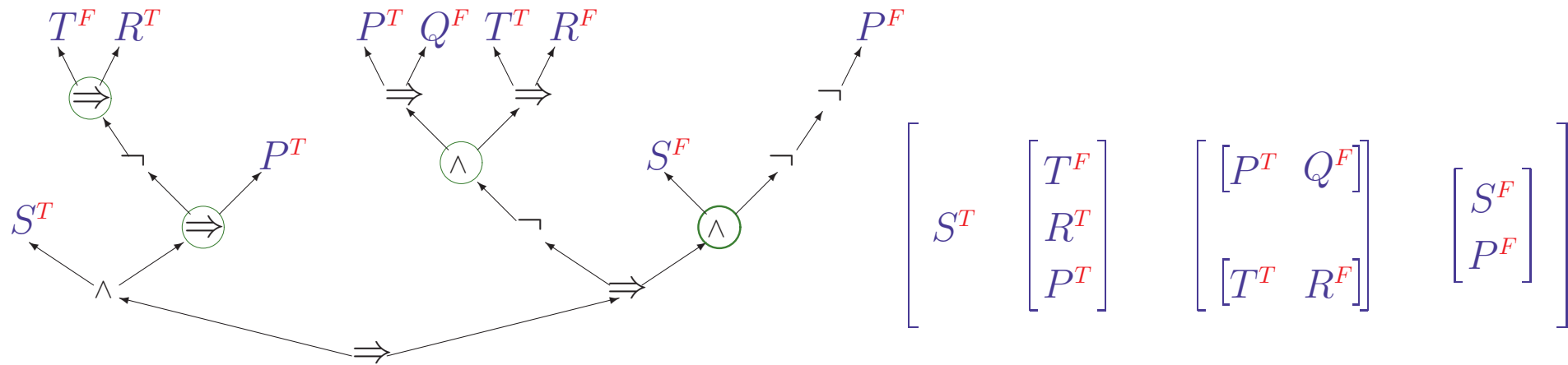
Reduction  $L, L', \rho$

- Bisherige Substitution  $\sigma$  kann um eine Substitution  $\rho$  erweitert werden
- Rückgabesubstitution des Unterziels wird zurückgegeben

## • Beweissuche im allgemeinen Konnektionskalkül

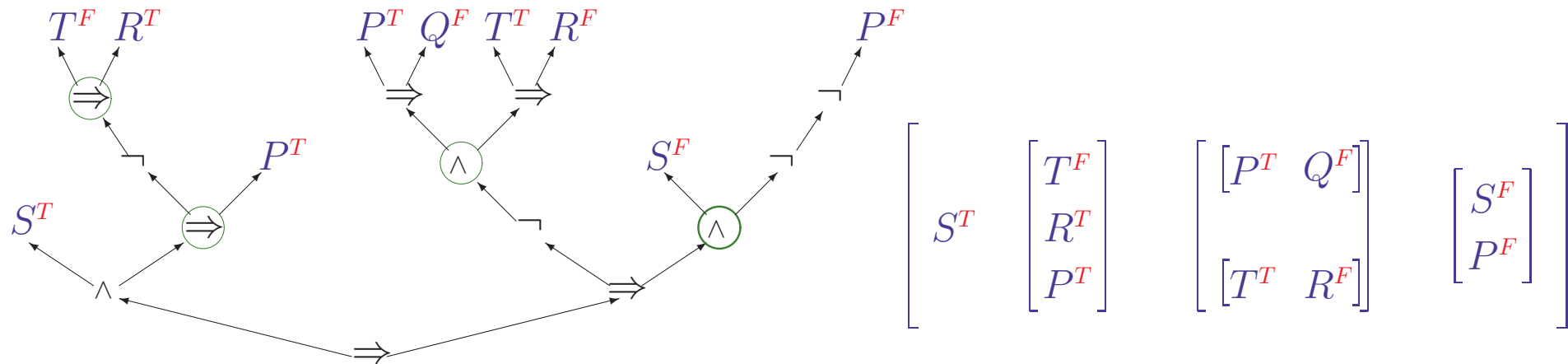
- **Axiom**, **Extension** und **Reduction** sind vollständig (Folie 12)
- Suchprozeduren würden **Axiom** und **Reduction** vor **Extension** wählen  
Parameter für **Reduction** sind automatisch, für **Extension** heuristisch, aber konnektionsgetrieben, zu bestimmen
- Substitutionen werden lokal konstruiert und als Ergebnis zurückgegeben

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONSKALKÜL



$\vdash \mathcal{M}$

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONSKALKÜL

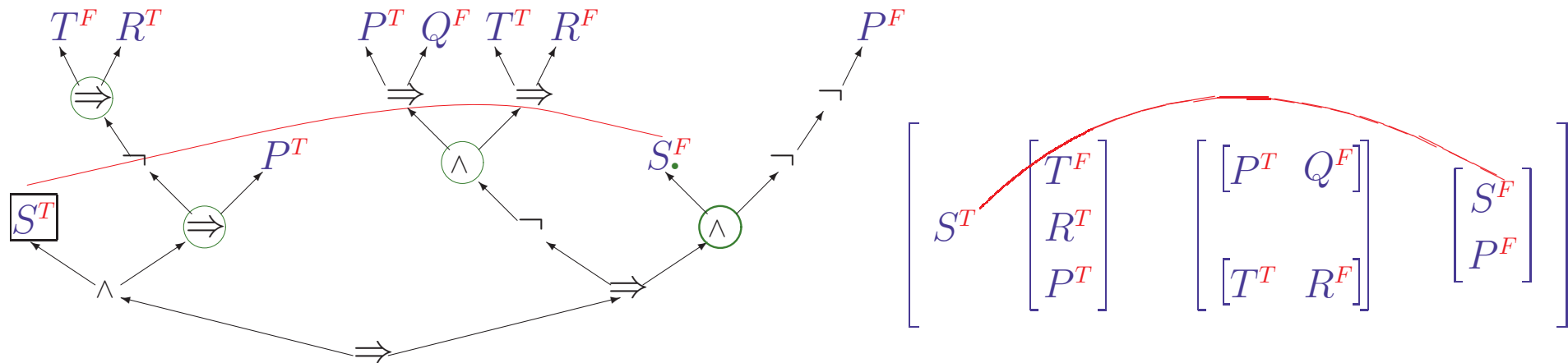


$\vdash \mathcal{M}$

BY Start

1.  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONSKALKÜL



$\vdash \mathcal{M}$

1.  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

1.1.  $\vdash \{P^F\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$

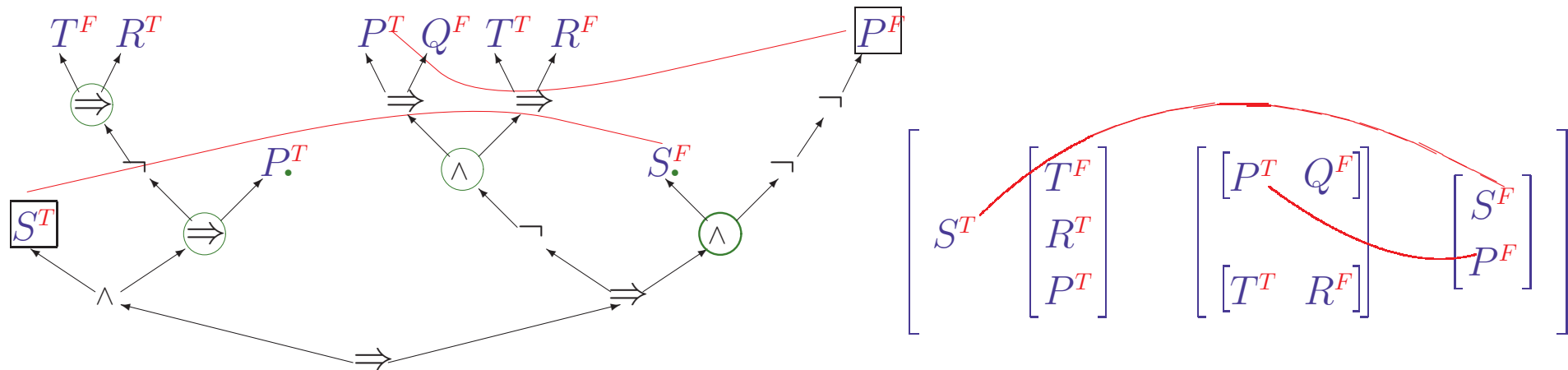
BY Start

BY Extension  $S^T, S^F, []$

1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$

BY Axiom

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONS-KALKÜL



$\vdash \mathcal{M}$

1.  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

1.1.  $\vdash \{P^F\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$

1.1.1.  $\vdash \{T^T, R^F\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$

BY Start

BY Extension  $S^T, S^F, []$

BY Extension  $P^F, P^T, []$

1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$

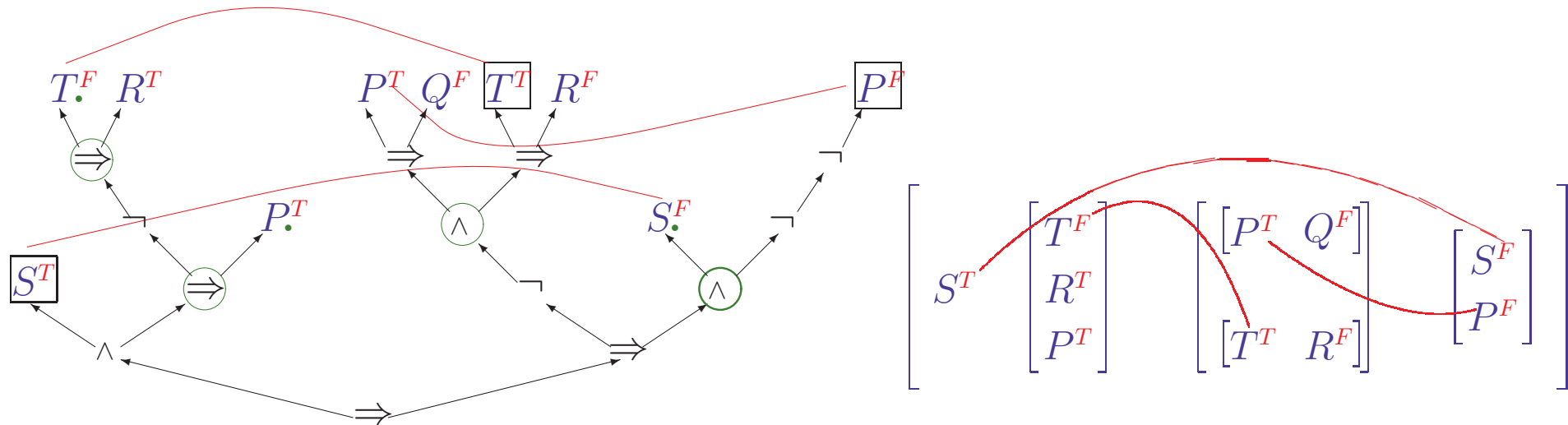
1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$

