

# Inferenzmethoden

## Einheit 8

### Exkurs

### Bezüge zu anderen Deduktionsverfahren



1. Semantisch orientierte Verfahren
2. Resolution
3. Maslovs Inverse Methode

# DEDUKTIONSVERFAHREN, HISTORISCH

- **Mathematisch-logische Kalküle**
  - Natürliches Schließen/Sequenzkalküle Gentzen 1935
  - Analytische Tableaux Beth 1955, Smullyan 1971
- **Semantisch motivierte Verfahren**
  - Semantische Bäume ca. 1947
  - Modellelimination Loveland 1969
- **Maschinennah formulierte Verfahren**
  - Resolution Robinson 1965
  - Maslov-Verfahren (Inverse Methode) Maslov 1968
  - Extensionsverfahren Bibel 1981, Andrews 1981
  - Konsolution Eder 1991
- **Aussagenlogische Reduktionstechniken**
  - Matrixreduktionsverfahren Prawitz 1960
  - Davis-Putnam Verfahren Davis & Putnam 1960
  - ⋮ ⋮

## Unabhängig entstanden, dennoch ähnlich

- **Semantische Bäume:** Erzeuge systematisch alle alternativen Variablenbelegungen und eliminiere Teilmodelle, die eine der Klauseln erfüllen
- **Modellelimination:** Betrachte systematisch alle Klauseln und eliminiere Teilmodelle, welche die Klauselmenge nicht falsifizieren
- **Resolution:** Leite aus zwei Klauseln mit komplementären Literalen eine neue Klausel (**Resolvente**) ab, die genau dann erfüllbar ist, wenn die beiden Elternklauseln erfüllbar sind
- **Maslov-Verfahren (Inverse Methode):** Betrachte systematisch alle Klauseln und halte die Bedingungen fest, unter denen alle Klauseln erfüllt wären
- **Extensionsverfahren:** Folge Konnektionen und untersuche Pfade, die noch nicht als komplementär erkannt wurden. Halte unbetrachtete Literale der beteiligten Klauseln auf dem Stack.
- **Aussagenlogische Reduktionstechniken:** Anwendung von Reduktionstechniken und Aufspaltung von Matrizen

# EXTENSIONSVERFAHREN ABSTRAHIERT

**Gegeben:** Matrix  $\{c_1, \dots, c_n\}$  mit  $c_i = \{L_{i1}, \dots, L_{im_i}\}$

Menge von Konnektionen  $\{k_1, \dots, k_m\}$  mit  $k_j = \{P_{ij}^F, P_{ij}^T\}$

**Start:**  $m_1$  Knoten markiert den Literalen der Startklausel

**Regeln: Extension:** Wähle Blattknoten  $L$  und Konnektion  $k_j = \{L, L_{ik}\}$

(Prädikatenlogische Form: “mit  $\sigma$  instantiierte Konnektion”)

**Reduktion:** Entferne aus Klausel  $c_i = \{L_{i1}, \dots, L_{im_i}\}$  alle Literale, die zu einem Literal des aktuellen Pfades komplementär sind.

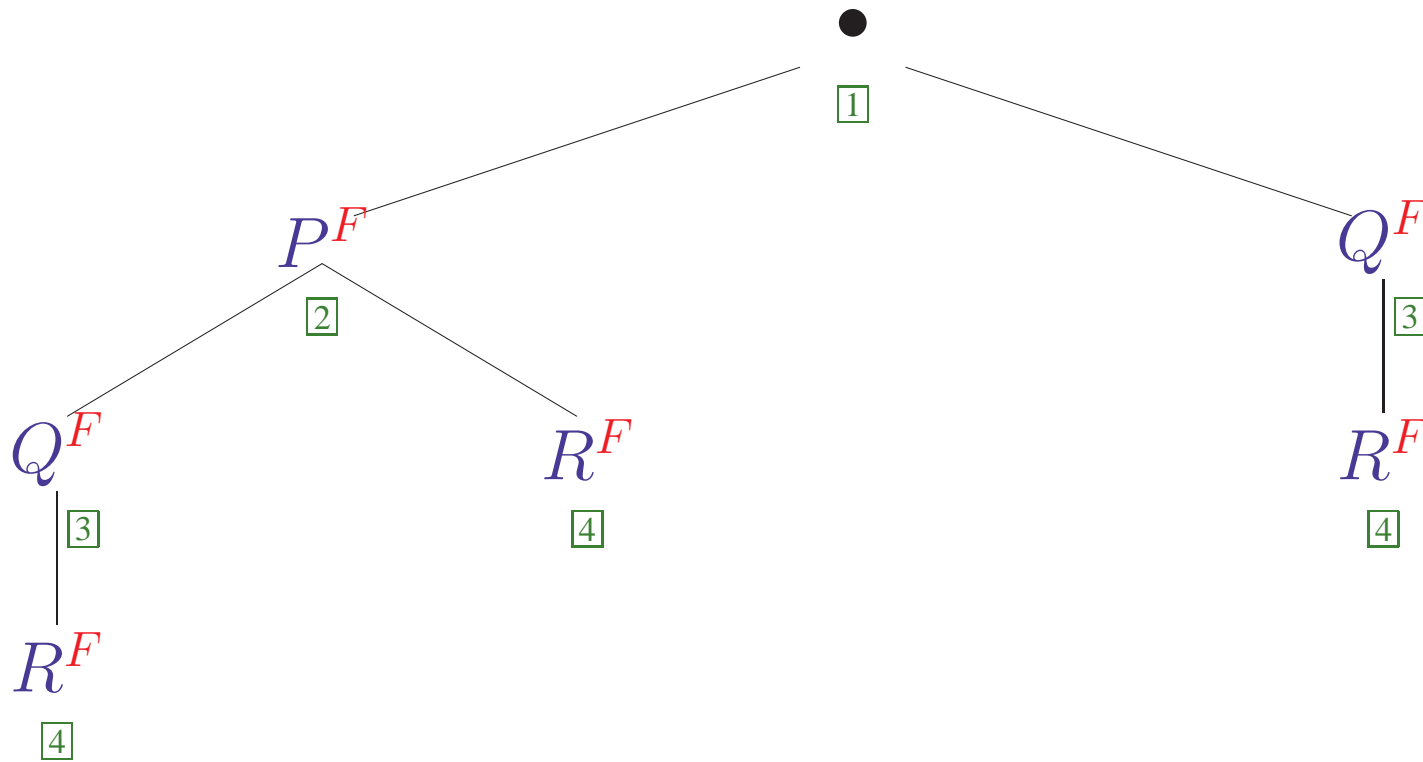
Ergänze verbleibende Literale als Nachfolgerknoten von  $L$ .

