Inferenzmethoden

Einheit 7

Reduktions- und Optimierungstechniken

1. Klausel- und Literalreduktionen
2. Reduktionsbasierte Beweisverfahren
3. Reduktion prädikatenlogischer Matrizen

Reduktionen

- **Zeit für Beweissuche hängt von Größe der Matrix ab**
  – Gültigkeitsproblem ist co-NP-vollständig in Aussagenlogik
    und unentscheidbar in Prädikatenlogik

- **Viele Normalform-Matrizen enthalten Redundanzen**
  – Normalisierung erzeugt oft überflüssige Literale und Klauseln
  – Beweissuche muß unnötig viele Pfade untersuchen
    und kann ggf. in irrelevanten Teilmatrizen steckenbleiben

- **Reduktionen verkleinern Matrix vor Beginn der Suche**
  – Verringere Anzahl der Klauseln, Literale, oder Pfade
  – Theoretisch sind große Effizienzsteigerungen möglich
  – Manchmal wird sogar der Grund für die Unentscheidbarkeit entfernt

Anforderungen an Reduktionstechniken

- **Notwendiges Kriterium: Gültigkeitserhaltend**
  - Gültigkeit des reduzierten Problems impliziert die des Ausgangsproblems
  - Immer erfüllt bei Entfernung ganzer Klauseln
- **Zusätzliches Kriterium: Modellerhaltend**
  - Gültigkeit des Ausgangsproblems impliziert die des reduzierten Problems
  - Immer erfüllt bei Entfernung einzelner Literale
- **Wichtiges Kriterium: Effizienz**
  - Schneller Test auf Anwendbarkeit
  - Schnelle Ausführung im Vergleich zu eigentlichem Beweisverfahren
    - Statische Reduktionen (Vorverarbeitung der Matrix) oft sehr effizient
    - Dynamische Reduktionen (Integration in laufenden Beweisprozeß) sind oft aufwendig und können das Suchverfahren behindern

Reduktionsmöglichkeiten in Matrizen

- **Triviale Reduktionen**
  - Eliminiere mehrfach vorkommende Literale einer Klausel
  - Eliminiere tautologische (selbstkomplementäre) Klauseln
- **Einfach durchzuführende Reduktionen**
  - Eliminiere Literale, die komplementär zu Einerklauseln sind
  - Eliminiere Klauseln mit unkonnektierten Literalen
  - Eliminiere Klauseln, die von anderen subsumiert werden
- **Aufwendigere Reduktionen**
  - Ausfaktorisierung gleichartiger Literale in verschiedenen Klauseln
  - Erzeugung und Verwendung von Lemmata (gleichartige Teilmatrizen)
  - Eliminiere tautologische Beweiszyklen
- **Vorwegnahme einfacher Beweisschritte**
  - Ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch Resolvente
  - Spalte eine Matrix in zwei “komplementäre” Teile

Mehrfach vorkommende Literale

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & \underset{\uparrow}{P^T} & & \end{bmatrix}$$

Zweites P^T ist redundant

– Pfade durch zweites P^T entsprechen denen durch das erste P^T

Mehrfach vorkommende Literale

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & \underset{\uparrow}{P^T} & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & & & \end{bmatrix}$$

Zweites P^T ist redundant

– Pfade durch zweites P^T entsprechen denen durch das erste P^T

– Zweites P^T kann gefahrlos entfernt werden

– Matrix wird um ein Literal kleiner

– Anzahl der Pfade durch Matrix verringert sich um ein Drittel

MULT-REDUKTION

Eliminiere mehrfache vorkommende Literale in Klauseln

$$\left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ P & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ P & \\ \vdots & \end{array}\right] \quad \vdash_{\mathsf{MULT}} \quad \left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ P & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ \vdots & \end{array}\right]$$

- **Matrix wird um ein Literal kleiner**
  - Beweissuche kann im Extremfall um Faktor 2 schneller werden
- **Gültigkeits- und modellerhaltende Reduktion**
  - Gültigkeit: Pfade durch beide Kopien des Literals sind identisch
  - Modellerhaltend: Entfernung des Literals entfernt Pfade aus Matrix
- **Statische Reduktion in der Aussagenlogik**
  - Anwendbarkeitstest quadratisch in Anzahl der Literale in der Matrix
  - Ausführung in konstanter Zeit
  - Prädikatenlogische Erweiterung möglich

(Folie ??)