BY Axiom

BY Axiom



# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONSKALKÜL



- $\vdash \mathcal{M}$
- 1.  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$
- 1.1.  $\vdash \{P^F\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$
- 1.1.1.  $\vdash \{T^T, R^F\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$
- 1.1.1.1.  $\vdash \{R^T, P^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

BY Start

BY Extension  $S^T, S^F, []$

BY Extension  $P^F, P^T, []$

BY Extension  $T^T, T^F, []$

1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$

BY Axiom

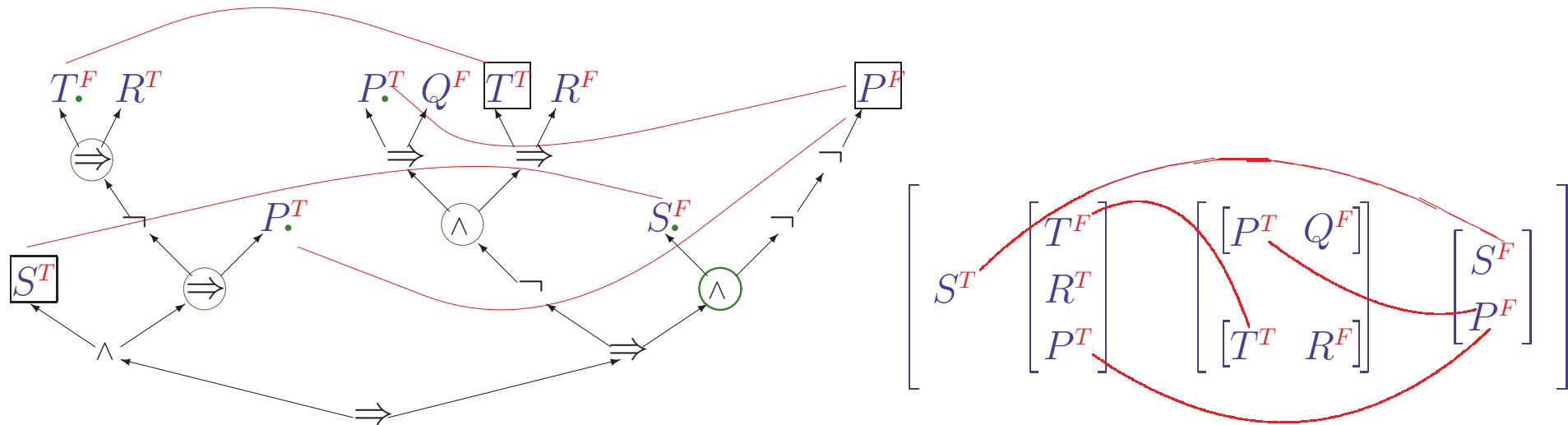
1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$

BY Axiom

1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$

BY Axiom

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONSKALKÜL



$\vdash \mathcal{M}$

1.  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$
- 1.1.  $\vdash \{P^F\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$
- 1.1.1.  $\vdash \{T^T, R^F\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$
- 1.1.1.1.  $\vdash \{R^T, P^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$
- 1.1.1.1.1.  $\vdash \{R^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$

1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$

1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$

BY Start

BY Extension  $S^T, S^F, []$

BY Extension  $P^F, P^T, []$

BY Extension  $T^T, T^F, []$

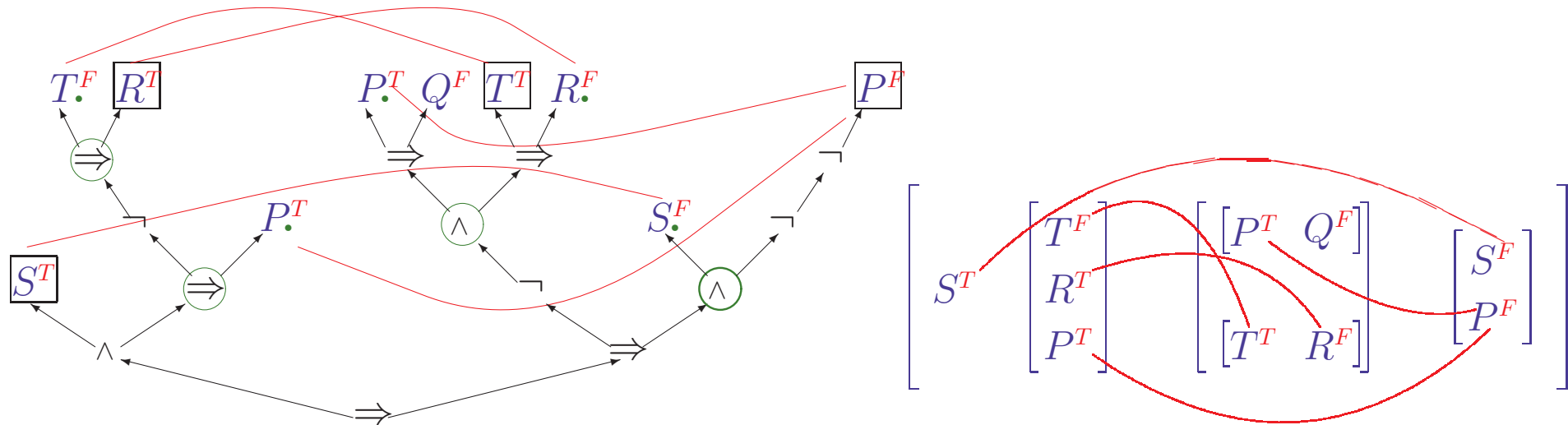
BY Reduction  $P^T, P^F, []$

BY Axiom

BY Axiom

BY Axiom

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONS-KALKÜL



$\vdash \mathcal{M}$

1.  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

1.1.  $\vdash \{P^F\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$

1.1.1.  $\vdash \{T^T, R^F\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$

1.1.1.1.  $\vdash \{R^T, P^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

1.1.1.1.1.  $\vdash \{R^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

1.1.1.1.1.1.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T, R^T\}, []$

1.1.1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$

1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$

1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$

BY Start

BY Extension  $S^T, S^F, []$

BY Extension  $P^F, P^T, []$

BY Extension  $T^T, T^F, []$

BY Reduction  $P^T, P^F, []$

BY Extension  $R^T, R^F, []$

BY Axiom

BY Axiom

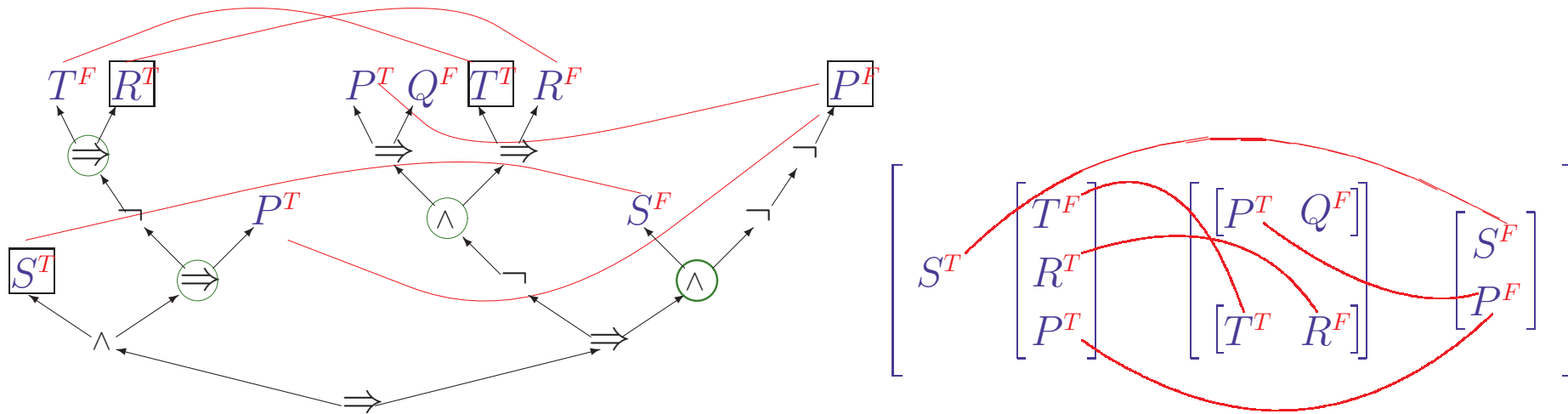
BY Axiom

BY Axiom

BY Axiom

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONS-KALKÜL

Regeln operieren in Wirklichkeit auf atomaren Positionen  
Die Verwendung von Labels dient nur der Veranschaulichung



$\vdash \mathcal{M}$

1.  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

1.1.  $\vdash \{P^F\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$

1.1.1.  $\vdash \{T^T, R^F\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$

