Inferenzmethoden

Einheit 6

Das Extensionsverfahren für Nicht-Normalform-Matrizen

1. Anpassung der Grundkonzepte
2. Verfahren für Nicht-Normalform-Matrizen
3. Pfadexploration auf Formelbäumen

Deduktion ohne Normalformbildung

- **Normalform-Matrizen sind sehr einfach strukturiert**
  - Matrix $\equiv$ Menge von Klauseln in α-Beziehung
  - Klausel $\equiv$ Menge von Literalen in β-Beziehung
  - Im Formelbaum müssten alle α-Knoten vor den β-Knoten erscheinen
  - Nur wenige Formeln können direkt in Normalform repräsentiert werden
- **Normalformtransformationen sind “unnatürlich”**
  - Exponentielle Aufblähung der Formel möglich $\mapsto$ Effizienzprobleme
  - Originalformel selten rekonstruierbar $\mapsto$ Unverständliche Beweise
  - In nichtklassischen Logiken ist Normalisierung kaum möglich
- **Erweitere Extensionsverfahren auf Formelbäume**
  - Verwende allgemeine Konzepte anstelle der vereinfachten Klauselform
  - Matrizen sind komplexer (Mengen von Matrizen kleinerer Tiefe)
  - Pfadbegriff ist feiner (Menge von Literalen in α-Beziehung)
  - Aufwendigere Pfadüberprüfung – sonst keine grundsätzliche Änderung

- **Erweiterung von Konzepten in der Aussagenlogik**

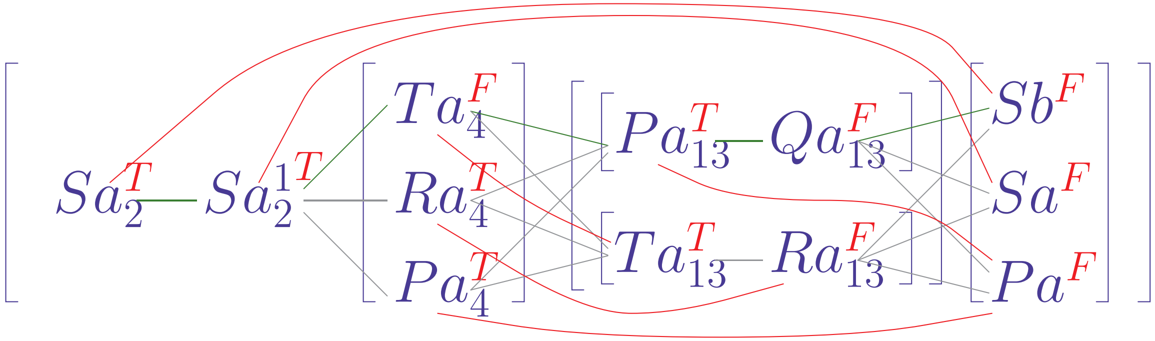
$$\left[\begin{array}{cccc} & \left[\begin{array}{cc} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & \boxed{R^T} \end{array}\right] & R^F & S^F \\ \boxed{P^T} & & & \\ Q^T & S^T & & \end{array}\right]$$

  – Welche Literale gehören zum aktuellen Pfad?
  – Was ist die “aktuelle Klausel”?
  – Extension: Welcher Teil der Matrix kann noch konnektiert werden?
  – Bereinigung: Wann ist eine “Klausel” abgeschlossen

- **Keine zusätzlichen Änderungen für Prädikatenlogik**

$$\left[\begin{array}{ccccc} \boxed{Sa_2^T} & Sa_2^{1\,T} & \left[\begin{array}{c} Ta_4^F \\ Ra_4^T \\ Pa_4^T \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} Pa_{13}^T & Qa_{13}^F \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc} \boxed{Ta_{13}^T} & \boxed{Ra_{13}^F} \end{array}\right] \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} Sb^F \\ Sa^F \\ \boxed{Pa^F} \end{array}\right] \end{array}\right] \quad [b/a_2, a/a_2^1, a/a_{13}, a/a_4]$$

GRUNDKONZEPTE DES MATRIXKALKÜLS WIEDERHOLT



- **α/β-Beziehung zwischen Literalen**
  - $\boldsymbol{u{\sim_\alpha}v}$: $u{\neq}v$ und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ α
  - $\boldsymbol{u{\sim_\beta}v}$: $u{\neq}v$ und größter gemeinsamer Vorfahr im Formelbaum hat Typ β
  - $\boldsymbol{u_\alpha} = \{v \mid v{\sim_\alpha}u\}$, $\boldsymbol{u_\beta} = \{v \mid v{\sim_\beta}u\}$ und für $u{\neq}v$ gilt $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u_\alpha} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} \notin \boldsymbol{u_\beta}$
- **Matrix (der Tiefe n)**
  - Literal oder Menge von Matrizen der maximalen Tiefe n-1
  - Submatrizen stehen in α- bzw. β-Beziehung (gerade/ungerade Tiefe)
  - Präsentation: α-Beziehungen neben-, β-Beziehungen übereinander
- **Pfad:** (Maximale) Menge von Literalen in gegenseitiger α-Beziehung
  - Implementierung verwendet induktive Definition auf Formelbaum
- **σ-komplementäre Konnektion**
  - Paar $\{X_1{}^T, X_2{}^F\}$ von Literalen, deren Terme unter σ gleich sind

Allgemeines Extensionsverfahren: Grundkonzepte

$$\begin{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ \boxed{P^T} & & & \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix}$$

- **Aktueller (aktiver) Pfad $\mathcal{P}$**
  - Nichtkomplementäre Menge von Literalen in gegenseitiger α-Beziehung

    Im Beispiel $\mathcal{P} = \{P^F, Q^T\}$
- **Offene Teilmatrix $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$** $\hat{=}$ ungenutzter Teil der Matrix
  - Menge von Literalen, die zum aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ in α-Beziehung stehen