Selbstkomplementäre Klauseln

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & \underset{\uparrow}{P^F} & & \end{bmatrix}$$

Zweite Klausel enthält P^T und P^F

– Wird ein Pfad durch P^T nur wegen P^T komplementär, dann ist der entsprechende Pfad durch P^F nicht komplementär und umgekehrt

Selbstkomplementäre Klauseln

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & \underset{\uparrow}{P^F} & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^T & R^T \\ P^F & R^F & \\ Q^F & & \end{bmatrix}$$

Zweite Klausel enthält P^T und P^F

– Wird ein Pfad durch P^T nur wegen P^T komplementär, dann ist der entsprechende Pfad durch P^F nicht komplementär und umgekehrt

– Klausel kann für Beweis keine Rolle spielen und entfernt werden

– Matrix wird um eine Klausel kleiner

– Anzahl der Pfade durch Matrix verringert sich um ein zwei Drittel

TAUT-REDUKTION

Eliminiere tautologische (selbstkomplementäre) Klauseln

$$\left[\begin{array}{cc} \vdots & \\ P^T & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ P^F & \\ \vdots & \end{array}\right] \quad \vdash_{\mathsf{TAUT}} \quad \left[\begin{array}{c} \mathcal{M} \end{array}\right]$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
  – Beweissuche kann im Extremfall um großen Faktor schneller werden
- **(Gültigkeits- und) modellerhaltende Reduktion**
  – Gültigkeit: Entfernung der Klausel verkürzt alle Pfade aus Matrix
  – Modellerhaltend: Komplementarität der Pfade durch $\mathcal{M}$ kann nicht von Klausel abhängen und impliziert Komplementarität der kürzeren Pfade
- **Statische Reduktion in der Aussagenlogik** (Prädikatenlogik Folie ??)
  – Anwendbarkeitstest quadratisch in Anzahl der Literale in der Matrix
  – Ausführung in konstanter Zeit

Konnektionen mit Einerklauseln

$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
 & P^T & Q^T & R^T \\
P^F & Q^F & R^F & \\
Q^F & & &
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{cccc} & & \uparrow & \end{array}
\end{array}$$

R^F ist komplementär zur Einerklausel R^T

– Pfade durch R^F sind garantiert komplementär

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & & \\ Q^F & & & \end{bmatrix}$$

$$\uparrow$$

R^F ist komplementär zur Einerklausel R^T

– Pfade durch R^F sind garantiert komplementär

– R^F kann gefahrlos entfernt werden

– Matrix wird um ein Literal kleiner

– Anzahl der Pfade durch Matrix verringert sich um die Hälfte

UNIT-REDUKTION

Eliminiere Literale, die komplementär zu Einerklauseln sind

$$\left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ P^T & P^F & \mathcal{M} \\ \vdots & & \end{array}\right] \quad \vdash_{\mathsf{UNIT}} \quad \left[\begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \vdots & P^F & \mathcal{M} \end{array}\right]$$

- **Matrix wird um ein Literal kleiner**
  - Beweissuche kann im Extremfall um Faktor 2 schneller werden
- **Gültigkeits- und modellerhaltende Reduktion**
  - Gültigkeit: Pfade durch P^T in Originalmatrix sind komplementär. Alle anderen Pfade der Originalmatrix sind identisch mit den Pfaden durch die reduzierte Matrix
  - Modellerhaltend: Entfernung des Literals entfernt Pfade aus Matrix
- **Statische Reduktion in der Aussagenlogik** (Prädikatenlogik Folie ??)
  - Anwendbarkeitstest linear in Anzahl der Klauseln und Konnektionen
  - Ausführung in konstanter Zeit

Unkonnektierte Literale

$$\left[\begin{array}{cccc} & P^{T} & Q^{T} & R^{T} \\ P^{F} & Q^{F} & R^{F} & \\ Q^{F} & S^{F} & & \end{array}\right]$$

Zweite Klausel enthält Literal S^F ohne Konnektionen

– Wird ein Pfad durch S^F komplementär, dann liegt es nicht an S^F

Unkonnektierte Literale

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & \underset{\uparrow}{S^F} & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^T & R^T \\ P^F & R^F & \\ Q^F & & \end{bmatrix}$$