**Ziel:** Alle Knoten haben keine Nachfolger

**Rechtfertigung:** Knoten codieren Teilpfade, die noch nicht als komplementär nachgewiesen sind. Extension erweitert die Pfade um die nichtkomplementären Literale konnektierbarer Klauseln. Das Verfahren endet, wenn kein Pfad übrigbleibt, der nicht komplementär ist.

# EXTENSIONSVERFAHREN FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\{\{P^F, Q^F\}^{\boxed{1}}, \{P^T, Q^F, R^F\}^{\boxed{2}}, \{Q^T, R^F\}^{\boxed{3}}, \{R^T\}^{\boxed{4}}\}$$



**Auswahlstrategie hat großen Einfluß auf Größe des Beweises**

# EXTENSIONSVERFAHREN FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$ – ALTERNATIVE AUSWAHL DER KONNEKTIONEN –

$$\{\{P^F, Q^F\}^{\boxed{1}}, \{P^T, Q^F, R^F\}^{\boxed{2}}, \{Q^T, R^F\}^{\boxed{3}}, \{R^T\}^{\boxed{4}}\}$$



# MODELLELIMINATION

ZEIGE, DASS KEIN MODELL EINE FORMEL FALSIFIZIEREN KANN

**Beweis für**  $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

1. Um die erste Klausel falsch werden zu lassen, darf  $P$  oder  $Q$  nicht wahr sein. Wir **nehmen an**,  $P$  sei falsch, und betrachten die weiteren Klauseln
2. Unter der Annahme ist  $\neg P$  wahr. Klausel 2 wird trotzdem falsch, wenn zusätzlich  $Q$  oder  $R$  falsch ist. Wir **nehmen an**,  $Q$  sei falsch.
3. Unter den Annahmen ist  $\neg Q$  wahr. Klausel 3 wird trotzdem falsch, wenn **zusätzlich**  $R$  falsch ist.
4. Unter den Annahmen ist  $\neg R$  (Klausel 4) wahr. Sie führen also **nicht zu einem Gegenmodell** und wir müssen **weitere Alternativen** betrachten.
5. Wenn  $R$  wahr wäre, würde Klausel 3 wahr, also müssen wir andere Alternativen betrachten.
6. Wenn  $Q$  wahr wäre, würde Klausel 2 wahr – es sei denn,  $R$  wäre falsch. Dann aber wird Klausel 4 wahr. Somit gibt es **kein Gegenmodell, in dem  $P$  falsch ist.**

⋮

⋮

**Extensionsverfahren ist maschinennahe Modellelimination**

# SEMANTISCHE BÄUME

ERZEUGE MODELLE, BIS ALLE EINE DER KLAUSELN ERFÜLLEN

**Beweis für**  $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

1. Es gilt entweder  $R$  oder  $\neg R$ .
2. Da  $\neg R$  die 4. Klausel erfüllt, müssen wir nur den ersten Fall betrachten
3. Im Fall  $R$  wissen wir, daß auch  $Q$  oder  $\neg Q$  gilt. Da  $R$  und  $\neg Q$  die 3. Klausel erfüllt, müssen wir nur noch den ersten betrachten.
4. Wir unterscheiden nun  $P$  oder  $\neg P$ .
5. Im ersten Fall haben wir  $P, Q$  (und  $R$ ), also ist die 1. Klausel erfüllt
6. Im zweiten Fall haben wir  $\neg P, Q$  und  $R$ , also ist die 2. Klausel erfüllt
7. Damit erfüllt jede Alternative mindestens eine der 4 Klauseln  
(Keine Alternative kann alle 4 Klauseln falsifizieren)

**Duale Form der Modellelimination**



# SEMANTISCHE BÄUME IN MATRIX-DENKWEISE

**Gegeben:** Matrix  $\{c_1, \dots, c_n\}$  mit  $c_i = \{L_{i1}, \dots, L_{im_i}\}$

Menge von Konnektionen  $\{k_1, \dots, k_m\}$  mit  $k_j = \{P_{ij}^F, P_{i'j}^T\}$