    Im Beispiel $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{Q^F, R^T, R^F, S^F\}$
- $\boldsymbol{L_\beta(\mathcal{P}) = \{v \in L_\beta \mid v \sim_\alpha \mathcal{P}\}}$ Klausel von L (bzgl. $\mathcal{P}$)
  - Literale, die zum aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ in α- und zu L in β-Beziehung stehen

    Im Beispiel $Q^F{}_\beta(\mathcal{P})=\{R^T\}$ $R^T{}_\beta(\mathcal{P})=\{Q^F\}$, $R^F{}_\beta(\mathcal{P})=\{\}$,…

Allgemeines Extensionsverfahren: Grundkonzepte

$$\begin{bmatrix} \boxed{P^T} & \begin{bmatrix} P^F & Q^F \\ \boxed{Q^T} & R^T \end{bmatrix} & R^F & S^F \\ Q^T & S^T & & \end{bmatrix}$$

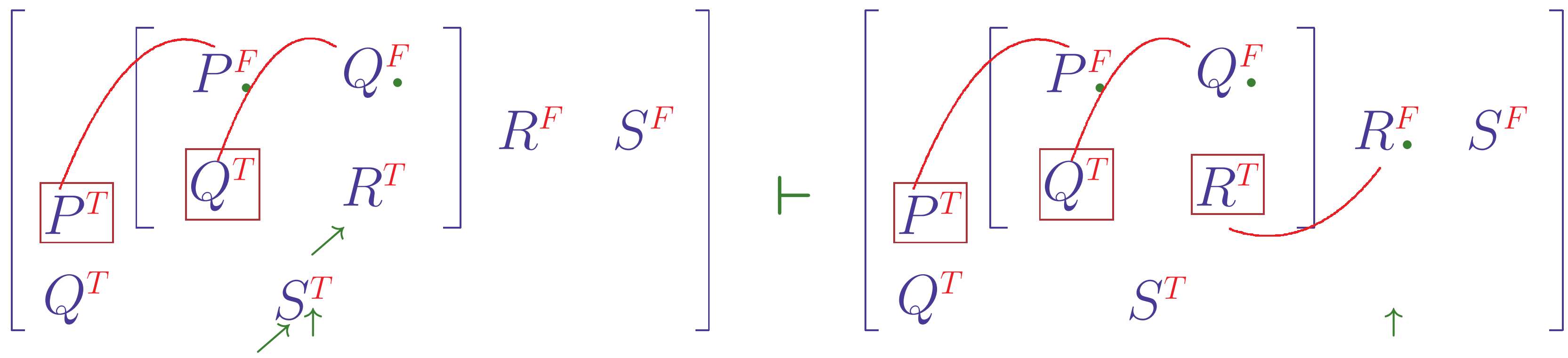
- **Aktuelles Teilziel $\mathcal{G}$** (zu $\mathcal{P}$) $\hat{=}$ abgeschlossene Literale der aktuellen Klausel
  - Menge von Literalen der offenen Teilmatrix in gegenseitiger β-Beziehung

    Im Beispiel $\mathcal{G} = \{Q^F\}$ (Definition erlaubt mehr, aber Q^F ist mit Q^T konnektiert)
- **Aktives Ziel $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$** $\hat{=}$ Indikator für aktuellen Stand der Beweissuche
  - Nichtkomplementärer aktueller Pfad $\mathcal{P}$ und passendes aktuelles Teilziel $\mathcal{G}$

    Im Beispiel $(\mathcal{P}, \mathcal{C}) = (\{P^F, Q^T\}, \{Q^F\})$
- **Offenes Ziel $\mathcal{C}$ (zu $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$)** $\hat{=}$ offene Literale der aktuellen Klausel
  - Literale der offenen Teilmatrix, die zu $\mathcal{G}$ in β-Beziehung stehen
  - Eindeutig durch $\mathcal{M}$ und aktives Ziel bestimmt: $\mathcal{C} = \{v \mid v{\sim}_\alpha \mathcal{P} \wedge v{\sim}_\beta \mathcal{G}\}$