1.1.1.1.  $\vdash \{R^T, P^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

1.1.1.1.1.  $\vdash \{R^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

1.1.1.1.1.1.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T, R^T\}, []$

1.1.1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$

1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$

1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$

BY Start

BY Extension  $S^T, S^F, []$

BY Extension  $P^F, P^T, []$

BY Extension  $T^T, T^F, []$

BY Reduction  $P^T, P^F, []$

BY Extension  $R^T, R^F, []$

BY Axiom

BY Axiom

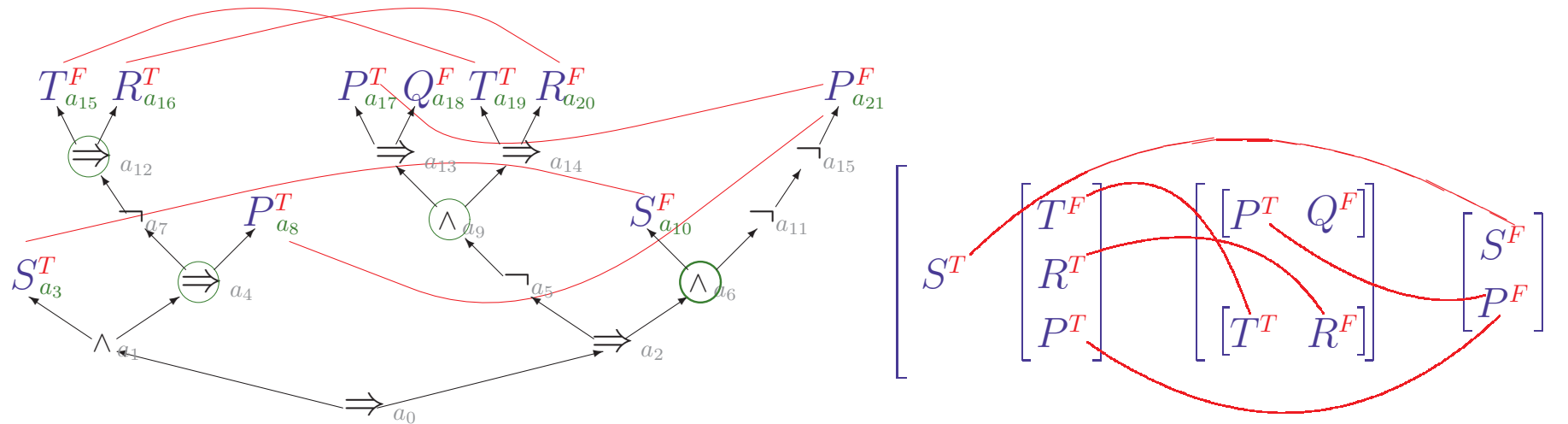
BY Axiom

BY Axiom

BY Axiom

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONS-KALKÜL

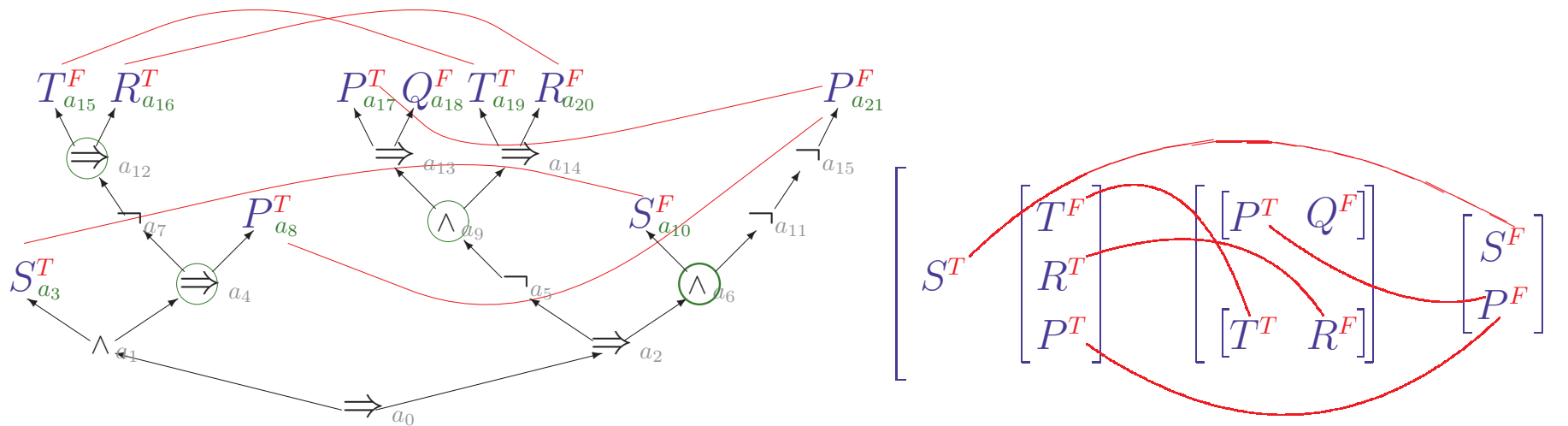
Regeln operieren in Wirklichkeit auf **atomaren Positionen**  
 Die Verwendung von Labels dient nur der Veranschaulichung



$\vdash \mathcal{M}$	BY Start
1. $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Extension $S^T, S^F, []$
1.1. $\vdash \{P^F\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$	BY Extension $P^F, P^T, []$
1.1.1. $\vdash \{T^T, R^F\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$	BY Extension $T^T, T^F, []$
1.1.1.1. $\vdash \{R^T, P^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$	BY Reduction $P^T, P^F, []$
1.1.1.1.1. $\vdash \{R^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$	BY Extension $R^T, R^F, []$
1.1.1.1.1.1. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T, R^T\}, []$	BY Axiom
1.1.1.1.1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$	BY Axiom
1.1.1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$	BY Axiom
1.1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$	BY Axiom
1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Axiom

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONS-KALKÜL

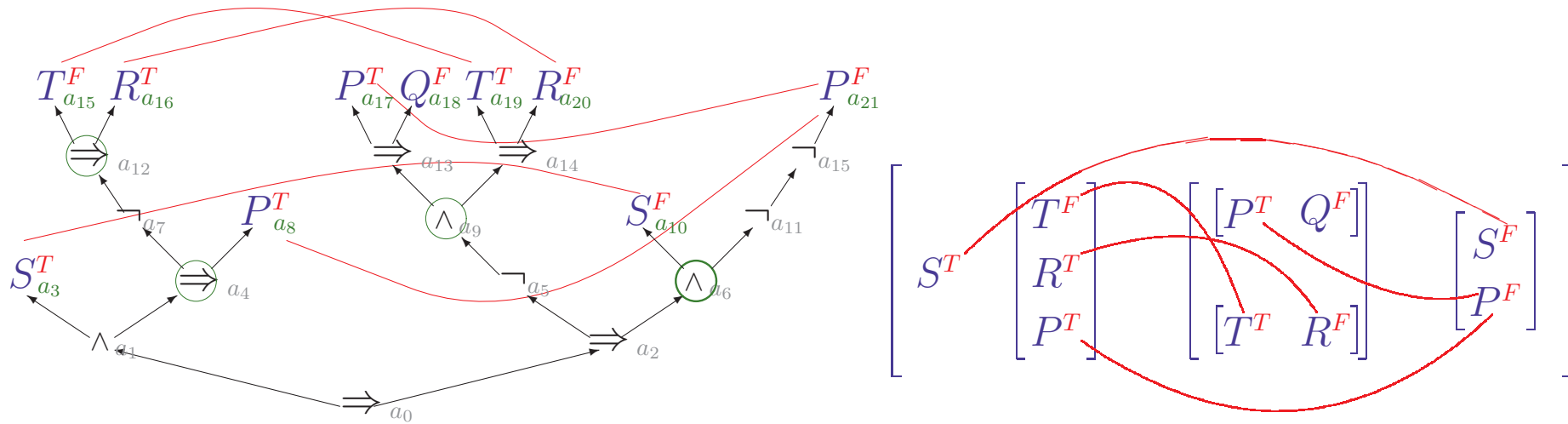
Regeln operieren in Wirklichkeit auf **atomaren Positionen**  
 Die Verwendung von Labels dient nur der Veranschaulichung



$\vdash \mathcal{M}$	BY Start
1. $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Extension $a_3, a_{10}, []$
1.1. $\vdash \{a_{21}\}, \mathcal{M}, \{a_3\}, []$	BY Extension $P^F, P^T, []$
1.1.1. $\vdash \{T^T, R^F\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$	BY Extension $T^T, T^F, []$
1.1.1.1. $\vdash \{R^T, P^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$	BY Reduction $P^T, P^F, []$
1.1.1.1.1. $\vdash \{R^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$	BY Extension $R^T, R^F, []$
1.1.1.1.1.1. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T, R^T\}, []$	BY Axiom
1.1.1.1.1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$	BY Axiom
1.1.1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$	BY Axiom
1.1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T\}, []$	BY Axiom
1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Axiom

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONS-KALKÜL

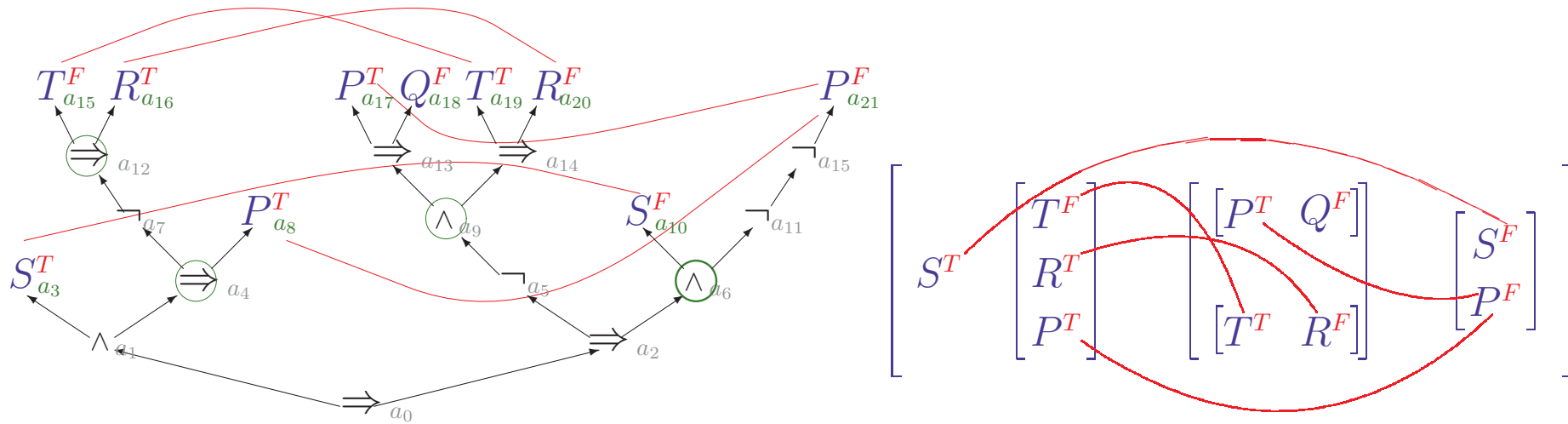
Regeln operieren in Wirklichkeit auf **atomaren Positionen**  
 Die Verwendung von Labels dient nur der Veranschaulichung