**Start:** Ein Knoten markiert mit der Matrix  $\{c_1, \dots, c_n\}$

**Regeln:** Wähle Konnektion  $k_j = \{P_{ij}^F, P_{i'j}^T\}$ .

Generiere zwei Nachfolger, markiert mit  $P_{ij}^F$  und  $P_{i'j}^T$

**Ziel:** Alle Äste abgeschlossen (enthalten eine Klausel der Matrix)

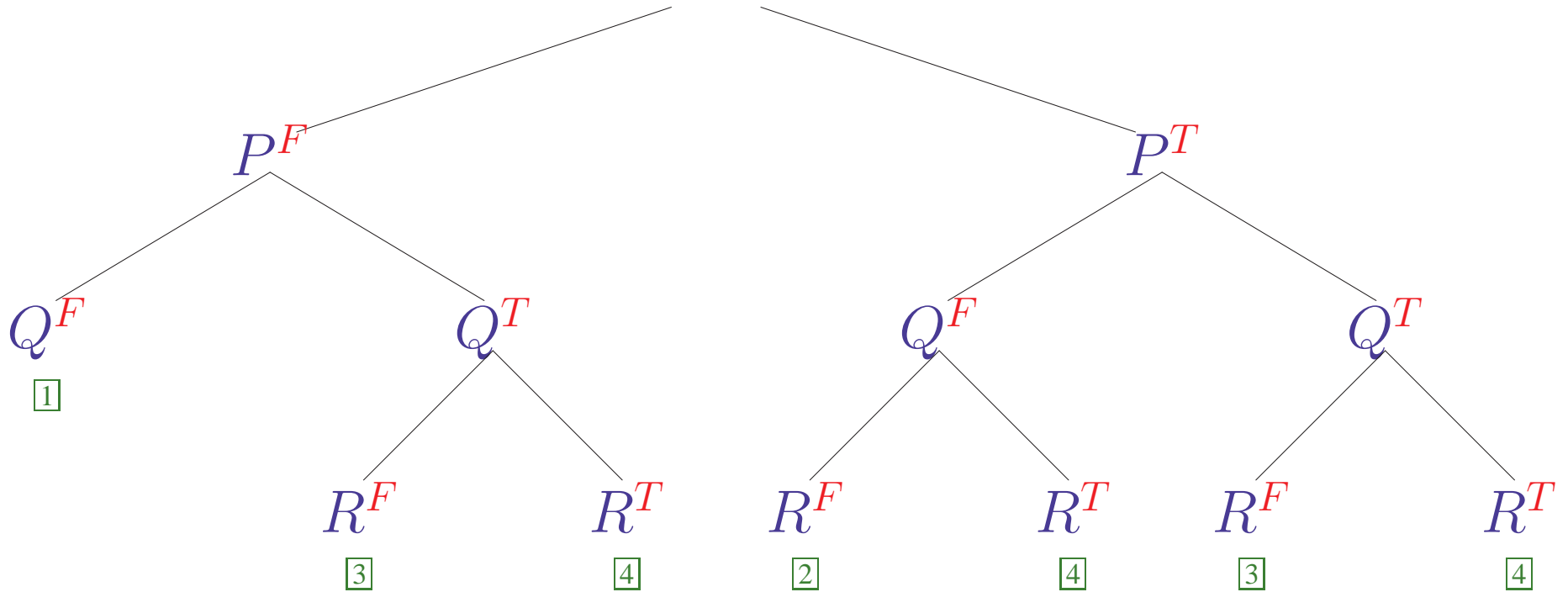
**Rechtfertigung:** Jeder Ast beschreibt ein oder mehrere mögliche Modelle.

Jedes Modell muß eine der Klauseln erfüllen.

**Gut für Klausel-Normalform, aber schwer zu verallgemeinern**

# SEMANTISCHER BAUM FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$\{\{P^F, Q^F\}^{\boxed{1}}, \{P^T, Q^F, R^F\}^{\boxed{2}}, \{Q^T, R^F\}^{\boxed{3}}, \{R^T\}^{\boxed{4}}\}$