    Im Beispiel $\mathcal{C} = \{R^T\}$

Reformulierung des Extensionsschritts



$\uparrow$ markiert **aktuelle "Klausel"**

$\nearrow$ markiert Literale des offenen Ziels $\mathcal{C}$

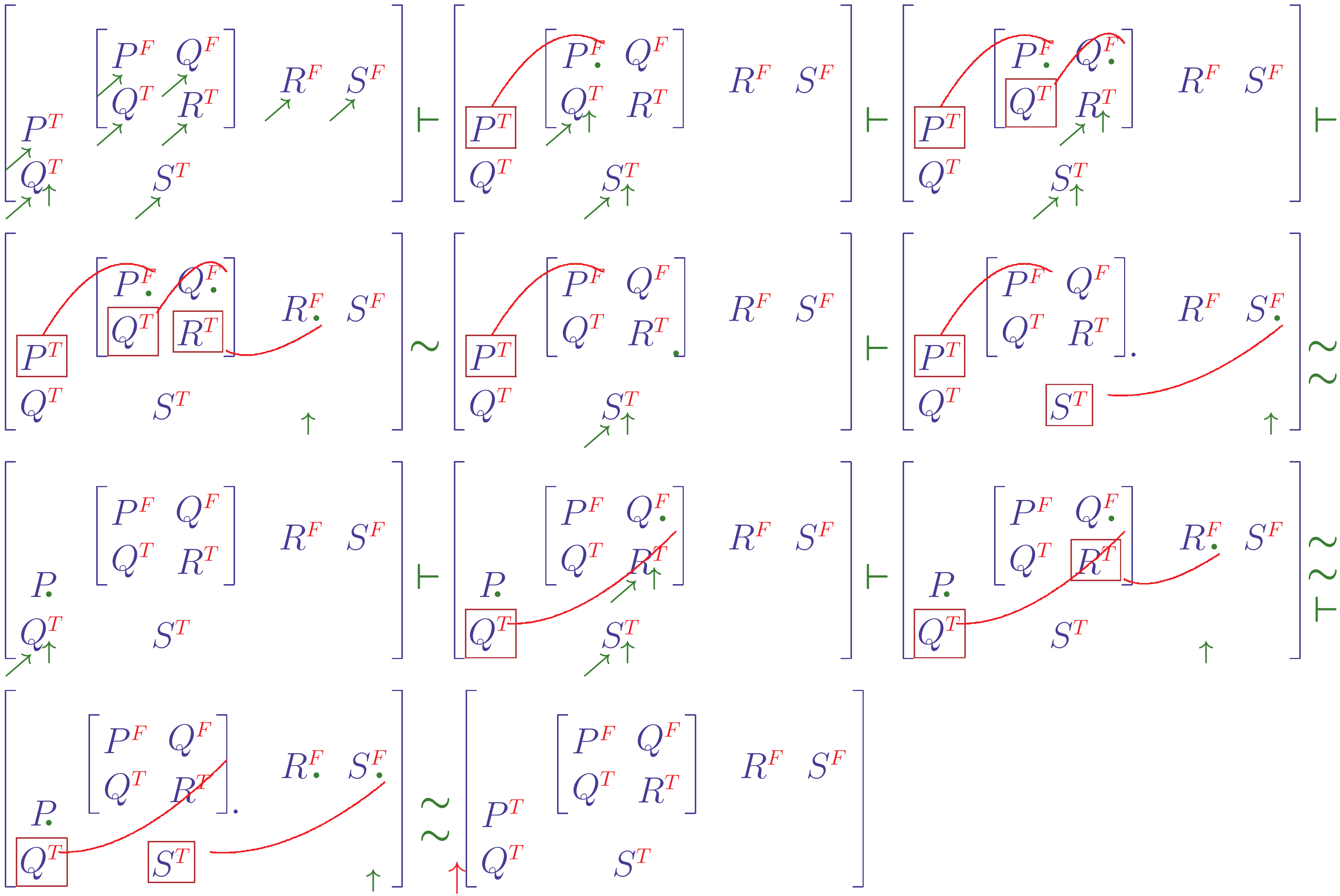
$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades $\mathcal{P}$**

. markiert abgeschlossene Teilpfade

---

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ offenen Ziels $\mathcal{C}$ — markiert mit $\nearrow$
2. Erweitere den aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ um L — markiere mit Box $\boxed{L}$
3. Wähle ein mit L konnektiertes Literal $\bar{L}$ der offenen Teilmatrix
   Vermerke Alternativen in Alternativenmenge
4. Wähle Teilmenge $\mathcal{G}$ der Literale der Klausel von $\bar{L}$, die mit dem aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ konnektiert sind, und eine Substitution ρ, welche die mit σ modifizierten Konnektionen komplementär macht — markiere mit .
   – Erweitere σ mit ρ; vermerke alternative Teilmengen / Substitutionen
   – Breche den Extensionsschritt ab, falls es keine solche Teilmenge gibt

Extensionsbeweis auf Nicht-Normalform Matrizen

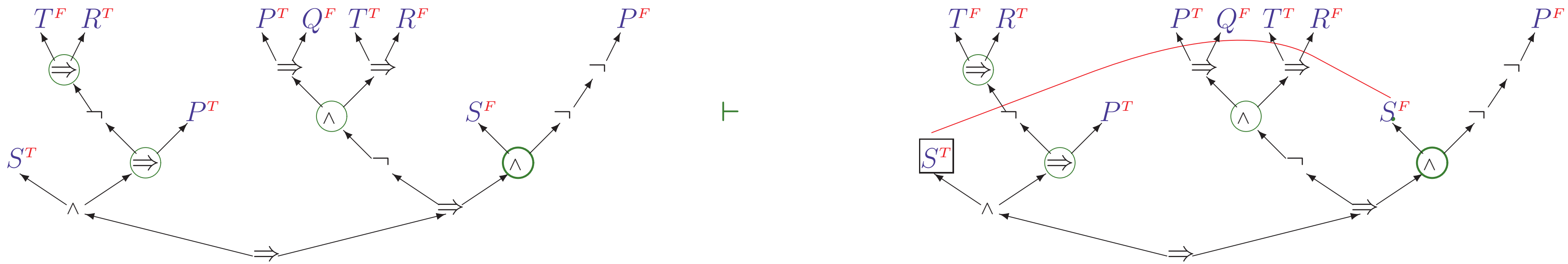


Formulierung des Verfahrens auf Formelbäumen

- **2-D Matrizen sind nur eine Illustration**
  - Die Markierungen $\uparrow$, $\nearrow$ $\boxed{L}$, $\bullet$ sind nur optische Hilfsmittel
  - Implementiertes Verfahren verarbeitet Verwaltungsvariablen für offene Ziele, offene Teilmatrix, aktuelle Pfade, Konnektionen, etc
- **Beschreibe Schritte mit Formelbaumkonzepten**
  - Erlaubt Herleitung einer (nichtoptimierten) Referenzimplementierung direkt aus dem Charakterisierungstheorem
  - Beweis der Korrektheit und Vollständigkeit der Implementierung wird erheblich erleichtert
  - Methodik auch jenseits von Prädikatenlogik erster Stufe anwendbar

Details in Fachaufsätzen auf der Veranstaltungswebseite

Extensionsschritt auf Formelbäumen



$\mathcal{P} = \{\}$

$\mathcal{G} = \{\}$

$\mathcal{C} = \{S^T, T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

$L = S^T$, $\boldsymbol{\mathcal{P} = \{S^T\}}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{P}} = \{T^F, R^T, P_1^T, P_2^T, Q^F, T^T, R^F, S^F, P^F\}$