Zweite Klausel enthält Literal S^F ohne Konnektionen

– Wird ein Pfad durch S^F komplementär, dann liegt es nicht an S^F

– Klausel ist irrelevant für Beweis und kann entfernt werden

– Matrix wird um eine Klausel kleiner

– Anzahl der Pfade durch Matrix verringert sich um zwei Drittel

PURE-REDUKTION

Eliminiere Klauseln mit unkonnektierten Literalen

$$\left[\begin{array}{ll} L_1 & \\ \vdots & \\ L_k & \mathcal{M} \\ \vdots & \\ L_n & \end{array}\right] \quad \vdash_{\mathsf{PURE}} \quad \left[\ \mathcal{M}\ \right]$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
  – Beweissuche kann im Extremfall um großen Faktor schneller werden
- **Gültigkeits- und modellerhaltende Reduktion**
  – Gültigkeit: Entfernung der Klausel verkürzt alle Pfade aus Matrix
  – Modellerhaltend: Pfade durch Restmatrix sind “identisch” mit Pfaden durch das unkonnektierte Literal in der Originalmatrix
- **Statische Reduktion in der Aussagenlogik** (Prädikatenlogik Folie ??)
  – Anwendbarkeitstest linear in Anzahl der Literale und Konnektionen
  – Ausführung in konstanter Zeit

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & \underset{\uparrow}{S^F} & & \end{bmatrix}$$

Zweite Klausel ist Obermenge der ersten

– Sind alle Pfade komplementär, dann insbesondere auch die Pfade durch die doppelten Literale $P^F P^F$ und $Q^F Q^F$

Subsumierte Klauseln

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & \underset{\uparrow}{S^F} & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^T & R^T \\ P^F & R^F & \\ Q^F & & \end{bmatrix}$$

Zweite Klausel ist Obermenge der ersten

– Sind alle Pfade komplementär, dann insbesondere auch die Pfade durch die doppelten Literale $P^F P^F$ und $Q^F Q^F$

– Komplementarität bleibt erhalten, wenn Klausel 2 entfernt wird

– Matrix wird um eine Klausel kleiner

– Anzahl der Pfade durch Matrix verringert sich um ein Drittel

SUBS-Reduktion

Eliminiere Klauseln, die von anderen ‘subsumiert’ werden

$$\left[\begin{array}{ccc} P & P & \\ \vdots & \vdots & \\ Q & Q & \mathcal{M} \\ K & & \\ \vdots & & \\ L & & \end{array}\right] \quad \vdash_{\text{SUBS}} \quad \left[\begin{array}{cc} P & \\ \vdots & \\ Q & \mathcal{M} \\ & \\ & \\ & \end{array}\right]$$

- **Matrix wird um eine Klausel kleiner**
  - Beweissuche kann im Extremfall um großen Faktor schneller werden
- **(Gültigkeits- und) modellerhaltende Reduktion**
  - Gültigkeit: Entfernung der Klausel verkürzt alle Pfade aus Matrix
  - Modellerhaltend: Komplementarität der Pfade durch Restmatrix kann nicht von den Literalen $K...L$ abhängen
- **Statische Reduktion in der Aussagenlogik** (Prädikatenlogik Folie ??)
  - Anwendbarkeitstest quadratisch in Anzahl der Klauseln und Literale
  - Ausführung in konstanter Zeit

LINEARES BEWEISVERFAHREN FÜR HORNKLAUSELN

Jede gültige Horn-Matrix hat mindestens eine negative Einerklausel
(Jede gültige Matrix hat mindestens eine rein negative Klausel)

1. **Existiert keine negative Einerklausel, so ist F ungültig**
2. **Wähle eine rein negative Einerklausel $\{P^T\}$**
3. **Mit UNIT eliminiere jedes Vorkommen von P^F**
   Entsteht dadurch eine leere Klausel, so ist F gültig
4. **Mit SUBS eliminiere alle anderen Klauseln, die P^T enthalten**
5. **Mit PURE eliminiere die Einerklausel**
6. **Wenn noch Klauseln übrig sind, gehe zurück nach 1**

Beweis für $P \wedge Q \;\vee\; \neg P \wedge Q \wedge R \;\vee\; \neg Q \wedge R \;\vee\; \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^{T} & Q^{T} & R^{T} \\ P^{F} & Q^{F} & R^{F} & \\ Q^{F} & R^{F} & & \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\left[\begin{array}{cccc} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \uparrow \end{array}\right] \vdash_{\mathsf{UNIT}} \left[\begin{array}{cccc} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & & \\ Q^F & & & \end{array}\right]$$