$\vdash \mathcal{M}$	BY Start
1. $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Extension $a_3, a_{10}, []$
1.1. $\vdash \{a_{21}\}, \mathcal{M}, \{a_3\}, []$	BY Extension $a_{21}, a_{17}, []$
1.1.1. $\vdash \{a_{19}, a_{20}\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}\}, []$	BY Extension $T^T, T^F, []$
1.1.1.1. $\vdash \{R^T, P^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$	BY Reduction $P^T, P^F, []$
1.1.1.1.1. $\vdash \{R^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$	BY Extension $R^T, R^F, []$
1.1.1.1.1.1. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T, R^T\}, []$	BY Axiom
1.1.1.1.1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$	BY Axiom
1.1.1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, []$	BY Axiom
1.1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{a_3\}, []$	BY Axiom
1.2. $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Axiom

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONS-KALKÜL

Regeln operieren in Wirklichkeit auf atomaren Positionen  
Die Verwendung von Labels dient nur der Veranschaulichung



$\vdash \mathcal{M}$

1.  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

1.1.  $\vdash \{a_{21}\}, \mathcal{M}, \{a_3\}, []$

1.1.1.  $\vdash \{a_{19}, a_{20}\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}\}, []$

1.1.1.1.  $\vdash \{a_{16}, a_8\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}, a_{19}\}, []$

1.1.1.1.1.  $\vdash \{R^T\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

1.1.1.1.1.1.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T, R^T\}, []$

1.1.1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}\}, []$

1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{a_3\}, []$

1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$

BY Start

BY Extension  $a_3, a_{10}, []$

BY Extension  $a_{21}, a_{17}, []$

BY Extension  $a_{19}, a_{15}, []$

BY Reduction  $P^T, P^F, []$

BY Extension  $R^T, R^F, []$

BY Axiom

BY Axiom

BY Axiom

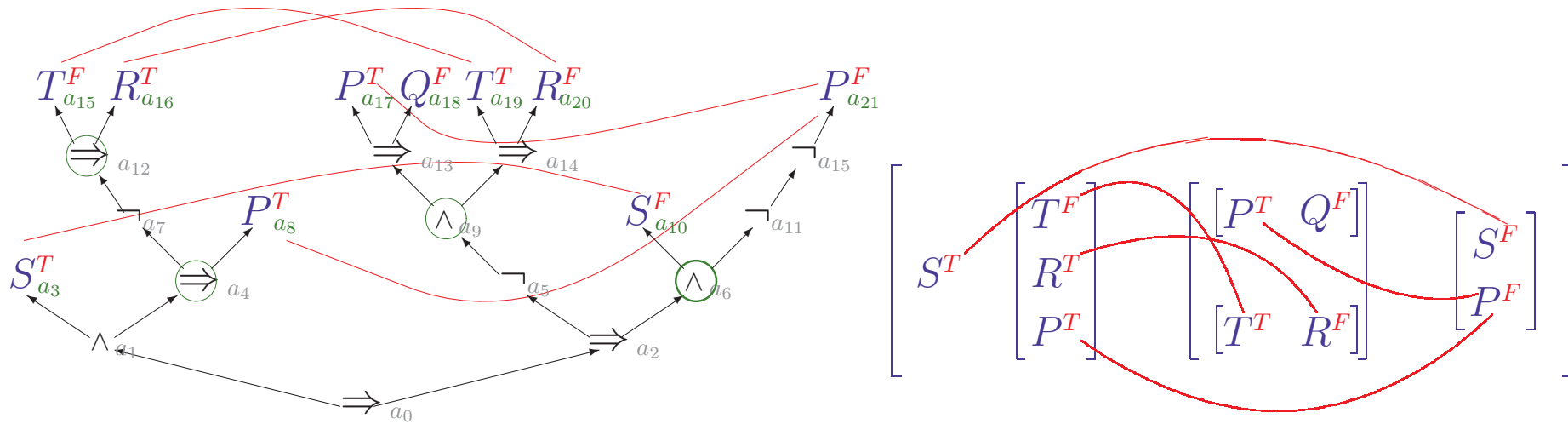
BY Axiom

BY Axiom



# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONS-KALKÜL

Regeln operieren in Wirklichkeit auf atomaren Positionen  
Die Verwendung von Labels dient nur der Veranschaulichung



$\vdash \mathcal{M}$

1.  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

1.1.  $\vdash \{a_{21}\}, \mathcal{M}, \{a_3\}, []$

1.1.1.  $\vdash \{a_{19}, a_{20}\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}\}, []$

1.1.1.1.  $\vdash \{a_{16}, a_8\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}, a_{19}\}, []$

1.1.1.1.1.  $\vdash \{a_{16}\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}, a_{19}\}, []$

1.1.1.1.1.1.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T, R^T\}, []$

1.1.1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F, T^T\}, []$

1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}\}, []$

1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{a_3\}, []$

1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$

BY Start

BY Extension  $a_3, a_{10}, []$

BY Extension  $a_{21}, a_{17}, []$

BY Extension  $a_{19}, a_{15}, []$

BY Reduction  $a_8, a_{21}, []$

BY Extension  $R^T, R^F, []$

BY Axiom

BY Axiom

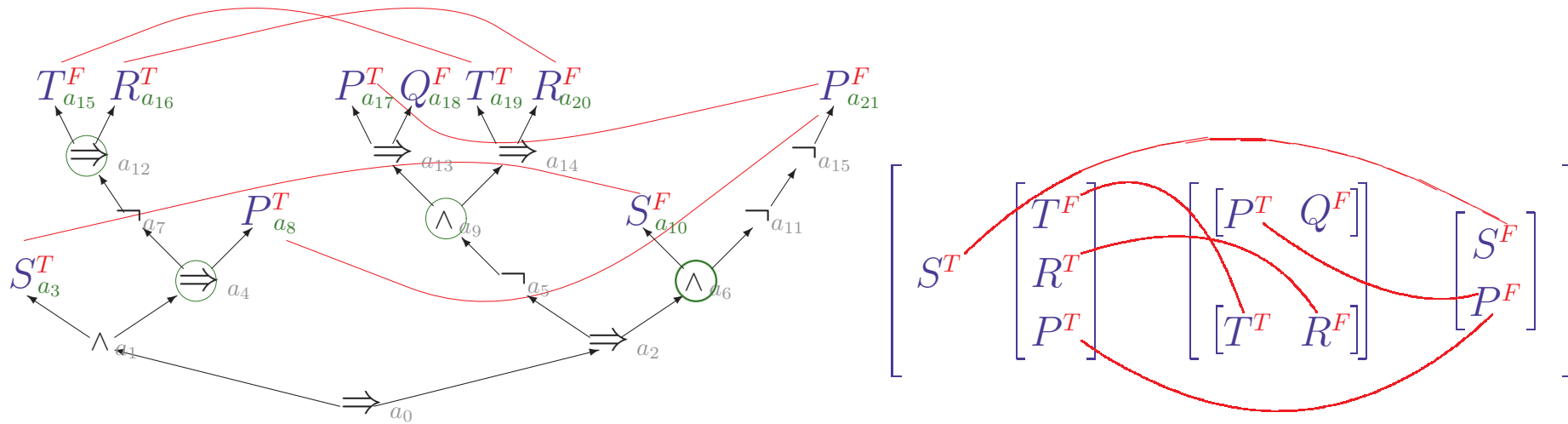
BY Axiom

BY Axiom

BY Axiom

# EXTENSIONSBEWeis IM KONNEKTIONS-KALKÜL

Regeln operieren in Wirklichkeit auf **atomaren Positionen**  
 Die Verwendung von Labels dient nur der Veranschaulichung



$\vdash \mathcal{M}$

1.  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

1.1.  $\vdash \{a_{21}\}, \mathcal{M}, \{a_3\}, []$

1.1.1.  $\vdash \{a_{19}, a_{20}\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}\}, []$

1.1.1.1.  $\vdash \{a_{16}, a_8\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}, a_{19}\}, []$

1.1.1.1.1.  $\vdash \{a_{16}\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}, a_{19}\}, []$

1.1.1.1.1.1.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}, a_{19}, a_{16}\}, []$

1.1.1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}, a_{19}\}, []$

1.1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{a_3, a_{21}\}, []$

1.1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{a_3\}, []$

1.2.  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, []$

BY Start

BY Extension  $a_3, a_{10}, []$

BY Extension  $a_{21}, a_{17}, []$

BY Extension  $a_{19}, a_{15}, []$

BY Reduction  $a_8, a_{21}, []$

BY Extension  $a_{16}, a_{20}, []$

BY Axiom

BY Axiom

BY Axiom

BY Axiom

BY Axiom

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN

$$\left[ \begin{array}{cc} Sa_2^T & Sa_2^{1T} \end{array} \left[ \begin{array}{c} Ta_4^F \\ Ra_4^T \\ Pa_4^T \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} Pa_{13}^T & Qa_{13}^F \\ Ta_{13}^T & Ra_{13}^F \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} Sb^F \\ Sa^F \\ Pa^F \end{array} \right] \right]$$

$\vdash \mathcal{M}$

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN

$$\left[ \begin{array}{cc} Sa_2^T & Sa_2^{1T} \\ \left[ \begin{array}{c} Ta_4^F \\ Ra_4^T \\ Pa_4^T \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} \left[ \begin{array}{cc} Pa_{13}^T & Qa_{13}^F \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} Ta_{13}^T & Ra_{13}^F \end{array} \right] \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} Sb^F \\ Sa^F \\ Pa^F \end{array} \right] \end{array} \right]$$