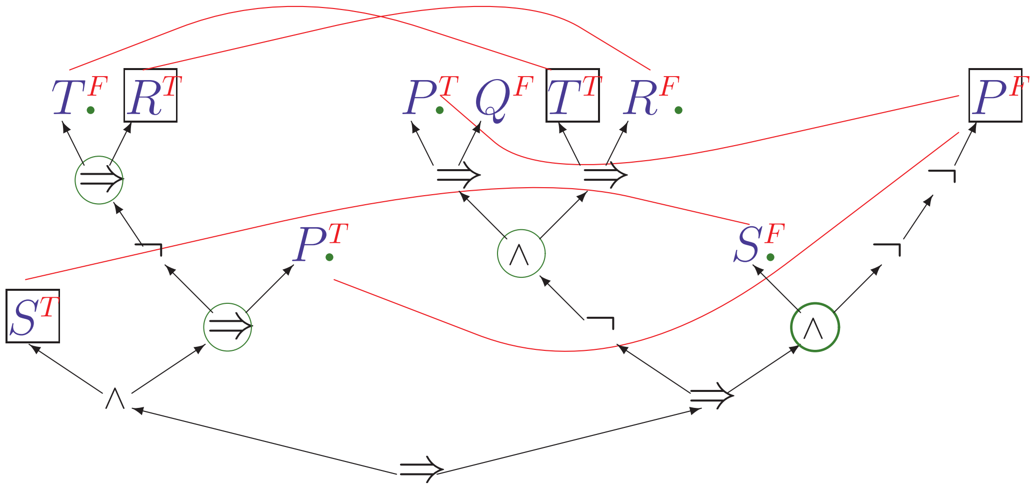
$\bar{L} = S^F$, $\bar{L}_\beta(\mathcal{P}) = \{P^F\}$, $\mathcal{G} = \{S^F\}$

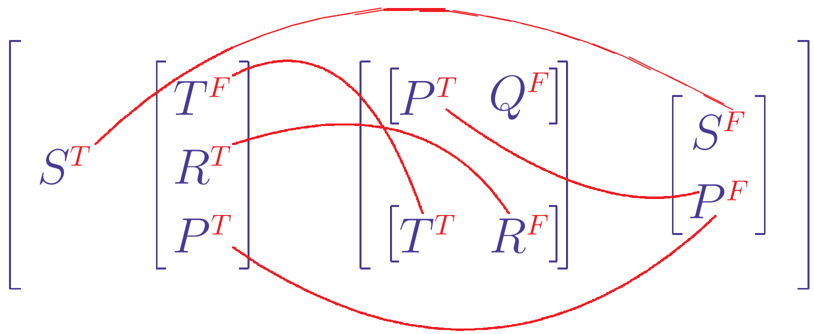
$\boldsymbol{\mathcal{C} = \{P^F\}}$

---

1. Wähle ein Literal L des zu $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ offenen Ziels $\mathcal{C}$
2. Erweitere den aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ um L
3. Wähle ein mit L konnektiertes Literal $\bar{L}$ der offenen Teilmatrix
   Vermerke Alternativen in Alternativenmenge
4. Wähle Teilmenge $\mathcal{G}$ von $\{\bar{L}\} \cup \bar{L}_\beta(\mathcal{P})$, die mit dem aktuellen Pfad $\mathcal{P}$ konnektiert sind, und eine Substitution ρ, welche die mit σ modifizierten Konnektionen komplementär macht
   – Erweitere σ mit ρ und vermerke alternative Teilmengen und Substitutionen
   – Breche den Extensionsschritt ab, falls es keine solche Teilmenge gibt

Extensionsbeweis auf Formelbäumen am Beispiel





Start	$\mathcal{P}=\{\}$, $\mathcal{G}=\{\}$, $\mathcal{C}=\{S^T,T^F,R^T,P_1^T,P_2^T,Q^F,T^T,R^F,S^F,P^F\}$
Erster Schritt	$L=S^T$, $\mathcal{P}=\{S^T\}$, $\mathcal{M}_\mathcal{P}=\{T^F,R^T,P_1^T,P_2^T,Q^F,T^T,R^F,S^F,P^F\}$ $\bar{L}=S^F$, $\bar{L}_\beta(\mathcal{P})=\{P^F\}$, $\mathcal{G}=\{S^F\}$, $\mathcal{C}=\{P^F\}$
Zweiter Schritt	$L=P^F$, $\mathcal{P}=\{S^T,P^F\}$, $\mathcal{M}_\mathcal{P}=\{T^F,R^T,P_1^T,P_2^T,Q^F,T^T,R^F\}$ $\bar{L}=P_2^T$, $\bar{L}_\beta(\mathcal{P})=\{T^T,R^F\}$, $\mathcal{G}=\{P_2^T\}$, $\mathcal{C}=\{T^T,R^F\}$
Dritter Schritt	$L=T^T$, $\mathcal{P}=\{S^T,P^F,T^T\}$, $\mathcal{M}_\mathcal{P}=\{T^F,R^T,P_1^T,R^F\}$ $\bar{L}=T^F$, $\bar{L}_\beta(\mathcal{P})=\{R^T,P^T\}$, $\mathcal{G}=\{T^F,P^T\}$, $\mathcal{C}=\{R^T\}$
Vierter Schritt	$L=R^T$, $\mathcal{P}=\{S^T,P^F,T^T,R^T\}$, $\mathcal{M}_\mathcal{P}=\{R^F\}$ $\bar{L}=R^F$, $\bar{L}_\beta(\mathcal{P})=\{\}$, $\mathcal{G}=\{R^F\}$, $\mathcal{C}=\{\}$