Beweis für $P \wedge Q \ \vee \ \neg P \wedge Q \wedge R \ \vee \ \neg Q \wedge R \ \vee \ \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & & \\ Q^F & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ P^F & Q^F & \\ Q^F & & \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & & \\ Q^F & & & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ P^F & Q^F & \\ Q^F & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ P^F & Q^F & \\ Q^F & & \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ P^F & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \;\vee\; \neg P \wedge Q \wedge R \;\vee\; \neg Q \wedge R \;\vee\; \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & & \\ Q^F & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ P^F & Q^F & \\ Q^F & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ P^F & Q^F & \\ Q^F & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ P^F & & \\ & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\mathsf{PURE}} \begin{bmatrix} & P^T \\ P^F & \\ & \end{bmatrix}$$

Beweis für $P \wedge Q \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg Q \wedge R \vee \neg R$

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & R^F & & \\ & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\text{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & & \\ Q^F & & & \\ & & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\text{PURE}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ P^F & Q^F & \\ Q^F & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ P^F & Q^F & \\ Q^F & & \\ & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\text{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^T & Q^T \\ P^F & & \\ & & \\ & & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\text{PURE}} \begin{bmatrix} & P^T \\ P^F & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^T \\ P^F & \\ & \\ & \uparrow \end{bmatrix} \vdash_{\text{UNIT}} \begin{bmatrix} & P^T \\ \boxed{\square} & \\ & \\ \uparrow & \end{bmatrix}$$

Isolierte Konnektionen

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ \underset{\uparrow}{Q^F} & \underset{\uparrow}{S^T} & & \end{bmatrix}$$

Weder P^F noch P^T erscheinen im Rest der Matrix

– Alle Pfade durch P^F und P^T sind komplementär

– Wird ein Pfad durch Q^F und P^T komplementär, dann liegt es nicht an P^T

Wird ein Pfad durch P^F und Q^F/S^T komplementär, dann nicht wegen P^F

Isolierte Konnektionen

$$\left[\begin{array}{cccc} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F & S^T & & \\ \uparrow & \uparrow & & \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc} Q^F & Q^T & R^T \\ Q^F & R^F & \\ S^T & & \\ \uparrow & & \end{array}\right]$$

Weder P^F noch P^T erscheinen im Rest der Matrix

– Alle Pfade durch P^F und P^T sind komplementär

– Wird ein Pfad durch Q^F und P^T komplementär, dann liegt es nicht an P^T

Wird ein Pfad durch P^F und Q^F/S^T komplementär, dann nicht wegen P^F

– Ersetzen der Klauseln durch Resolvente erhält Komplementarität

– Matrix wird um zwei Literale kleiner und Pfade werden kürzer

– Anzahl der Pfade durch Matrix verringert sich um die Hälfte

– Resolvente kann durch MULT Reduktion weiter verkleinert werden

ISOL-Reduktion

Ersetze Elternklauseln einer isolierten Konnektion durch Resolvente

$$\begin{bmatrix} P^T & P^F & \\ K & K' & \mathcal{M} \\ \vdots & \vdots & \\ L & L' & \end{bmatrix} \quad \vdash_{\mathsf{ISOL}} \quad \begin{bmatrix} K & \\ \vdots & \\ L & \mathcal{M} \\ K' & \\ \vdots & \\ L' & \end{bmatrix}$$

(P^T und P^F kommen nicht in $\mathcal{M}$ vor)

- **Matrix wird um zwei Literale und eine Klausel kleiner**
  – Beweissuche kann im Extremfall um großen Faktor schneller werden
- **Gültigkeits- und modellerhaltende Reduktion**
  – Gültigkeit: Ist jeder Pfad durch eines der $K ... L'$ komplementär, dann gilt dies auch in der Originalmatrix. Die anderen Pfade gehen durch P^T, P^F.
  – Modellerhaltend: Pfade durch reduzierte Matrix sind identisch mit Pfaden durch P^F und eines der $K ... L$ oder durch P^T und eines der $K' ... L'$
- **Statische Reduktion in der Aussagenlogik** (Prädikatenlogik Folie ??)
  – Anwendbarkeitstest linear in Anzahl der Literale und Konnektionen
  – Ausführung linear in Anzahl der Literale (pro Klausel)