$\vdash \mathcal{M}$

BY Start

1  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN

$$\left[ \begin{array}{cc} Sa_2^T & Sa_2^{1T} \\ \left[ \begin{array}{c} Ta_4^F \\ Ra_4^T \\ Pa_4^T \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{cc} \left[ \begin{array}{cc} Pa_{13}^T & Qa_{13}^F \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} Ta_{13}^T & Ra_{13}^F \end{array} \right] \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} Sb^F \\ Sa^F \\ Pa^F \end{array} \right] \end{array} \right]$$

11  $\vdash \mathcal{M}$

BY Start

1  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

BY Ext  $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$

11  $\vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$

12  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN

$$\left[ \begin{array}{c} Sa_2^T \\ Sa_2^{1T} \end{array} \quad \left[ \begin{array}{c} Ta_4^F \\ Ra_4^T \\ Pa_4^T \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{cc} Pa_{13}^T & Qa_{13}^F \\ Ta_{13}^T & Ra_{13}^F \end{array} \right] \quad \left[ \begin{array}{c} Sb^F \\ Sa^F \\ Pa^F \end{array} \right] \right]$$

$\vdash \mathcal{M}$

1  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

11  $\vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$

111  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$

112  $\vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$

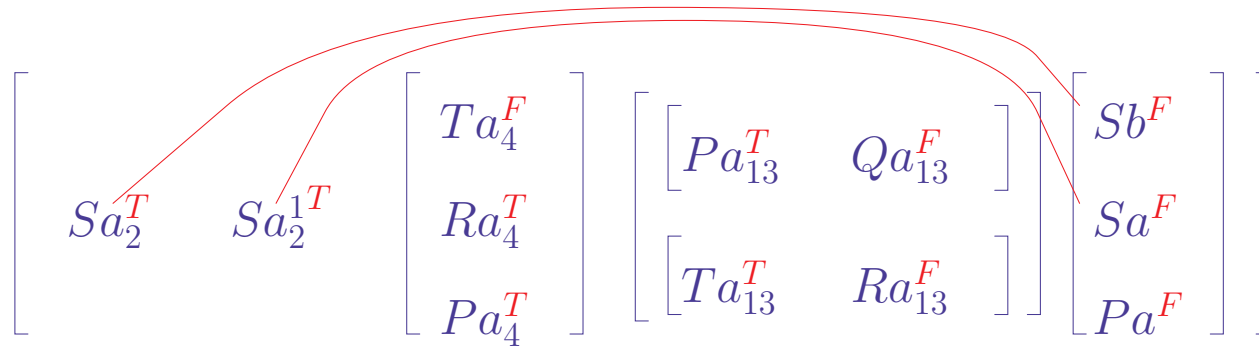
BY Start

BY Ext  $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$

BY Ext  $Sa^F, Sa_2^{1T}, [a/a'_2]$

12  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$

1  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

11  $\vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$

111  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$

112  $\vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$

BY Start

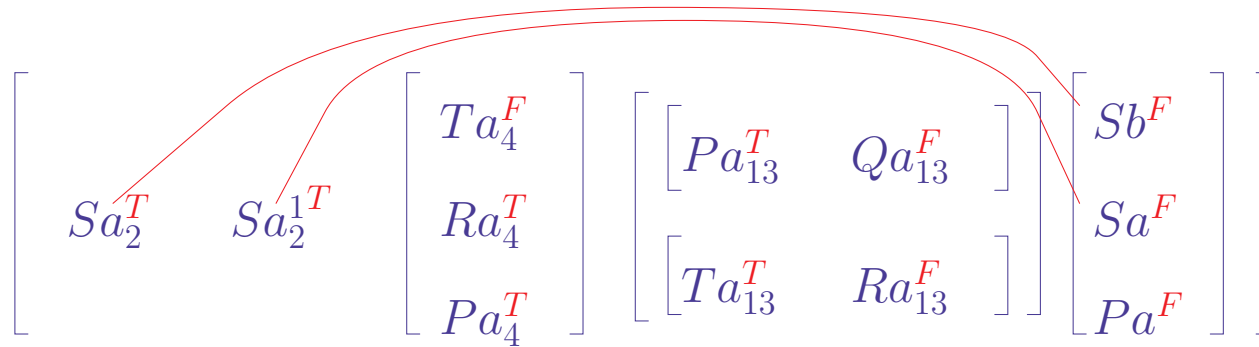
BY Ext  $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$

BY Ext  $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$

BY Axiom  $[b/a_2, a/a'_2]$

12  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$

1  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

11  $\vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$

111  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$

112  $\vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$

BY Start

BY Ext  $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$

BY Ext  $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$

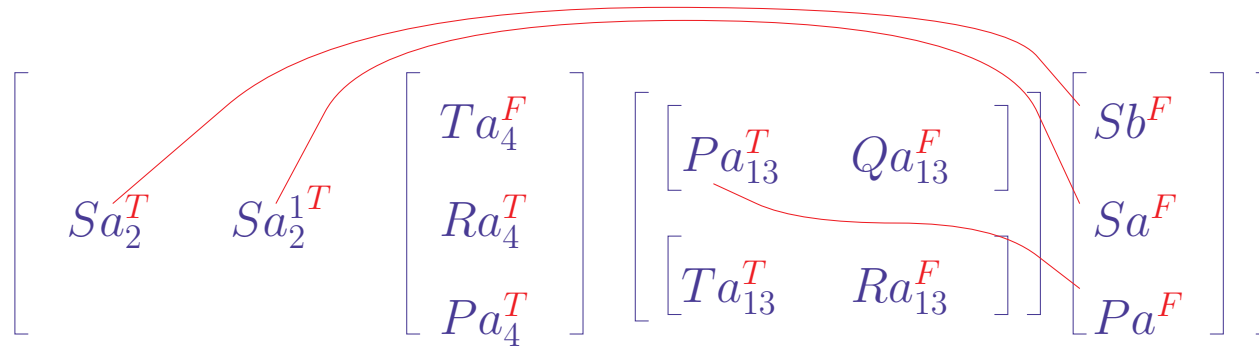
BY Axiom

$[b/a_2, a/a'_2]$

12  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$



# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$

1  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

11  $\vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$

111  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$

112  $\vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$

1121  $\vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$

BY Start

BY Ext  $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$

BY Ext  $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$

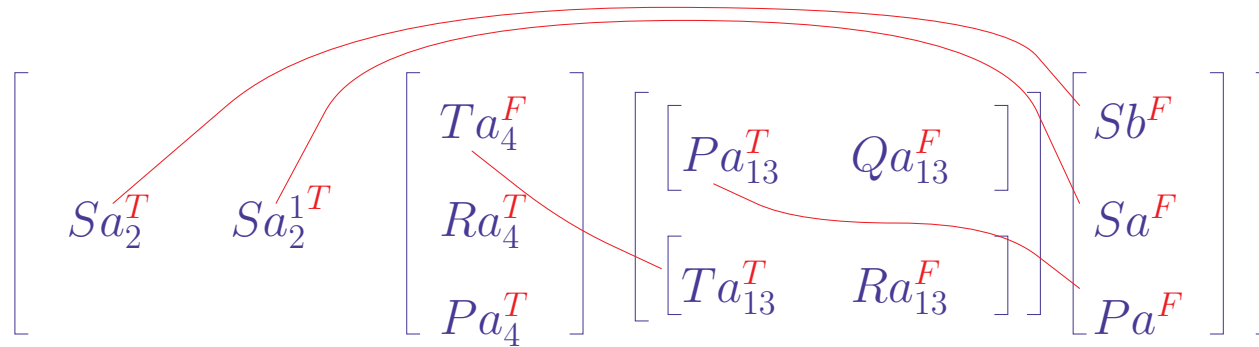
BY Axiom  $[b/a_2, a/a'_2]$

BY Ext  $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$

1122  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$

12  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$

1  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

11  $\vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$

111  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$

112  $\vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$

1121  $\vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$

11211  $\vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$

BY Start

BY Ext  $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$

BY Ext  $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$

BY Axiom  $[b/a_2, a/a'_2]$

BY Ext  $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$

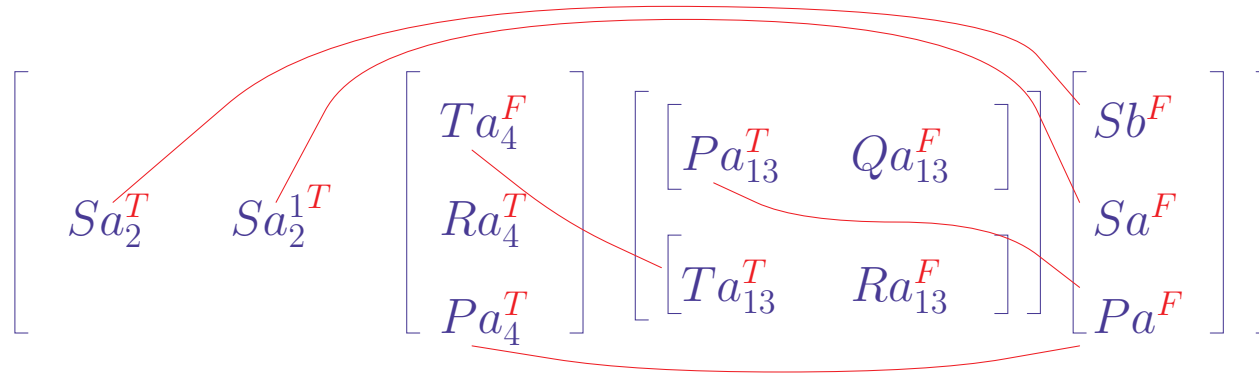
BY Ext  $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$

11212  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\},$

1122  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$

12  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$

1  $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$

11  $\vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$

111  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$

112  $\vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$

1121  $\vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$

11211  $\vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$  BY Red  $Pa_4^T, Pa^F, []$