Herleitung eines Beweisverfahrens (I)

- **Definiere Beweisbarkeit von $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ ($\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$)**
  - $\mathcal{M}$ Matrix, $\mathcal{P}$ aktueller Pfad, $\mathcal{C}$ offenes Ziel
  - $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ ist beweisbar, wenn alle Pfade durch $\mathcal{M}$, die $\mathcal{P} \cup \{L\}$ für ein Literal $L \in \mathcal{C}$ erweitern, unter einer Substitution σ komplementär sind
- **Satz: Eine Formel F ist gültig, g.d.w $\vdash \mathcal{M}_F, \mathcal{M}_F, \{\}$**

  ... für eine Multiplizität μ und eine zulässige Substitution σ

  Dabei ist $\mathcal{M}_F$ die Matrix der Formel F

Beweis:
- $\mathcal{M}_F, \mathcal{M}_F, \{\}$ ist genau dann beweisbar, wenn jeder Pfad durch $\mathcal{M}_F$ und ein beliebiges Literal L aus $\mathcal{M}_F$ komplementär ist also, wenn jeder Pfad durch $\mathcal{M}_F$ komplementär ist
- Aufgrund des Charakterisierungstheorems für klassische Logik ist $\mathcal{M}_F, \mathcal{M}_F, \{\}$ also genau dann wenn beweisbar, wenn F gültig ist.

Herleitung eines Beweisverfahrens (II)

Satz: $\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{P}$ **ist genau dann beweisbar, wenn**

(1) $\mathcal{C} = \{\}$ **, oder**

(2) Es gibt eine komplementäre Konnektion $\{L,\bar{L}\}$ **mit** $L\in\mathcal{C}$

und (a) $\bar{L}\in\mathcal{P}$ **und** $\mathcal{C}\cap L_\beta,\mathcal{M},\mathcal{P}$ **ist beweisbar**

oder (b) $\bar{L}\sim_\alpha\mathcal{P}\cup\{L\} = \mathcal{P}'$ **und** $\bar{L}_\beta(\mathcal{P}'),\mathcal{M}_{\mathcal{P}'},\mathcal{P}'$

sowie $\mathcal{C}\cap L_\beta,\mathcal{M},\mathcal{P}$ **sind beweisbar**

Beweis $\Rightarrow$: Sei $\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{P}$ beweisbar und $\mathcal{C}\neq\{\}$

– Da $\mathcal{P}$ nicht komplementär, $\mathcal{C}$ offenes Ziel und jeder Pfad durch $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ und $\mathcal{C}$ komplementär ist, gibt es eine komplementäre Konnektion $\{L,\bar{L}\}$ mit $L\in\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}\cap L_\beta,\mathcal{M},\mathcal{P}$ ist beweisbar.

– Wenn $\bar{L}\notin\mathcal{P}$ dann muß $\bar{L}\sim_\alpha\mathcal{P}\cup\{L\} = \mathcal{P}'$ gelten.

– Sei $\mathcal{P}''$ Erweiterung von $\mathcal{P}'\cup\{u\}$ für ein $u\in\bar{L}_\beta(\mathcal{P}')$

– Da $\mathcal{C},\mathcal{M},\mathcal{P}$ beweisbar ist und $L\in\mathcal{C}$, muß $\mathcal{P}''$ komplementär sein.

– Also ist $\bar{L}_\beta(\mathcal{P}'),\mathcal{M}_{\mathcal{P}'},\mathcal{P}'$ beweisbar.

Herleitung eines Beweisverfahrens (III)

$\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ g.d.w. (1) $\mathcal{C} = \{\}$ oder (2) Es gibt eine komplementäre Konnektion $\{L, \bar{L}\}$ mit $L \in \mathcal{C}$ und (a) $\bar{L} \in \mathcal{P}$ und $\vdash \mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$

oder (b) $\bar{L} \sim_\alpha \mathcal{P} \cup \{L\} = \mathcal{P}'$ und $\vdash \bar{L}_\beta(\mathcal{P}'), \mathcal{M}_{\mathcal{P}'}, \mathcal{P}'$ sowie $\vdash \mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$

Beweis $\Leftarrow$: Ist $\mathcal{C} = \{\}$, dann ist $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ trivialerweise beweisbar.

– Ansonsten sei $L \in \mathcal{C}$, $\{L, \bar{L}\}$ komplementäre Konnektion, $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{L\}$, $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ beweisbar, $v \in \mathcal{C}$ und $\mathcal{P}''$ eine Erweiterung von $P \cup \{v\}$.

– Ist $L \notin \mathcal{P}''$, dann gibt es ein $u \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{C}$ mit $u \not\sim_\alpha L$*, also $u \in L_\beta$.
Da $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ beweisbar ist, muß $\mathcal{P}''$ komplementär sein.

– Ist $L \in \mathcal{P}''$ und $\bar{L} \in \mathcal{P}$, dann ist $\mathcal{P}''$ offensichtlich komplementär.

– Ist $L \in \mathcal{P}''$ und $\bar{L} \notin \mathcal{P}$, dann gibt es ein $u \in \mathcal{P}''$ mit $u \not\sim_\alpha \bar{L}$, also $u \in \bar{L}_\beta$.
Für dieses u gilt $u \sim_\alpha \mathcal{P}'$, also $u \in \bar{L}_\beta(\mathcal{P}')$. Außerdem gilt $\bar{L} \sim_\alpha \mathcal{P}'$ per Konstruktion. Da $\bar{L}_\beta(\mathcal{P}'), \mathcal{M}_{\mathcal{P}'}, \mathcal{P}'$ beweisbar ist, ist $\mathcal{P}''$ komplementär

Damit sind alle Bedingungen für die Beweisbarkeit von $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ erfüllt.