Gleiche Literale in verschiedenen Klauseln

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ Q^F_{\uparrow} & S^T_{\uparrow} & & \end{bmatrix}$$

Q^F erscheint in zwei verschieden Klauseln

– Wenn alle Pfade komplementär sind, dann auch diejenigen, die nur durch Q^F,Q^F gehen und diejenigen, die nicht durch Q^F gehen

– Die Umkehrung gilt ebenfalls

– “Mischpfade” (Q^F und ein anderes Literal) können entfernt werden

Gleiche Literale in verschiedenen Klauseln

$$\begin{bmatrix} & P^T & Q^T & R^T \\ P^F & Q^F & R^F & \\ \underset{\uparrow}{Q^F} & \underset{\uparrow}{S^T} & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^F & P^T \\ & S^T \end{bmatrix} & \begin{matrix} Q^T \\ R^F \end{matrix} & R^T \\ Q^F & & \end{bmatrix}$$

Q^F erscheint in zwei verschieden Klauseln

– Wenn alle Pfade komplementär sind, dann auch diejenigen, die nur durch Q^F,Q^F gehen und diejenigen, die nicht durch Q^F gehen

– Die Umkehrung gilt ebenfalls

– “Mischpfade” (Q^F und ein anderes Literal) können entfernt werden

– Effekt wird durch Ausfaktorisierung von Q^F erzielt

– Matrix wird um ein Literal kleiner aber hat Nicht-Normalform

– Anzahl der Pfade durch Matrix verringert sich um die Hälfte

FACTOR-REDUKTION

Faktorisiere gleiche Literale in verschiedenen Klauseln

$$\left[\begin{array}{ccc} K & K' & \\ \vdots & \vdots & \mathcal{M} \\ L & L' & \\ P & P & \end{array}\right] \quad \vdash_{\mathsf{FACTOR}} \quad \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} K & K' \\ \vdots & \vdots \\ L & L' \end{array}\right] & \mathcal{M} \\ P & \end{array}\right]$$

- **Matrix wird um viele Pfade kleiner**
  - Beweissuche kann im Extremfall um großen Faktor schneller werden
  - Faktorisierung erzeugt Nicht-Normalform-Matrizen
- **Gültigkeits- und modellerhaltende Reduktion**
  - Gültigkeit: Ist jeder Pfad durch P komplementär, dann gilt dies auch in der Originalmatrix. Die anderen Pfade gehen durch $K..L$ und $K'..L'$ und sind in beiden Matrizen identisch.
  - Modellerhaltend: Pfade durch Restmatrix ‘sind’ Pfade der Ausgangsmatrix
- **Statische Reduktion in der Aussagenlogik** (Prädikatenlogik sehr aufwendig)
  - Anwendbarkeitstest quadratisch in Anzahl der Literale und Klauseln
  - Ausführung linear in Anzahl der Literale pro Klausel

Faktorisierung einer vollständigen Matrix

$$\begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F & Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \\ R^T & R^T & R^T & R^T & R^F & R^F & R^F & R^F \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\text{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^T & P^F & P^T & P^F \\ Q^T & Q^T & Q^F & Q^F \end{bmatrix} \\ R^T & R^F \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\text{FACTOR}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [P^T \; P^F] & [P^T \; P^F] \\ Q^T & Q^F \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [P^T \; P^F] & [P^T \; P^F] \\ Q^T & Q^F \end{bmatrix} \\ R^T & R^F \end{bmatrix}$$

Anzahl der Pfade sinkt von 6561 (3^8) **auf 25** $((2^2{+}1) * (2^2{+}1))$

Lemmata

Verkürzung von Beweisen durch Strukturierung

- **Standardtechnik der Mathematik**
  - Generische Hilfsbehauptung wird separat beweisen und dann angewandt
  - Entspricht Anwendung der Schnittregel in Sequenzenbeweisen
  - (Theoretisch) superexponentielle Verkürzung der Beweislänge möglich
- $\boldsymbol{(P \vee Q \;\vee\; \neg P \wedge \neg Q) \wedge R \;\vee\; (S \vee T \vee \neg S \wedge \neg T) \wedge \neg R}$
  - Aussage $P \vee Q \;\vee\; \neg P \wedge \neg Q$ erscheint in 2 Varianten
  - Lemma wäre $\forall P, Q.\; P \vee Q \;\vee\; \neg P \wedge \neg Q$ (höhere Ordnung)
  - First-Order Realisierung: Ausfaktorisieren der gemeinsamen Teilformel:
    $(P \vee Q \;\vee\; \neg P \wedge \neg Q) \;\wedge\; (R \vee \neg R)$
- **Problem: Identifikation relevanter Lemmata**
  - Automatisches Erkennen gleichartiger Teilformeln
  - Ohne Benutzerführung bisher nicht zufriedenstellend gelöst