112111  $\vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$

11212  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\},$

1122  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$

12  $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$

BY Start

BY Ext  $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$

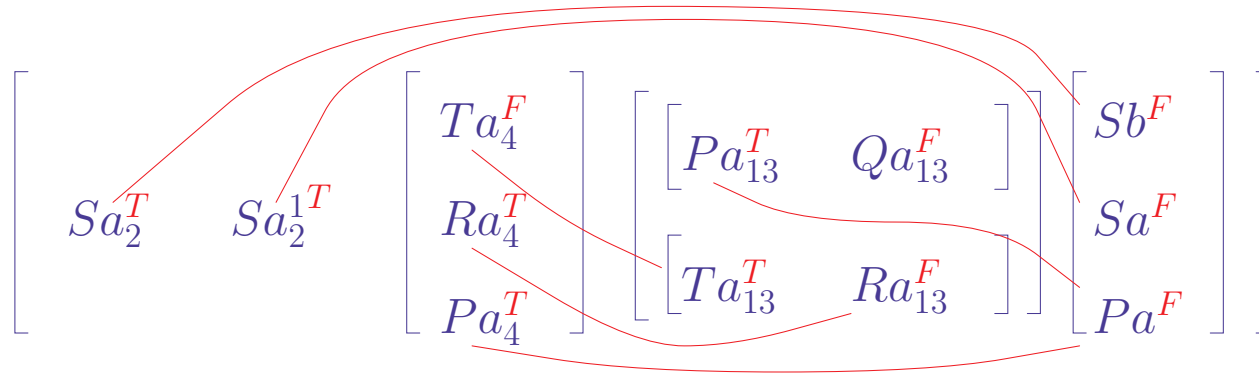
BY Ext  $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$

BY Axiom [b/a\_2, a/a'\_2]

BY Ext  $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$

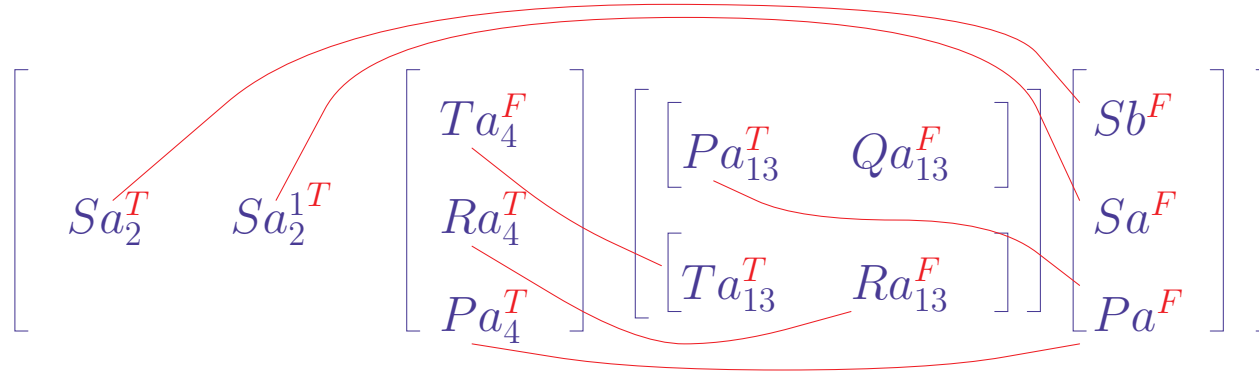
BY Ext  $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



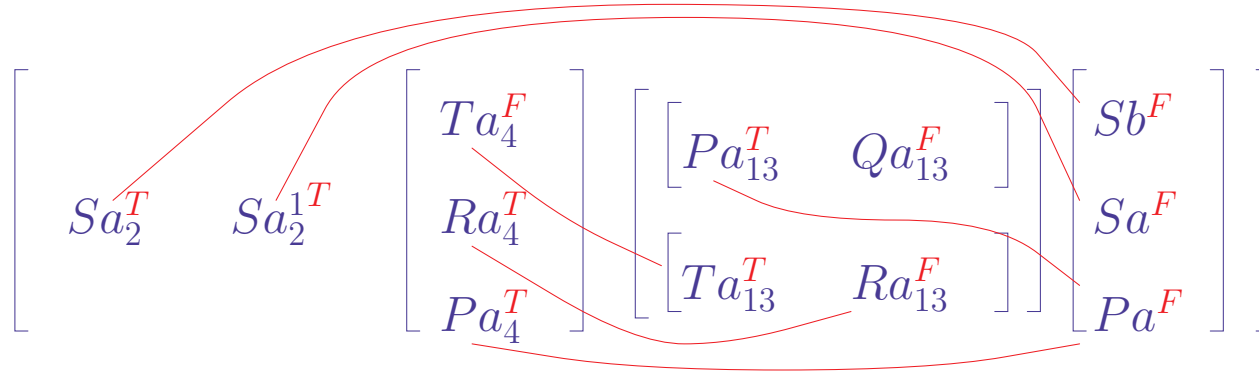
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^{1T}, [a/a'_2]$
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom <span style="float: right;"><math>[b/a_2, a/a'_2]</math></span>
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\},$	
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\},$	
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$	
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$	

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



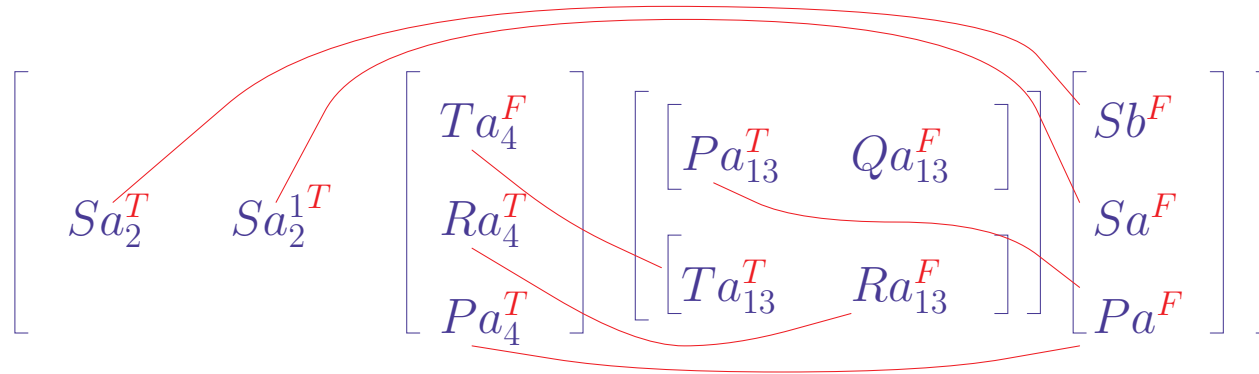
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom <span style="float: right;"><math>[b/a_2, a/a'_2]</math></span>
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom <span style="float: right;"><math>[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]</math></span>
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\},$	
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\},$	
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$	
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$	

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



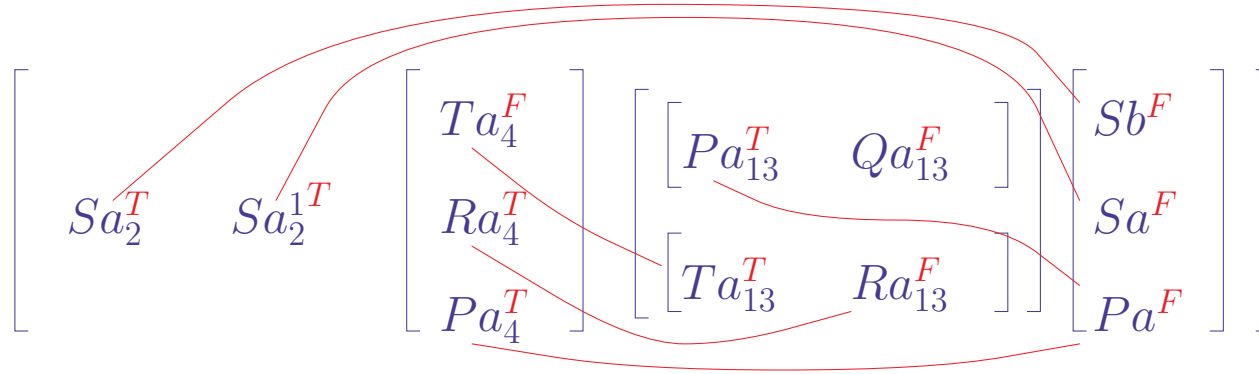
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom <span style="float: right;"><math>[b/a_2, a/a'_2]</math></span>
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom <span style="float: right;"><math>[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]</math></span>
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\},$	
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$	
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$	

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$	BY Start
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom <span style="float: right;"><math>[b/a_2, a/a'_2]</math></span>
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom <span style="float: right;"><math>[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]</math></span>
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom <span style="float: right;"><math>[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]</math></span>
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\},$	
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$	
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$	

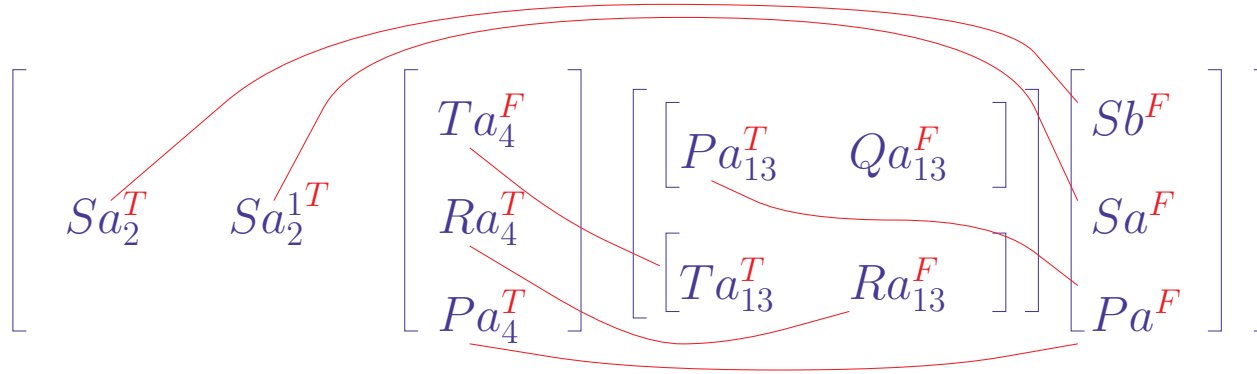
# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\},$		
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$		
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$		