---

* Ansonsten wäre $L \sim_\alpha u$ für alle $u \in \mathcal{P}'' \cap \mathcal{C}$ und wegen $L \in \mathcal{C}$ auch für alle anderen $u \in \mathcal{P}''$. Da $\mathcal{P}''$ maximal bzgl $.\sim_\alpha$ ist, müßte dann aber $L \in \mathcal{P}''$ gelten.
u ist nicht unbedingt identisch zu v, da aus $v \in \mathcal{C}$ und $L \in \mathcal{C}$ nicht $v \sim_\beta L$ folgt.

Konnektionskalkül für allgemeine Matrizen

- **Grundkonzepte müssen geringfügig erweitert werden**
  - Regeln verwalten Objekte der Form $\boldsymbol{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma}$
  - Aktuelle Klausel, Restmatrix, aktueller Pfad sind allgemeiner als zuvor
  - Substitution σ wird lokal bestimmt und an Unterziele weitergereicht

    In Unterzielen erzeugte Substitutionen werden zurückgereicht
- **Regeln haben nun eine theoretische Rechtfertigung**
  - Sätze über Beweisbarkeit von $\boldsymbol{\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}}$ gelten auch für Normalformen
  - Die Multiplizität kann auch dynamisch bestimmt werden, denn

    $\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}_{\mathcal{P}}, \mathcal{P}$ gilt genau dann, wenn $\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$

    $\Rightarrow$: alle Pfade durch $\mathcal{P}$, Literale aus $\mathcal{C}$ und $\mathcal{M}$ sind auch Pfade durch $\mathcal{P}$, Literale aus $\mathcal{C}$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$

    $\Leftarrow$: sind alle Pfade durch $\mathcal{P}$, Literale aus $\mathcal{C}$ und $\mathcal{M}$ komplementär, dann auch die Pfade, die dabei durch $\mathcal{P}$, Literale aus $\mathcal{C}$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ gehen

Regeln des Konnektionskalküls

- **Startregel**
  - Um $\mathcal{M}$ zu beweisen wähle Startziel $\mathcal{C}{=}\mathcal{M}$, setze $\mathcal{P} = \{\}$, $\sigma = [\,]$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vdash \mathcal{M} & \text{ret } \sigma \\ \qquad \vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, [\,] & \text{ret } \sigma \end{array}} \quad \texttt{Start}$$

  - Endgültige Substitution σ wird beim Beweis des Unterziels bestimmt
  - Korrektheit und Vollständigkeit folgt aus Herleitung auf Folie 11

- **Bereinigung: Abschluß des aktuellen Pfades**
  - $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ ist beweisbar, wenn $\mathcal{C}$ leer ist (Herleitung auf Folie 12)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \vdash \{\}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma & \text{ret } \sigma \end{array}} \quad \texttt{Axiom}$$

  - Regel schließt einen Ast im Konnektionskalkülbeweis
  - Die bisherige (Eingabe-)substitution σ wird Rückgabewert der Regel

Regeln des Konnektionskalküls II

- **Extension: Verlängerung des aktuellen Pfades**
  - $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ ist beweisbar, wenn es $L \in \mathcal{C}$ und $L' \sim_\alpha \mathcal{P} \cup \{L\}$ gibt, sodaß $\{L, L'\}$ komplementäre Konnektion und $L'_\beta(\mathcal{P} \cup \{L\}), \mathcal{M}, \mathcal{P} \cup \{L\}$ sowie $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ beweisbar sind (Herleitung auf Folien 12 / 14)

$$
\begin{array}{ll}
\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma & \text{ret } \sigma_2 \\
\quad \vdash L'_\beta(\mathcal{P} \cup \{L\}), \mathcal{M}, \mathcal{P} \cup \{L\}, \sigma\rho & \text{ret } \sigma_1 \\
\quad \vdash \mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma_1 & \text{ret } \sigma_2 \\
\quad \vdash L \in \mathcal{C} & \\
\quad \vdash L' \sim_\alpha \mathcal{P} \cup \{L\} & \\
\quad \vdash \sigma\rho(L') = \sigma\rho(\overline{L}) &
\end{array}
$$

`Extension` L, L', ρ

  - Bisherige Substitution σ kann um eine Substitution ρ erweitert werden
  - Rückgabesubstitution des ersten Unterziels wird weitergereicht
  - Die Rückgabesubstitution des zweiten Unterziels wird zurückgegeben
  - Da $\mathcal{M}$ unverändert bleibt, sind dynamische Kopien möglich

Formale Details nicht trivial

Regeln des Konnektionskalküls III

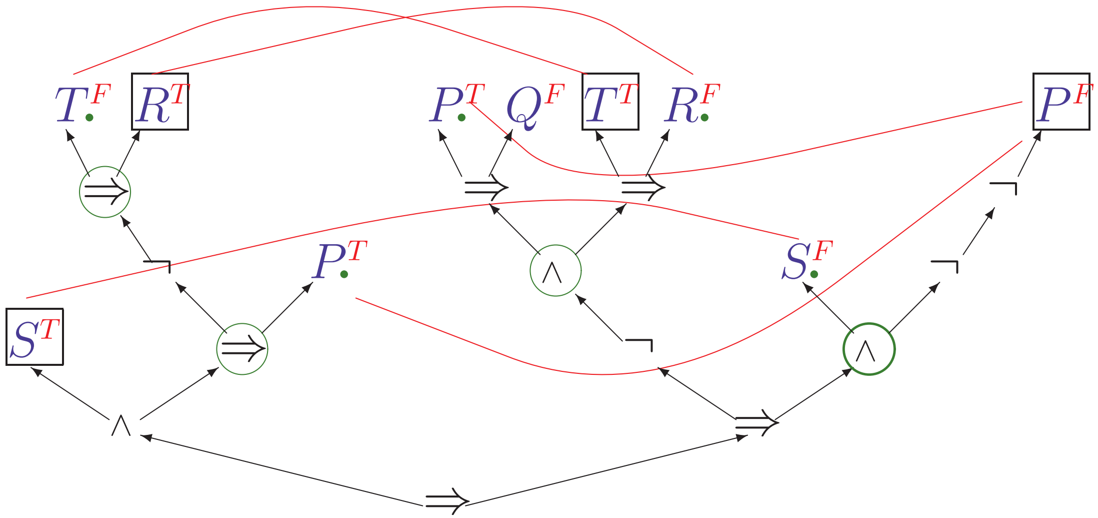
- **Reduktion: eliminiere konnektierte Literale**
  - $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ ist beweisbar, wenn es $L \in \mathcal{C}$ und $L' \in \mathcal{P}$ gibt, sodaß $\{L, L'\}$ komplementär und $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ beweisbar ist (Herleitung Folie 12)