Prawitz - Matrixreduktionsverfahren

$$\left[\begin{array}{ccc} & K_1 & L_1 \\ \mathcal{M} & \vdots & \vdots \\ & K_m & L_n \\ & P^T & P^F \end{array}\right]$$

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ und eine Menge von Konnektionen

Prawitz - Matrixreduktionsverfahren

$$\begin{bmatrix} & \boldsymbol{K_1} & \boldsymbol{L_1} \\ \mathcal{M} & \vdots & \vdots \\ & \boldsymbol{K_m} & \boldsymbol{L_n} \\ & \boldsymbol{P^T} & \boldsymbol{P^F} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & \boldsymbol{K_1} & \\ \mathcal{M} & \vdots & \\ & \boldsymbol{K_m} & \\ & & \boldsymbol{P^F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \boldsymbol{L_1} \\ \mathcal{M} & & \vdots \\ & & \boldsymbol{L_n} \\ & \boldsymbol{P^T} & \end{bmatrix}$$

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ und eine Menge von Konnektionen

Regel: Wähle Klausel mit einem Literal P^T und eine zweite mit P^F

Untersuche in separaten Teilmatrizen:

– Pfade, die dieses Auftreten von P^T aber nicht von P^F enthalten

– Pfade, die dieses Auftreten von P^F aber nicht von P^T enthalten

Prawitz - Matrixreduktionsverfahren

$$\begin{bmatrix} & K_1 & L_1 \\ \mathcal{M} & \vdots & \vdots \\ & K_m & L_n \\ & P^T & P^F \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & K_1 & \\ \mathcal{M} & \vdots & \\ & K_m & \\ & & P^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & L_1 \\ \mathcal{M} & & \vdots \\ & & L_n \\ & P^T & \end{bmatrix}$$

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ und eine Menge von Konnektionen

Regel: Wähle Klausel mit einem Literal P^T und eine zweite mit P^F

Untersuche in separaten Teilmatrizen:

– Pfade, die dieses Auftreten von P^T aber nicht von P^F enthalten

– Pfade, die dieses Auftreten von P^F aber nicht von P^T enthalten

Ziel: Alle Teilmatrizen enthalten eine leere Klausel

PRAWITZ - MATRIXREDUKTIONSVERFAHREN

$$\left[\begin{array}{ccc} & K_1 & L_1 \\ \mathcal{M} & \vdots & \vdots \\ & K_m & L_n \\ & P^T & P^F \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc} & K_1 & \\ \mathcal{M} & \vdots & \\ & K_m & \\ & & P^F \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} & & L_1 \\ \mathcal{M} & & \vdots \\ & & L_n \\ & P^T & \end{array}\right]$$

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ und eine Menge von Konnektionen

Regel: Wähle Klausel mit einem Literal P^T und eine zweite mit P^F
Untersuche in separaten Teilmatrizen:
– Pfade, die dieses Auftreten von P^T aber nicht von P^F enthalten
– Pfade, die dieses Auftreten von P^F aber nicht von P^T enthalten

Ziel: Alle Teilmatrizen enthalten eine leere Klausel

Rechtfertigung: Die Ursprungsmatrix ist komplementär, wenn alle obengenannten Pfade (also beide Teilmatrizen) komplementär sind. Klauseln in den reduzierten Matrizen sind kleiner als zuvor, also terminiert das Verfahren bei gültigen Matrizen immer. Das Verfahren ist vollständig, aber ohne Einsatz von Reduktionen nicht effizienter als komplette Pfadsuche.

Prawitzverfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

Prawitzverfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & P^F & & \\ P^T & Q^T & R^T & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

Prawitzverfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & P^F & & \\ P^T & Q^T & R^T & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & Q^F & \\ P^T & & & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

Prawitzverfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & P^F & & \\ P^T & Q^T & R^T & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & Q^F & \\ P^T & & & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & & & \\ Q^T & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & P^F & & R^F \\ P^T & Q^T & \boxed{\square} & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}$$

Prawitzverfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & P^F & & & \\ P^T & Q^T & R^T & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & Q^F & \\ P^T & & & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & & & \\ Q^T & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & P^F & & R^F \\ P^T & Q^T & \boxed{\square} & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & P^F & & R^F \\ & & \boxed{\square} & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}$$

Prawitzverfahren am Beispiel

$$
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}
\mapsto
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & P^F & & \\ P^T & Q^T & R^T & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & & Q^F & \\ P^T & & & \boxed{\square} \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}
\mapsto
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & & & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & P^F & & R^F \\ P^T & Q^T & \boxed{\square} & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & & & \\ & & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & P^F & & R^F \\ & & \boxed{\square} & \\ Q^T & & & \end{bmatrix}
\mapsto
\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ \boxed{\square} & & & \\ & & & \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} & \boxed{\square} & Q^F & R^F \\ P^T & & & \\ & & & \end{bmatrix}
$$

Erweiterbar auf Nicht-Normalform und komplementäre Teilmatrizen

Davis–Putnam Verfahren

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ und eine Menge von Konnektionen

Regeln: **Spaltung**: Wähle komplementäres Literalpaar $\{P^T, P^F\}$.

Ersetze eine Klauselmenge durch zwei reduzierte Klauselmengen

1. Klauseln, die P^T nicht enthalten, reduziert um P^F
2. Klauseln, die P^F nicht enthalten, reduziert um P^T

Reduktion: Entferne tautologische Klauseln (TAUT)

Entferne Klauseln mit nichtkonnektierten Literalen (PURE)

Entferne subsumierte Klauseln (SUBS)

Entferne Literale mit Komplementen in Einerklauseln (UNIT)

Ziel: Alle Teilmatrizen enthalten eine leere Klausel

Davis–Putnam Verfahren

Gegeben: Matrix $\{c_1, \ldots, c_n\}$ und eine Menge von Konnektionen

Regeln: **Spaltung**: Wähle komplementäres Literalpaar $\{P^T, P^F\}$.

Ersetze eine Klauselmenge durch zwei reduzierte Klauselmengen

1. Klauseln, die P^T nicht enthalten, reduziert um P^F
2. Klauseln, die P^F nicht enthalten, reduziert um P^T

Reduktion: Entferne tautologische Klauseln (TAUT)

Entferne Klauseln mit nichtkonnektierten Literalen (PURE)

Entferne subsumierte Klauseln (SUBS)

Entferne Literale mit Komplementen in Einerklauseln (UNIT)

Ziel: Alle Teilmatrizen enthalten eine leere Klausel

Rechtfertigung: Die Spaltungsregel kann als Kombination der Prawitzschen Matrixreduktion mit FACTOR und PURE verstanden werden.

Davis–Putnam Verfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

Davis–Putnam Verfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\text{SPLIT(P)}} \quad \begin{bmatrix} P^F & Q^F & R^F \\ Q^T & R^T & \\ R^T & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ P^T & R^T & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

Davis–Putnam Verfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

$\vdash$ SPLIT(P)

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & R^F \\ Q^T & R^T & \\ R^T & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ P^T & R^T & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

$\vdash$ UNIT(R^F)

$$\begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ Q^T & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Davis–Putnam Verfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\mathsf{SPLIT(P)}} \quad \begin{bmatrix} P^F & Q^F & R^F \\ Q^T & R^T & \\ R^T & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ P^T & R^T & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

$$\vdash_{\mathsf{UNIT}(R^F)} \quad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ Q^T & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ & & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

Davis–Putnam Verfahren am Beispiel

$$\begin{bmatrix} & P^F & Q^F & R^F \\ P^T & Q^T & R^T & \\ Q^T & R^T & & \end{bmatrix}$$

$\vdash$ SPLIT(P)

$$\begin{bmatrix} P^F & Q^F & R^F \\ Q^T & R^T & \\ R^T & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ P^T & R^T & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

$\vdash$ UNIT(R^F)

$$\begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ Q^T & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ & & \\ Q^T & & \end{bmatrix}$$