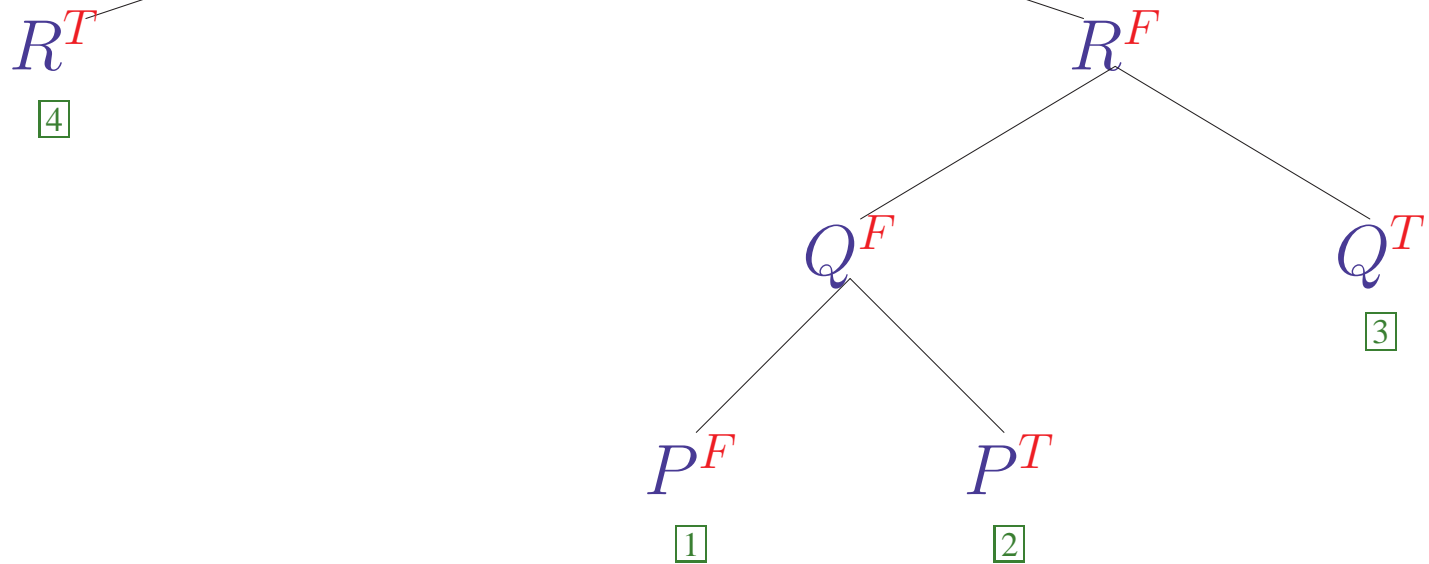


**Auswahlstrategie hat großen Einfluß auf Größe des Beweises**

# SEMANTISCHER BAUM FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

– ALTERNATIVE AUSWAHL DER KONNEKTIONEN –

$\{\{P^F, Q^F\}^{\boxed{1}}, \{P^T, Q^F, R^F\}^{\boxed{2}}, \{Q^T, R^F\}^{\boxed{3}}, \{R^T\}^{\boxed{4}}\}$



# RESOLUTION

↳ “Angewandte Logik”

## ERZEUGE RESOLVENTEN BIS DIE LEERE KLAUSEL ENTSTEHT

**Gegeben:** Menge von Klauseln  $\{c_1, \dots, c_n\}$ , die eine zu widerlegende Formel in konjunktiver Normalform repräsentieren

**Regeln:** **Resolutionsregel:** Wähle zwei Klauseln  $L_{11} \vee \dots \vee L_{1m} \vee Pt_1$  und  $L_{21} \vee \dots \vee L_{2k} \vee \neg Pt_2$ , so daß  $t_1$  und  $t_2$  unifizierbar sind  
Ergänze  $\sigma(L_{11} \vee \dots \vee L_{1m} \vee L_{21} \vee \dots \vee L_{2k})$  zur Klauselmenge, wobei  $\sigma$  der allgemeinste Unifikator von  $t_1$  und  $t_2$  ist.

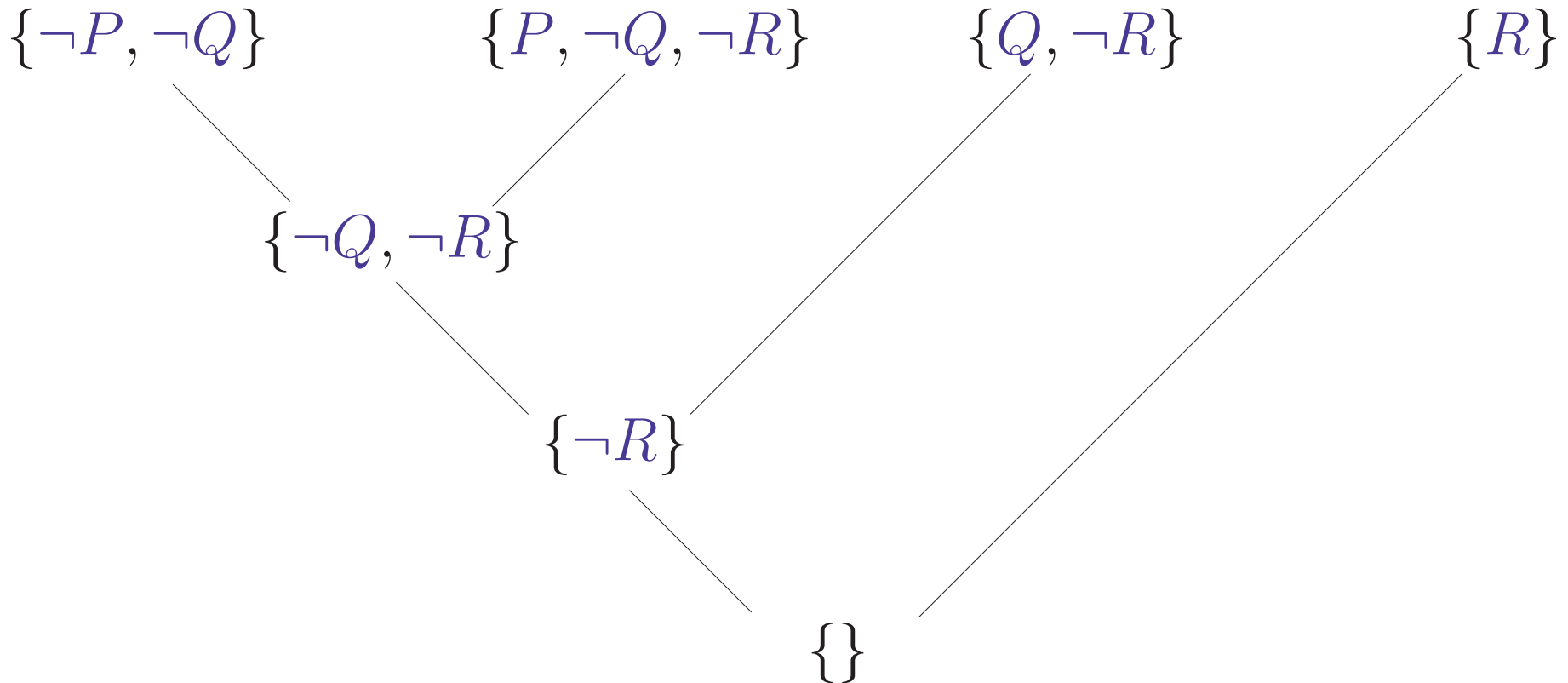
Umbenennung der Variablen garantiert, daß Elternklauseln verschiedene Variablen haben