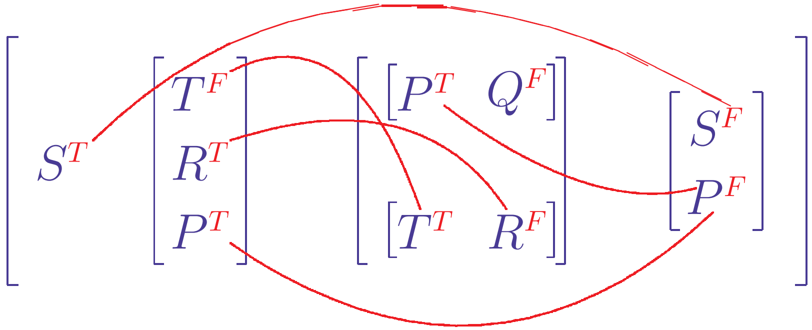
$$\boxed{\begin{array}{ll} \vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma & \text{ret } \sigma_1 \\ \quad \vdash \mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma\rho & \text{ret } \sigma_1 \\ \quad \vdash L \in \mathcal{C} & \\ \quad \vdash L' \in \mathcal{P} & \\ \quad \vdash \sigma\rho(L') = \sigma\rho(\overline{L}) & \end{array}} \quad \texttt{Reduction} \ L, L', \rho$$

  - Bisherige Substitution σ kann um eine Substitution ρ erweitert werden
  - Rückgabesubstitution des Unterziels wird zurückgegeben

- **Beweissuche im allgemeinen Konnektionskalkül**
  - `Axiom`, `Extension` und `Reduction` sind vollständig (Folie 12)
  - Suchprozeduren würden `Axiom` und `Reduction` vor `Extension` wählen
    Parameter für `Reduction` sind automatisch, für `Extension` heuristisch, aber konnektionsgetrieben, zu bestimmen
  - Substitutionen werden lokal konstruiert und als Ergebnis zurückgegeben

Extensionsbeweis im Konnektionskalkül

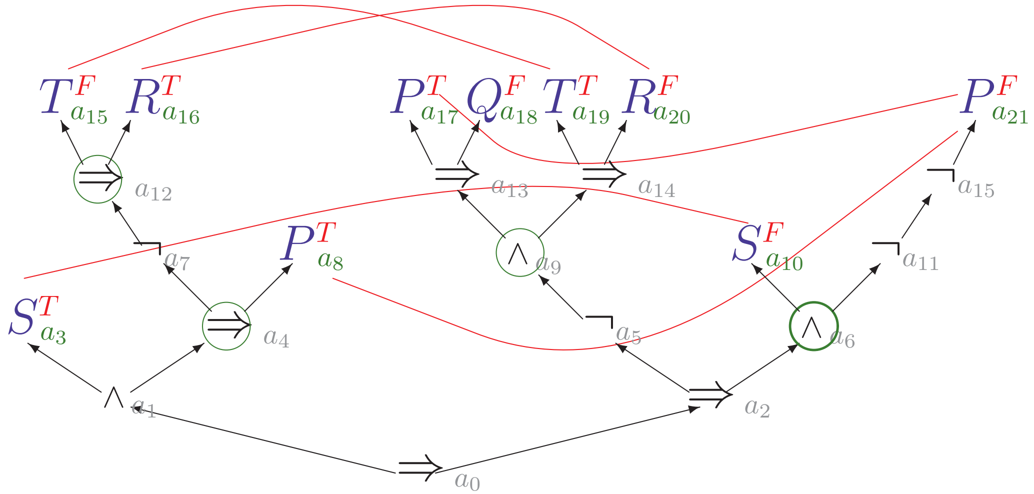


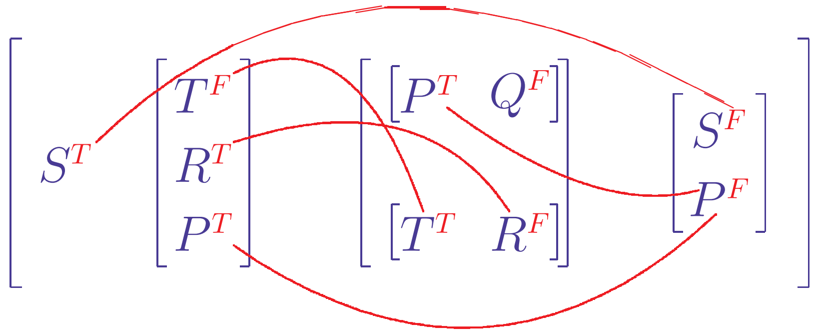


$\vdash\ \mathcal{M}$	BY Start
1. $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,]$	BY Extension $S^T, S^F, [\,]$
1.1. $\vdash\ \{P^F\},\ \mathcal{M},\ \{S^T\},\ [\,]$	BY Extension $P^F, P^T, [\,]$
1.1.1. $\vdash\ \{T^T, R^F\},\ \mathcal{M},\ \{S^T, P^F\},\ [\,]$	BY Extension $T^T, T^F, [\,]$
1.1.1.1. $\vdash\ \{R^T, P^T\},\ \mathcal{M},\ \{S^T, P^F, T^T\},\ [\,]$	BY Reduction $P^T, P^F, [\,]$
1.1.1.1.1. $\vdash\ \{R^T\},\ \mathcal{M},\ \{S^T, P^F, T^T\},\ [\,]$	BY Extension $R^T, R^F, [\,]$
1.1.1.1.1.1. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{S^T, P^F, T^T, R^T\},\ [\,]$	BY Axiom
1.1.1.1.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{S^T, P^F, T^T\},\ [\,]$	BY Axiom
1.1.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{S^T, P^F\},\ [\,]$	BY Axiom
1.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{S^T\},\ [\,]$	BY Axiom
1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,]$	BY Axiom