$\vdash$ UNIT(Q^F)

$$\begin{bmatrix} & Q^F & R^F \\ \boxed{\square} & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Davis–Putnam Verfahren am Beispiel

$$
\begin{bmatrix}
 & P^F & Q^F & R^F \\
P^T & Q^T & R^T & \\
Q^T & R^T & &
\end{bmatrix}
$$

$$
\vdash_{\mathsf{SPLIT(P)}}
\begin{bmatrix}
P^F & Q^F & R^F \\
Q^T & R^T & \\
R^T & &
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
 & Q^F & R^F \\
P^T & R^T & \\
Q^T & &
\end{bmatrix}
$$

$$
\vdash_{\mathsf{UNIT}(R^F)}
\begin{bmatrix}
 & Q^F & R^F \\
Q^T & & \\
 & &
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
 & Q^F & R^F \\
 & & \\
Q^T & &
\end{bmatrix}
$$

$$
\vdash_{\mathsf{UNIT}(Q^F)}
\begin{bmatrix}
 & Q^F & R^F \\
\boxed{\square} & & \\
 & &
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
 & Q^F & R^F \\
\boxed{\square} & & \\
 & &
\end{bmatrix}
$$

Schnellstes Verfahren für Aussagenlogik – nicht erweiterbar

Prädikatenlogische Reduktionen

- **Erweiterung der aussagenlogischen Reduktion**
  – Betrachtung von Redundanzen modulo einer Substitution
  – Betrachtete Literale müssen unifizierbar (statt “gleich”) sein
- **Dynamische Ausführung erforderlich**
  – Aktuelle Substitution muß berücksichtigt werden
  – Statische Vorverarbeitung nur möglich wenn mgu sehr unspezifisch
- **Reduktion oft nur gültigkeitserhaltend**
  – Unifikation bei Reduktion führt zu “überspezifizierter” Restmatrix
  – Gültige Formeln können unbeweisbar werden
  Nicht wirklich problematisch, da Beweissuche in der Praxis ohnehin unvollständig
  – Einsatz der Reduktion muß strategisch geplant werden

Beispiele prädikatenlogischer Reduktionen

- **Prädikatenlogische MULT Reduktion**
  - Identifiziere mehrfach vorkommende Literale
  - Literale müssen unifizierbar unter σ sein

$$\left[\begin{matrix} \vdots & \\ Pcx^T & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ Pyc^T & \\ \vdots & \end{matrix}\right]_{[\,]} \qquad \vdash_{\mathsf{MULT}} \qquad \left[\begin{matrix} \vdots & \\ Pcc^T & \\ \vdots & \mathcal{M} \\ \vdots & \end{matrix}\right]_{[c/x,\,c/y]}$$

  - MULT erzeugt eventuell weitere Alternativen im Beweis (Rücksetzung!)
  - Nur noch gültigkeitserhaltend (wähle $\mathcal{M} = \{\{Pcd^F, Pdc^F\}\}$)

- **Erweiterung für andere Reduktionen ähnlich**
  - TAUT, UNIT, SUBS, ISOL analog zu MULT
  - PURE: erweitere “unkonnektiert” zu “nicht unifizierbar”
  - FACTOR: Erweiterung sehr aufwendig

- **Nicht jede Reduktion ist sinnvoll**
  - MULT-Reduktion des Axioms $(x{=}y \wedge y{=}z) \Rightarrow x{=}z$ wäre unsinnig

Reduktionen im Rückblick

- **Aussagenlogische Reduktionen sind sehr wirksam**

  MULT: eliminiere mehrfache Vorkommen von Literalen in Klauseln

  TAUT: eliminiere tautologische Klauseln

  UNIT: eliminiere Literale, die komplementär zu Einerklauseln sind

  PURE: eliminiere Klauseln mit unkonnektierten Literalen

  SUBS: eliminiere Klauseln, die von anderen subsumiert werden

  ISOL: ersetze Elternklauseln isolierter Konnektionen durch Resolventen

  FACTOR: faktorisiere gleiche Literale in verschiedenen Klauseln aus

  LEMMA: faktorisiere gleichartige Teilmatrizen aus

  Statischer Einsatz im Preprocessing schnell, effektiv und modellerhaltend

- **Integration prädikatenlogischer Reduktionen schwierig**

  – Reduktionen (global) unterbrechen den lokalen Beweissuchprozess

  – Die meisten Reduktionen kosten mehr Zeit als sie einbringen

  – Nicht jede mögliche Reduktion ist auch sinnvoll

  – Vollständigkeit der Beweisprozedur kann verloren gehen

  Effizienter dynamischer Einsatz strategisch schwer zu steuern