**Ziel:** Die Klauselmenge enthält die leere Klausel

**Rechtfertigung:** Die Formel  $\sigma(L_{11} \vee \dots \vee L_{1m} \vee L_{21} \vee \dots \vee L_{2k})$  ist genau dann erfüllbar, wenn  $L_{11} \vee \dots \vee L_{1m} \vee Pt_1$  und  $L_{21} \vee \dots \vee L_{2k} \vee \neg Pt_2$  erfüllbar sind. Da die leere Klausel unerfüllbar ist, folgt aus der Ableitbarkeit der leeren Klausel die Unerfüllbarkeit der ursprünglichen Klauselmenge.

## Verdichtung semantischer Bäume

# RESOLUTIONS-ABLEITUNG FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$



**Sehr kurze Beweise möglich, aber oft schwer zu finden  
Klauselmenge wächst mit jedem Resolutionsschritt an**

# RESOLUTION IN MATRIX-DENKWEISE

**Gegeben:** Matrix  $\{c_1, \dots, c_n\}$  mit  $c_i = \{L_{i1}, \dots, L_{im_i}\}$   
Menge von Konnektionen  $\{k_1, \dots, k_m\}$  mit  $k_j = \{P_{ij}^F, P_{i'j}^T\}$

**Start:**  $n$  Knoten markiert mit den Klauseln  $c_i = \{L_{i1}, \dots, L_{im_i}\}$

**Regeln:** Wähle Konnektion  $k_j = \{P_{ij}^F, P_{i'j}^T\}$   
und 2 Knoten markiert mit  $K_1 \cup \{P_{ij}^F\}$  und  $K_2 \cup \{P_{i'j}^T\}$ .  
(Prädikatenlogische Form: mit  $\sigma$  instantiierte Konnektion)

Generiere einen Nachfolger, markiert mit  $K_1 \cup K_2$

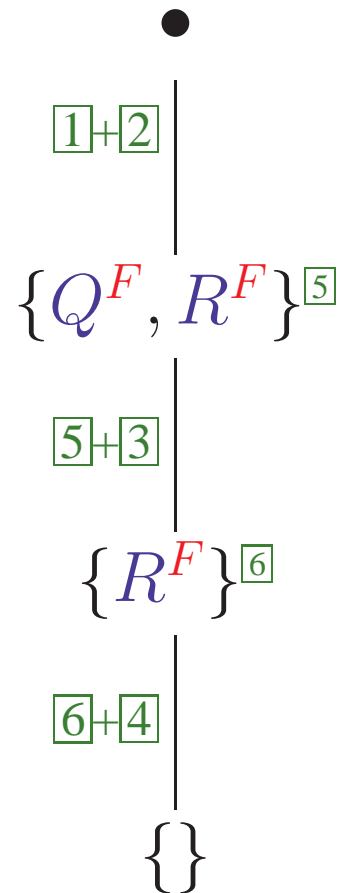
**Ziel:** Ein Knoten, der mit  $\{\}$  markiert ist

---

**Rechtfertigung:** Die Klausel  $K_1 \cup K_2$  ist genau dann komplementär zur Restmatrix, wenn dies für die Matrix  $\{K_1 \cup \{P_{ij}^F\}, K_2 \cup \{P_{i'j}^T\}\}$  gilt  
Die leere Klausel macht jede Restmatrix komplementär (es gibt keine Pfade)

# RESOLUTIONSBEWEIS FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\{\{P^F, Q^F\}^{\boxed{1}}, \{P^T, Q^F, R^F\}^{\boxed{2}}, \{Q^T, R^F\}^{\boxed{3}}, \{R^T\}^{\boxed{4}}\}$$



# MASLOV-VERFAHREN (INVERSE METHODE)

## Zielorientierte synthetische Beweisführung

**Gegeben:** Zielformel  $X$  und eine Menge von Axiomensequenzen der Form  $P \vdash P$ , wobei  $P$  Literal von  $X$  ist