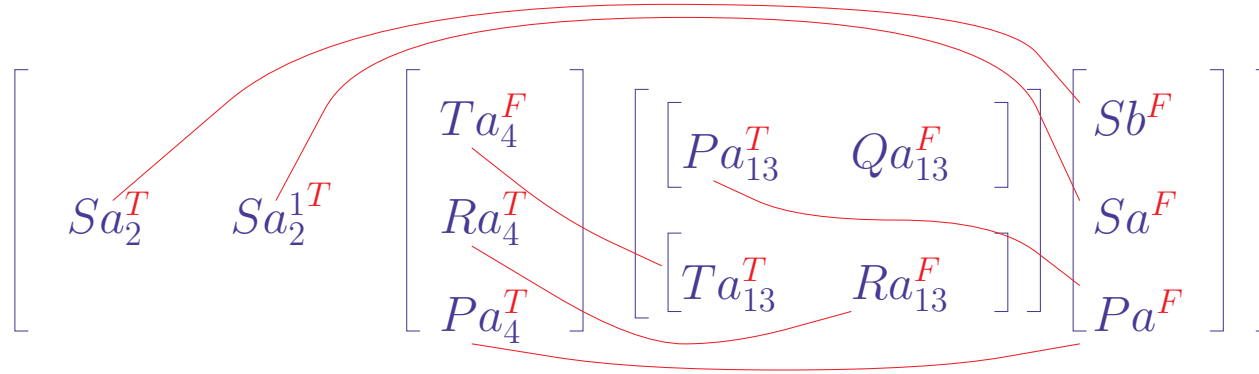


# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



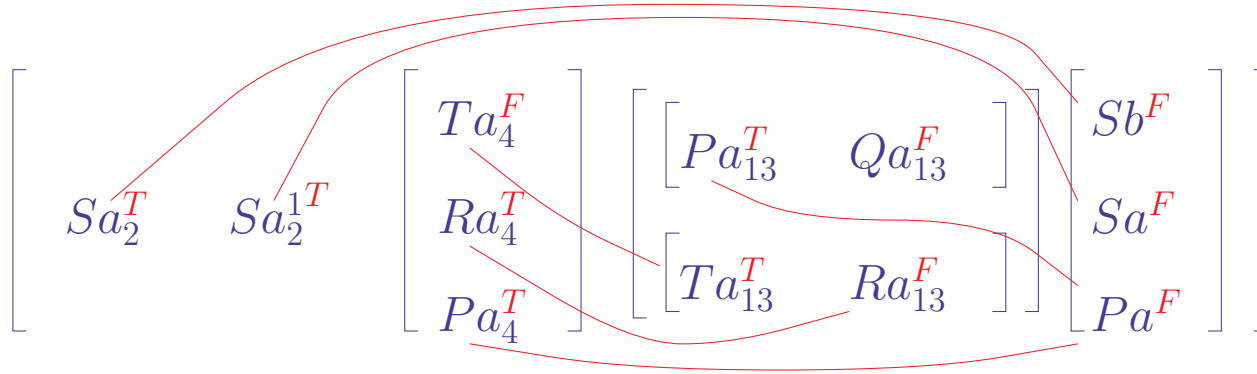
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\},$		
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$		
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$		

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



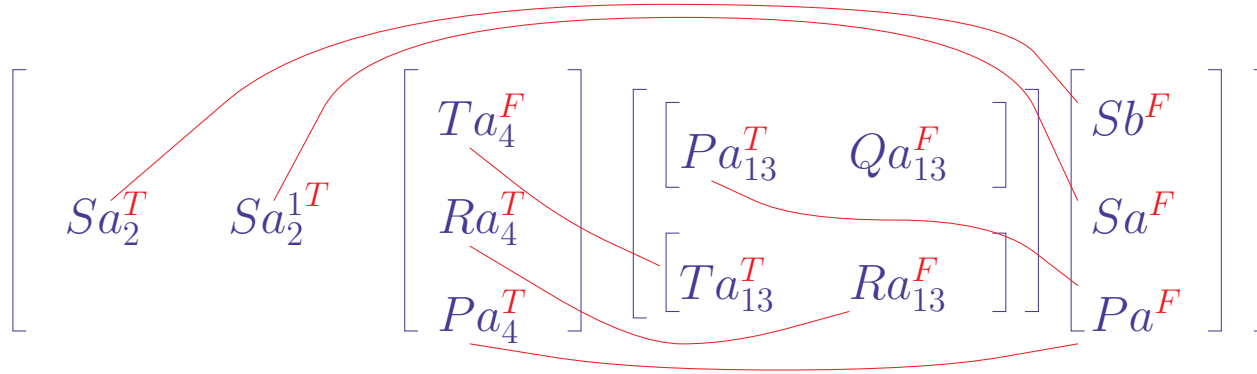
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$		
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$		
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$		

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



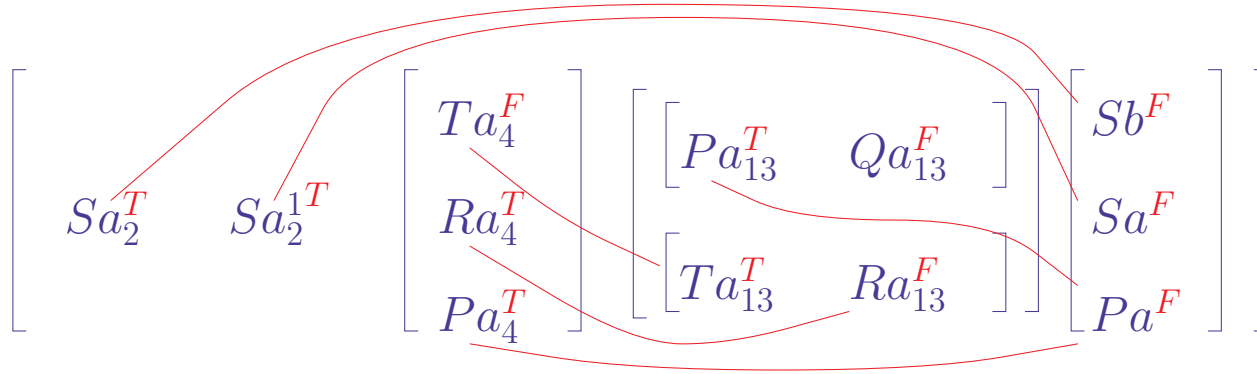
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$		
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$		

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



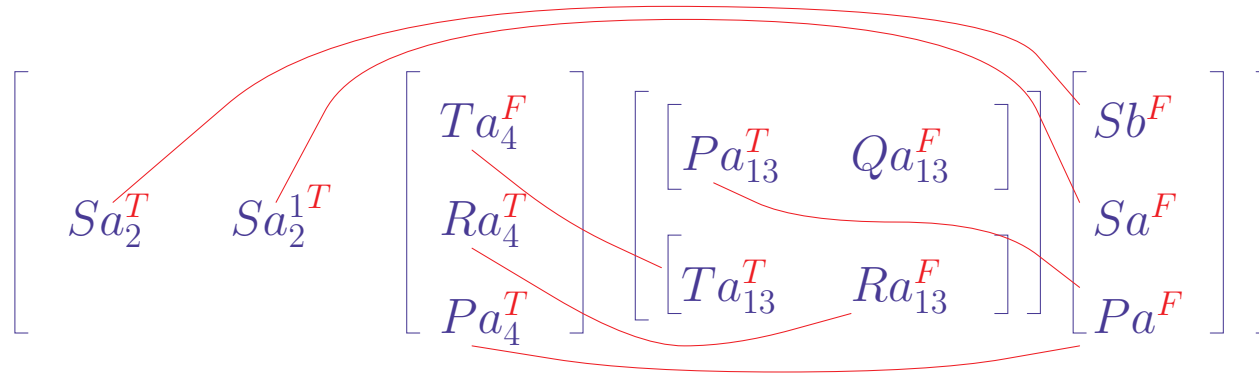
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\},$		
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$		

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



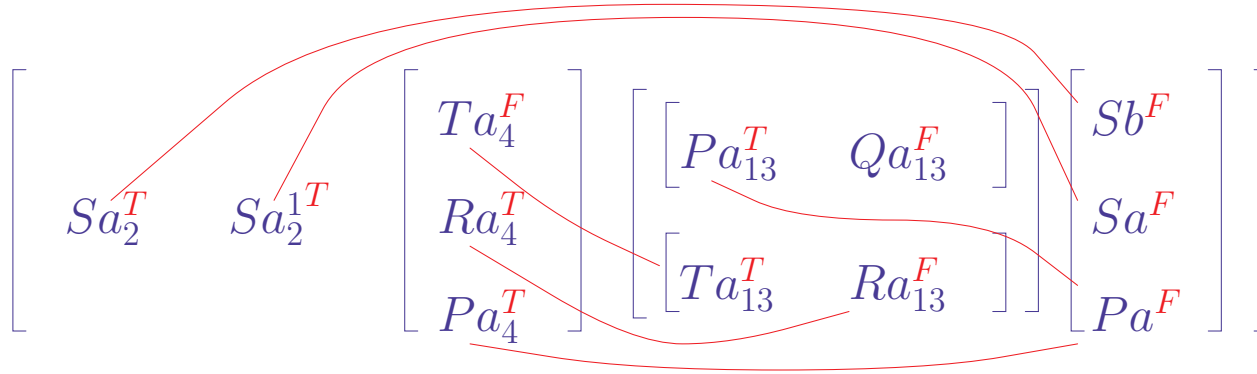
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$		
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$		