Extensionsbeweis im Konnektionskalkül

Regeln operieren in Wirklichkeit auf atomaren Positionen
Die Verwendung von Labels dient nur der Veranschaulichung





$\vdash\ \mathcal{M}$	BY Start
1. $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,]$	BY Extension $a_3, a_{10}, [\,]$
1.1. $\vdash\ \{a_{21}\},\ \mathcal{M},\ \{a_3\},\ [\,]$	BY Extension $a_{21}, a_{17}, [\,]$
1.1.1. $\vdash\ \{a_{19}, a_{20}\},\ \mathcal{M},\ \{a_3, a_{21}\},\ [\,]$	BY Extension $a_{19}, a_{15}, [\,]$
1.1.1.1. $\vdash\ \{a_{16}, a_8\},\ \mathcal{M},\ \{a_3, a_{21}, a_{19}\},\ [\,]$	BY Reduction $a_8, a_{21}, [\,]$
1.1.1.1.1. $\vdash\ \{a_{16}\},\ \mathcal{M},\ \{a_3, a_{21}, a_{19}\},\ [\,]$	BY Extension $a_{16}, a_{20}, [\,]$
1.1.1.1.1.1. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{a_3, a_{21}, a_{19}, a_{16}\},\ [\,]$	BY Axiom
1.1.1.1.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{a_3, a_{21}, a_{19}\},\ [\,]$	BY Axiom
1.1.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{a_3, a_{21}\},\ [\,]$	BY Axiom
1.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{a_3\},\ [\,]$	BY Axiom
1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,]$	BY Axiom

Extensionsbeweis mit Substitutionen

$$\left[\; Sa_2^{T} \quad Sa_2^{1T} \quad \begin{bmatrix} Ta_4^{F} \\ Ra_4^{T} \\ Pa_4^{T} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Pa_{13}^{T} & Qa_{13}^{F} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Ta_{13}^{T} & Ra_{13}^{F} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Sb^{F} \\ Sa^{F} \\ Pa^{F} \end{bmatrix} \;\right]$$

$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
1 $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, [\,]$	BY Ext $Sa_2^{T}, Sb^{F}, [b/a_2]$	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
11 $\vdash \{Sa^{F}, Pa^{F}\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^{T}\}, [b/a_2]$	BY Ext $Sa^{F}, Sa_2'^{T}, [a/a_2']$	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
111 $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^{T}, Sa^{F}\}, [b/a_2, a/a_2']$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a_2']$
112 $\vdash \{Pa^{F}\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^{T}\}, [b/a_2, a/a_2']$	BY Ext $Pa^{F}, Pa_{13}^{T}, [a/a_{13}]$	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
1121 $\vdash \{Ta_{13}^{T}, Ra_{13}^{F}\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^{T}, Pa^{F}\}, [b/a_2, a/a_2', a/a_{13}]$	BY Ext $Ta_{13}^{T}, Ta_4^{F}, [a_{13}/a_4]$	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
11211 $\vdash \{Ra_4^{T}, Pa_4^{T}\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^{T}, Pa^{F}, Ta_{13}^{T}\}, [b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$	BY Red $Pa_4^{T}, Pa^{F}, [\,]$	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
112111 $\vdash \{Ra_4^{T}\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^{T}, Pa^{F}, Ta_{13}^{T}\}, [b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$	BY Ext $Ra_4^{T}, Ra_{13}^{F}, [\,]$	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
1121111 $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^{T}, Pa^{F}, Ta_{13}^{T}, Ra_4^{T}\}, [b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
1121112 $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^{T}, Pa^{F}, Ta_{13}^{T}\}, [b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
11212 $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{S^{T}, P^{F}\}, [b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
1122 $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{Sa_2^{T}\}, [b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$
12 $\vdash \{\}, \mathcal{M}, \{\}, [b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$	BY Axiom	$[b/a_2, a/a_2', a/a_{13}, a/a_4]$

Beweissuche im Formelbaum – Beurteilung

- **Grundlage verifizierbarer Referenzimplementierungen**
  - Implementierung hergeleitbar aus theoretischen Erkenntnissen
  - Korrektheit & Vollständigkeit ist bewiesen
- **Wichtig für Beweisführung in nichtklassischer Logik**
  - Gültigkeit in vielen Logiken nur mit Formelbäumen beschreibbar
  - Erweiterung von Normalformverfahren oft zu aufwendig
- **Wichtig für Rekonstruktion lesbarer Beweise**
  - Tableaux- oder Sequenzenbeweis ohne weitere Suche extrahierbar
  - Es gibt Verfahren zur Umwandlung von Sequenzenbeweisen in Text
- **Normalform-Verfahren sind oft schneller**
  - Einzelschritte auf Basis von Klauseln effizenter zu implementieren
  - Bei geeigneten Normalformtransformationen wird Aufblähung der Formel oft durch die höhere Geschwindigkeit kompensiert

... aber gelegentlich ist Beweissuche im Formelbaum deutlich besser