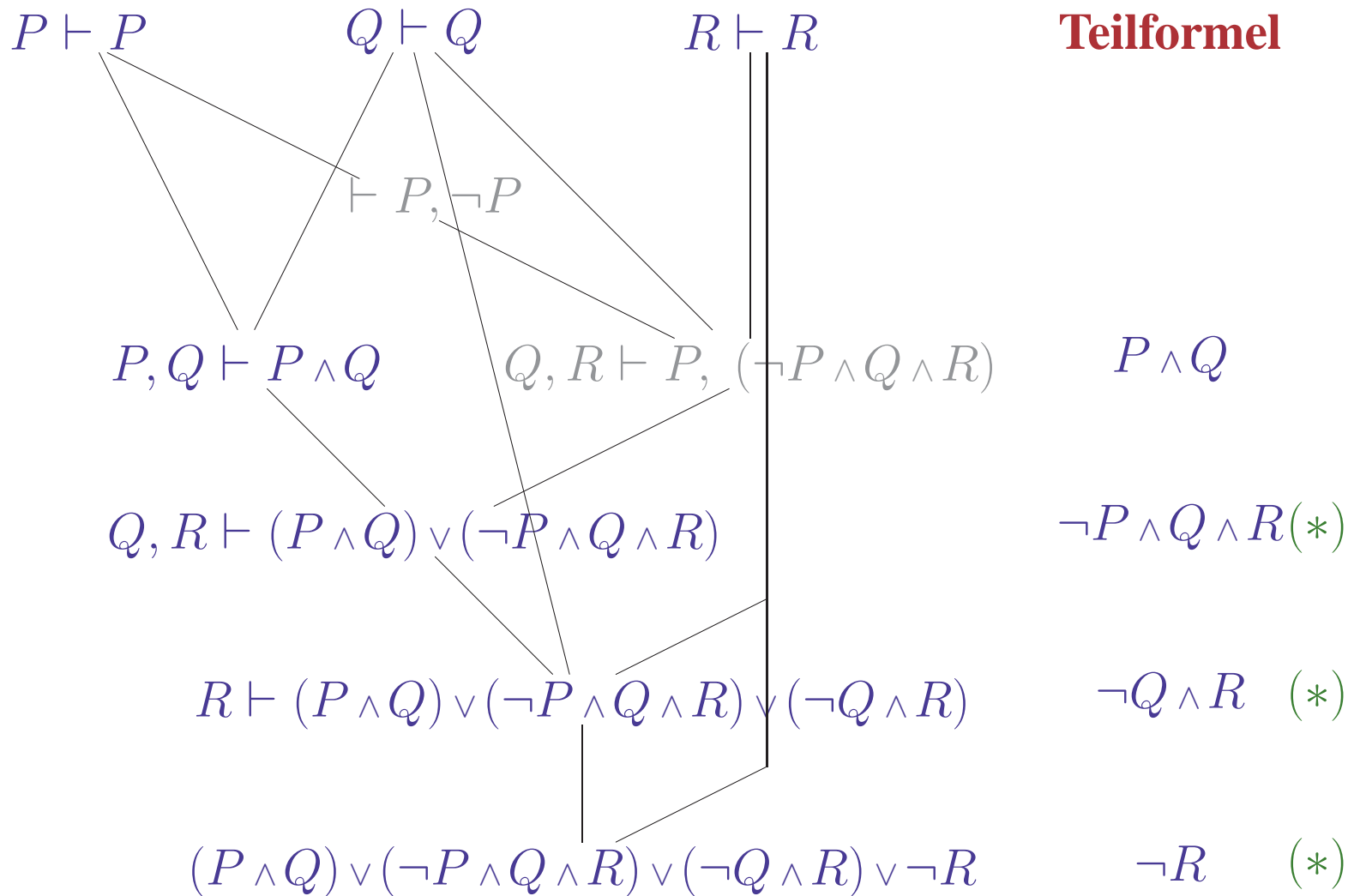
**Regel:** Wähle eine kleinste neue Teilformel  $Y$  von  $X$ , eine Regel des (synthetischen) Sequenzenkalküls, deren Konklusion die Form  $\Gamma \vdash Y$  hat, und bereits abgeleitete Sequenzen  $\Gamma_1 \vdash Y_1$  (und ggf.  $\Gamma_2 \vdash Y_2$ ), welche mit den Prämissen der Regel unifizieren. Leite die Sequenz  $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash Y$  ab

**Ziel:** Abgeleitete Sequenz  $\vdash X$  (ohne Annahmen)

**Rechtfertigung:** Das Verfahren sucht nach einer Folge von Sequenzenregeln, die von Axiomen der Form  $P \vdash P$  zur Zielformel  $\vdash X$  führen. Es nutzt dabei die **Teilformeleigenschaft** von Sequenzenkalkülen aus (der Wahrheitswert der Teilformeln bestimmt den der Ausgangsformel) und speichert die noch offenen Annahmen in der Sequenz. Im Original ist das Verfahren als **Widerlegungskalkül** formuliert: Axiome sind grundsätzliche Widersprüche und das Beweisziel ist die Widerlegung von  $X$  ohne zusätzliche Annahmen.