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



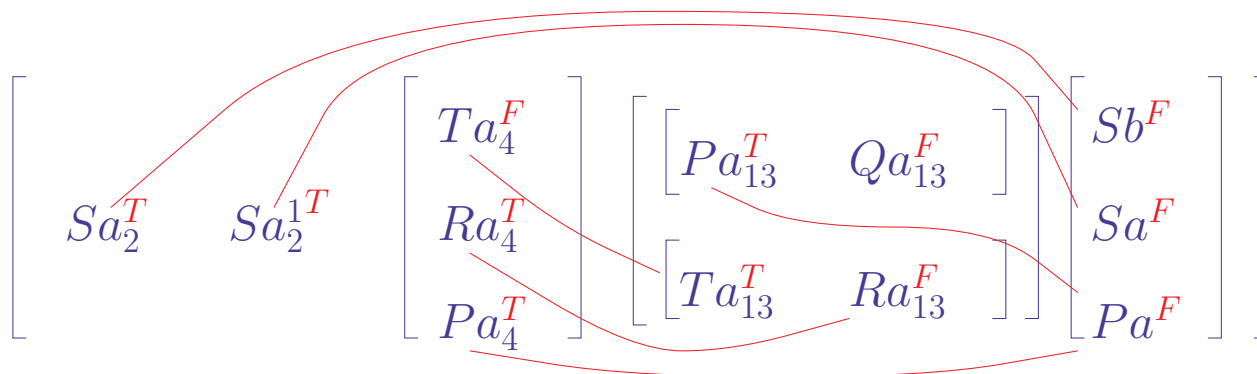
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$		

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^{1T}, [a/a'_2]$	
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$		

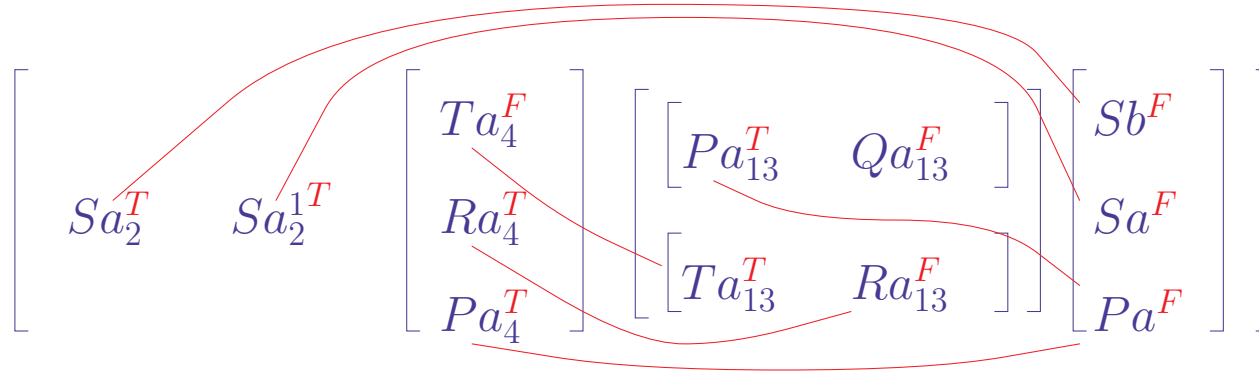
# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^{1T}, [a/a'_2]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\},$		

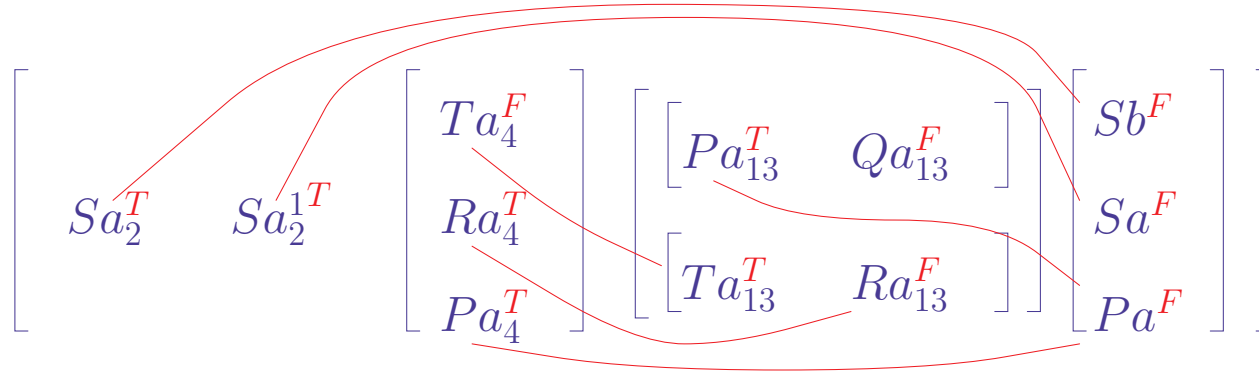


# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



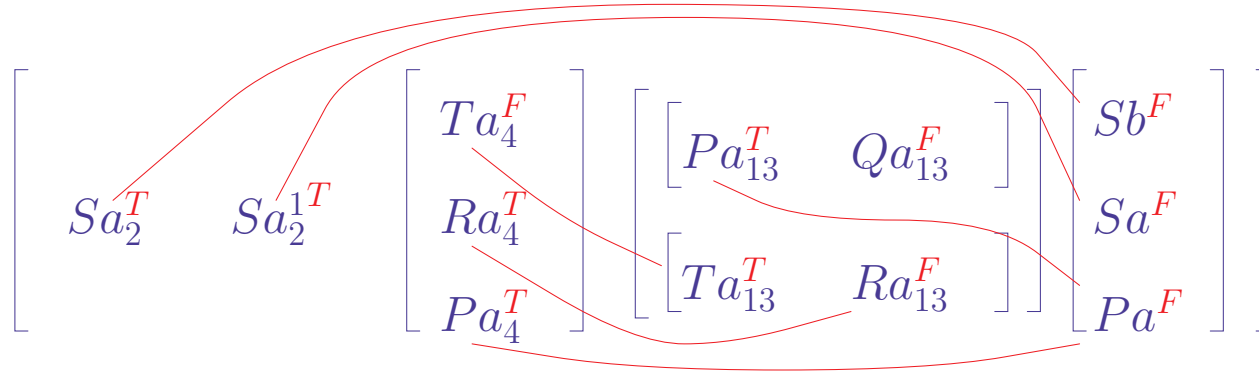
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$		

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



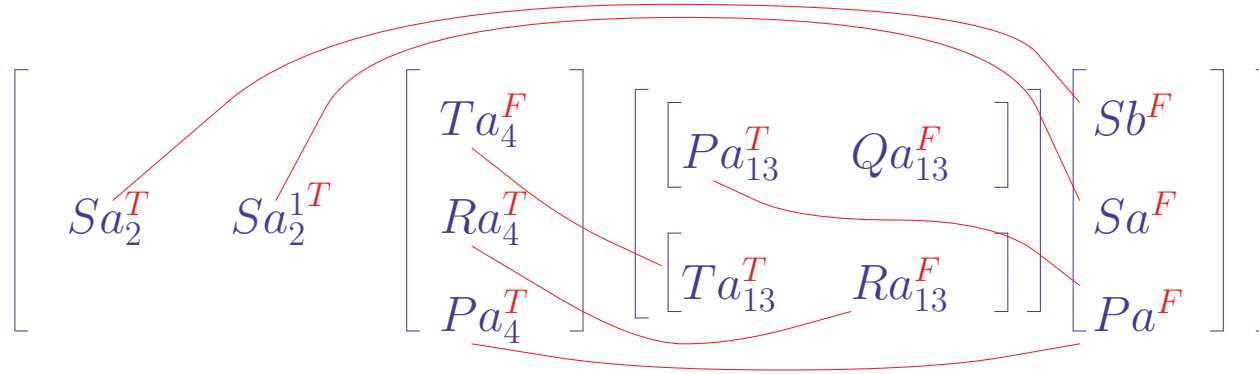
$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY Ext $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY Ext $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$

# EXTENSIONSBEWeis MIT SUBSTITUTIONEN



$\vdash \mathcal{M}$	BY <b>Start</b>	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1 \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, []$	BY <b>Ext</b> $Sa_2^T, Sb^F, [b/a_2]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11 \vdash \{Sa^F, Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2]$	BY <b>Ext</b> $Sa^F, Sa_2^T, [a/a'_2]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Sa^F\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY <b>Axiom</b>	$[b/a_2, a/a'_2]$
$112 \vdash \{Pa^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2]$	BY <b>Ext</b> $Pa^F, Pa_{13}^T, [a/a_{13}]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121 \vdash \{Ta_{13}^T, Ra_{13}^F\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}]$	BY <b>Ext</b> $Ta_{13}^T, Ta_4^F, [a_{13}/a_4]$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11211 \vdash \{Ra_4^T, Pa_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY <b>Red</b> $Pa_4^T, Pa^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$112111 \vdash \{Ra_4^T\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY <b>Ext</b> $Ra_4^T, Ra_{13}^F, []$	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121111 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T, Ra_4^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY <b>Axiom</b>	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1121112 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T, Pa^F, Ta_{13}^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY <b>Axiom</b>	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$11212 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^T, P^F\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY <b>Axiom</b>	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$1122 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^T\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY <b>Axiom</b>	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$
$12 \vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, [b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$	BY <b>Axiom</b>	$[b/a_2, a/a'_2, a/a_{13}, a/a_4]$

- **Grundlage verifizierbarer Referenzimplementierungen**
  - Implementierung hergeleitbar aus theoretischen Erkenntnissen
  - Korrektheit & Vollständigkeit ist bewiesen
- **Wichtig für Beweisführung in nichtklassischer Logik**
  - Gültigkeit in vielen Logiken nur mit Formelbäumen beschreibbar
  - Erweiterung von Normalformverfahren oft zu aufwendig
- **Wichtig für Rekonstruktion lesbarer Beweise**
  - Tableaux- oder Sequenzenbeweis ohne weitere Suche extrahierbar
  - Es gibt Verfahren zur Umwandlung von Sequenzenbeweisen in Text
- **Normalform-Verfahren sind oft schneller**
  - Einzelschritte auf Basis von Klauseln effizienter zu implementieren
  - Bei geeigneten Normalformtransformationen wird Aufblähung der Formel oft durch die höhere Geschwindigkeit kompensiert
  - ... aber gelegentlich ist Beweissuche im Formelbaum deutlich besser