# MASLOV-ABLEITUNG FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$



(\*) Diese Regelanwendung besteht aus mehreren (immer gleichartigen) Teilschritten:  $\neg$ -R für negierte Literale,  $\wedge$ -R für den Aufbau der Klausel und schließlich Schnittregel (und  $\vee$ -R) für das Zusammensetzen der Klauseln unter Wegfall des Konnektionsliterals

# MASLOV-VERFAHREN IN MATRIX-DENKWEISE

**Gegeben:** Matrix  $\{c_1, \dots, c_n\}$  mit  $c_i = \{L_{i1}, \dots, L_{im_i}\}$   
Menge von Konnektionen  $\{k_1, \dots, k_m\}$  mit  $k_j = \{P_{ij}^F, P_{i'j}^T\}$

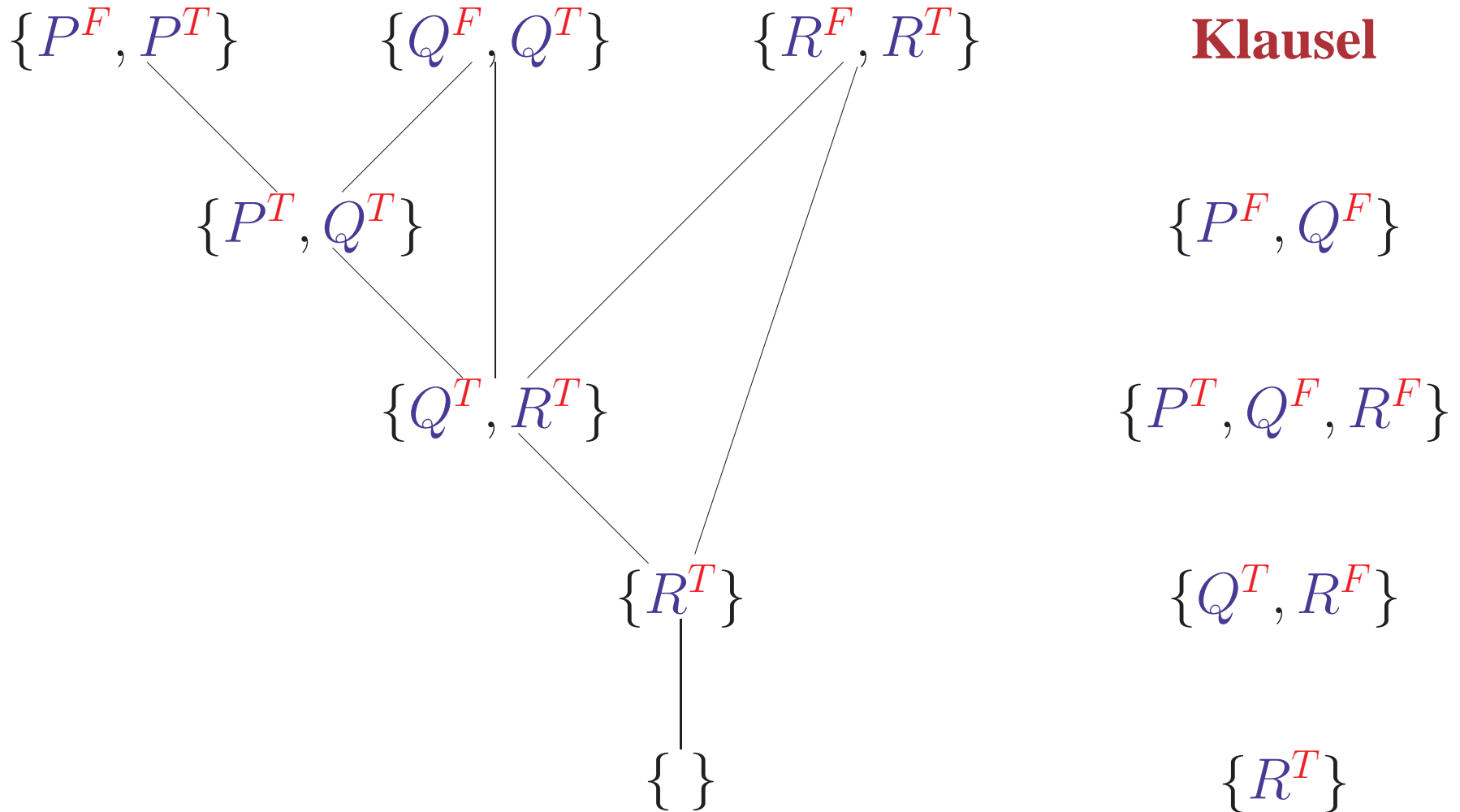
**Start:**  $m$  Knoten markiert mit Konnektionen  $k_j = \{P_{ij}^F, P_{i'j}^T\}$

**Regeln:** Wähle Klausel  $c_i = \{L_{i1}, \dots, L_{im_i}\}$ .  
und  $m_i$  Knoten markiert mit  $K_1 \cup \{L'_{i1}\} \dots K_{m_i} \cup \{L'_{im_i}\}$ .  
( $K_j$  sind Klauselmengen, die  $L'_{im_i}$  unifizieren mit den  $L_{im_i}$ )  
Generiere einen Nachfolger, markiert mit  $K_1 \cup \dots \cup K_{m_i}$

**Ziel:** Ein Knoten, der mit  $\{\}$  markiert ist

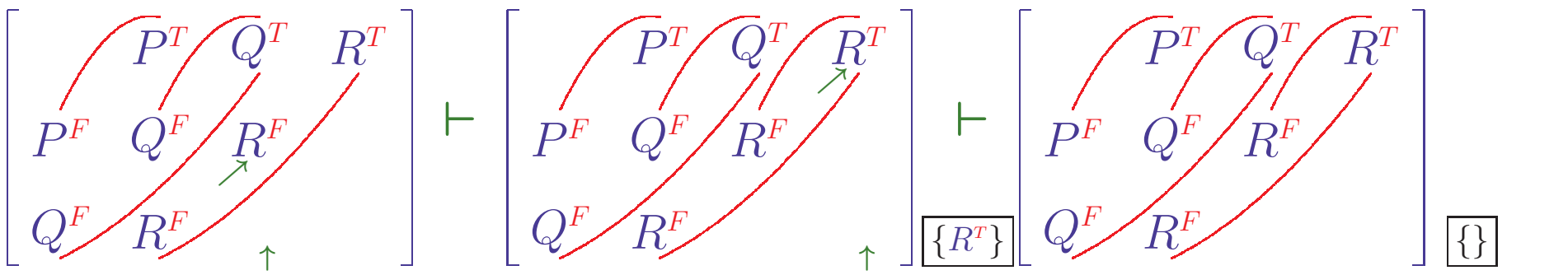
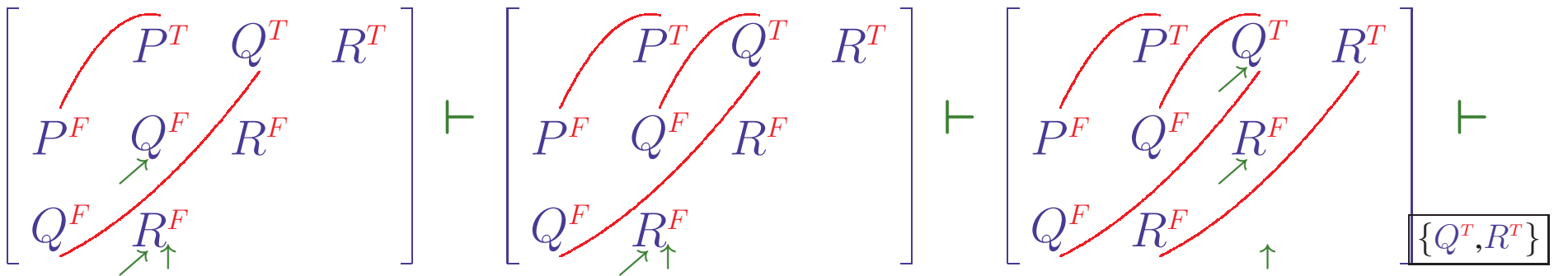
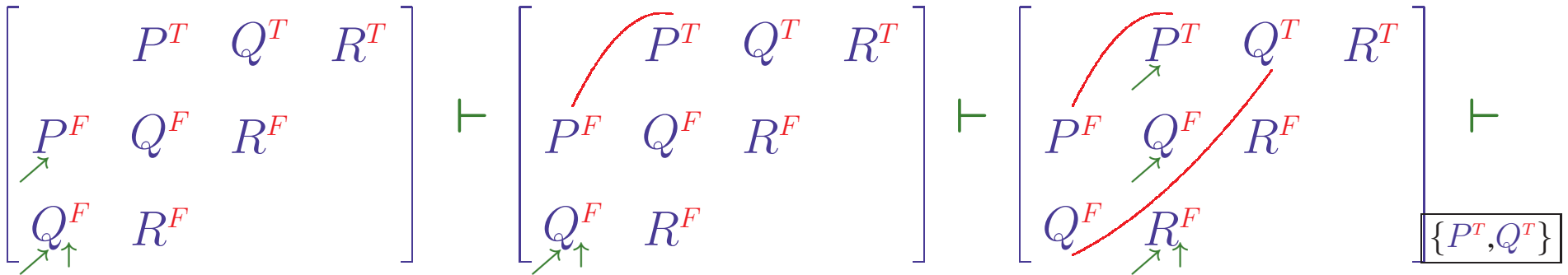
**Rechtfertigung:** Die Regel entspricht dem Ableitungsschritt einer veränderten Abarbeitungsreihenfolge bei der Suche nach Komplementarität. Statt Tiefensuche werden ganze Klauseln (Breitensuche) verarbeitet und Teilpfade, die alle Pfade durch die bisher betrachteten Klauseln mit Sicherheit komplementär machen würden, auf einen Stack gelegt. Erscheint dabei der leere Pfad, so ist jeder Pfad durch die Matrix komplementär.

# MASLOV-BEWEIS FÜR $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$



**Kurze Beweise, aber Beweissuche oft mühsam**

# MASLOV-ABLEITUNG ALS INVERSE KONNEKTIONSMETHODE



- **Fast alle Verfahren sind konnektionenorientiert**
  - Konnektionen verketteten Formeln oder schließen Beweisäste ab
- **Große Unterschiede in Steuerung der Beweissuche**
  - Steuerung durch Klauseln oder aktuelle Beweispfade
  - Erzeugung zusätzlicher Klauseln oder Durchsuchen der Matrix
  - Indirekte oder direkte Beweisführung
- **Viele Verfahren benötigen Klauselnormalform**
  - Extensionsverfahren basiert auf Charakterisierung der Gültigkeit von Formeln und kann auch direkt auf Formelbaum operieren
  - Wichtig für nichtklassische und höhere Logiken
- **Davis-Putnam Verfahren ist völlig anders**
  - Systematische Vereinfachung und Aufspaltung der Formel
  - Extrem effizient aber nur für Aussagenlogik verwendbar
  - Hyperlinking reduziert Prädikatenlogik auf Aussagenlogik (Lee & Plaisted 1992)