Inferenzmethoden

Einheit 13

Modallogiken

1. Syntax und Semantik
2. Modales Extensionsverfahren
3. Modale Präfixunifikation

Modallogiken

- **Erweiterung der Prädikatenlogik um ‘Modalitäten’**
  - Modellierung von Schlußfolgerungen, die im Alltag verwendet werden
    - Formel F ist beweisbar
    - Ich bin sicher oder glaube, daß F gilt
    - Möglicherweise ist F gültig (oder wird es einmal)

Modallogiken

- **Erweiterung der Prädikatenlogik um ‘Modalitäten’**
  – Modellierung von Schlußfolgerungen, die im Alltag verwendet werden
    · Formel F ist beweisbar
    · Ich bin sicher oder glaube, daß F gilt
    · Möglicherweise ist F gültig (oder wird es einmal)
- **Syntax: Prädikatenlogik + Modaloperatoren $\Box$, $\Diamond$**
  – $\Box$, $\Diamond$ sind Meta-Operatoren, die Aussagen über Formeln treffen
  – Lesart: $\Box F$: “notwendigerweise F” $\Diamond F$: “möglicherweise F”

Semantik abhängig von vorgesehener Anwendung
  – Je nachdem, ob $\Box$ als “beweisbar”, “wissen”, “glauben” verstanden wird
  – $(\forall x\, \Box P x) \Rightarrow \Box(\exists x\; P x)$ ist nicht für jede Interpretation gültig

Modallogiken

- **Erweiterung der Prädikatenlogik um ‘Modalitäten’**
  - Modellierung von Schlußfolgerungen, die im Alltag verwendet werden
    - Formel F ist beweisbar
    - Ich bin sicher oder glaube, daß F gilt
    - Möglicherweise ist F gültig (oder wird es einmal)
- **Syntax: Prädikatenlogik + Modaloperatoren $\Box$, $\Diamond$**
  - $\Box$, $\Diamond$ sind Meta-Operatoren, die Aussagen über Formeln treffen
  - Lesart: $\Box F$: “notwendigerweise F” $\Diamond F$: “möglicherweise F”

  Semantik abhängig von vorgesehener Anwendung
  - Je nachdem, ob $\Box$ als “beweisbar”, “wissen”, “glauben” verstanden wird
  - $(\forall x\, \Box Px) \;\Rightarrow\; \Box(\exists x\; Px)$ ist nicht für jede Interpretation gültig
- **Beweisverfahren:**
  - (Erweiterte) Sequenzenkalküle
  - Konnektionsbeweiser + Transformation der Formeln in Prädikatenlogik
  - Modifizierter Konnektionsbeweiser mit Präfixen für Modaloperatoren

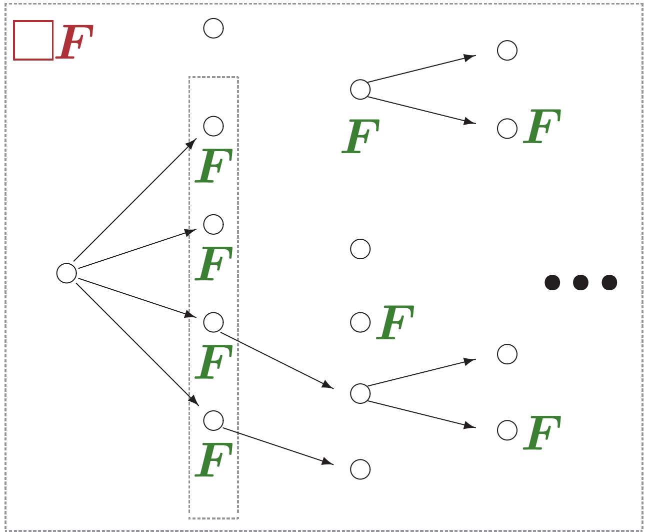
Semantik von Modallogiken

- **Interpretation von Formeln abhängig von Welten**
  - In der Prädikatenlogik wird eine unveränderliche Welt modelliert
  - Modaloperatoren interpretieren relativ zu denkbaren Welten
    - · mögliche zukünftige Entwicklung
    - · mögliche vergangene Ereignisse
    - · mögliche Wissens- oder Glaubenszustände
    - · mathematische Theorien der Beweisbarkeit
- **Kripke Semantik über Weltmodelle $(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{U}, u)$**
  - $\mathcal{W}$: Menge der (denkbaren) Welten
  - R: Erreichbarkeitsrelation zwischen Welten aus $\mathcal{W}$
  - U: Universum aller Objekte aller Welten
  - $u{:}\mathcal{W}{\rightarrow}\mathcal{P}(U)$: $u(w) \hat{=}$ die in Welt w existierenden Objekte

    $u(w)$ kann konstant, variabel, oder kumulativ bezüglich R sein

Eigenschaften von R bestimmen Bedeutung der Modaloperatoren

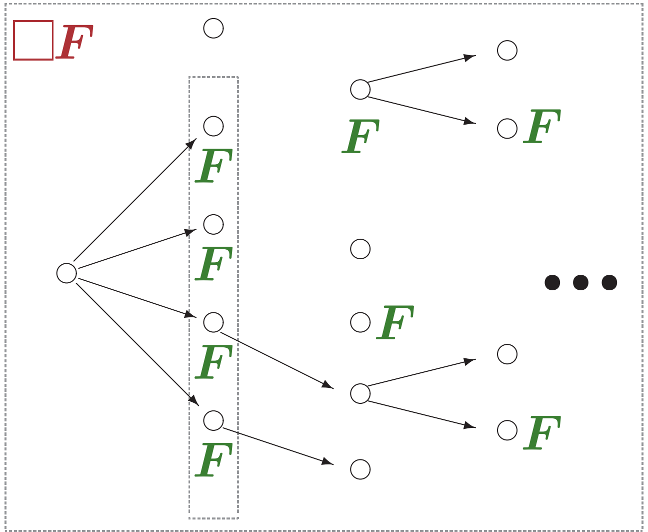
Betrachte von aktueller Welt erreichbare Welten

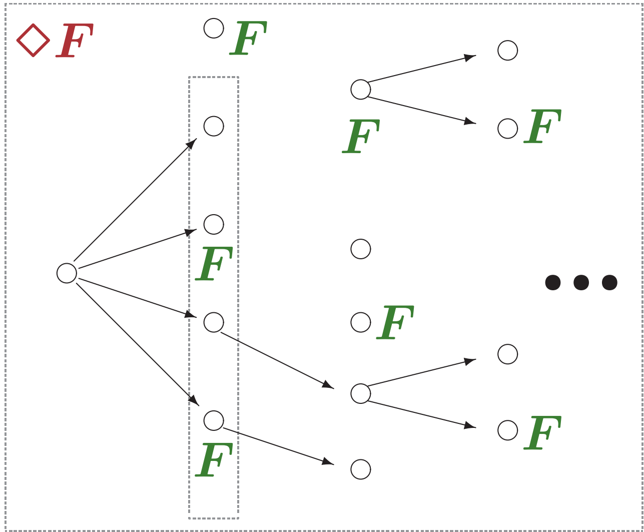


- $\Box F$ **ist wahr, wenn** F **in allen erreichbaren Welten wahr ist**

Kripke-Semantik von Modaloperatoren

Betrachte von aktueller Welt erreichbare Welten

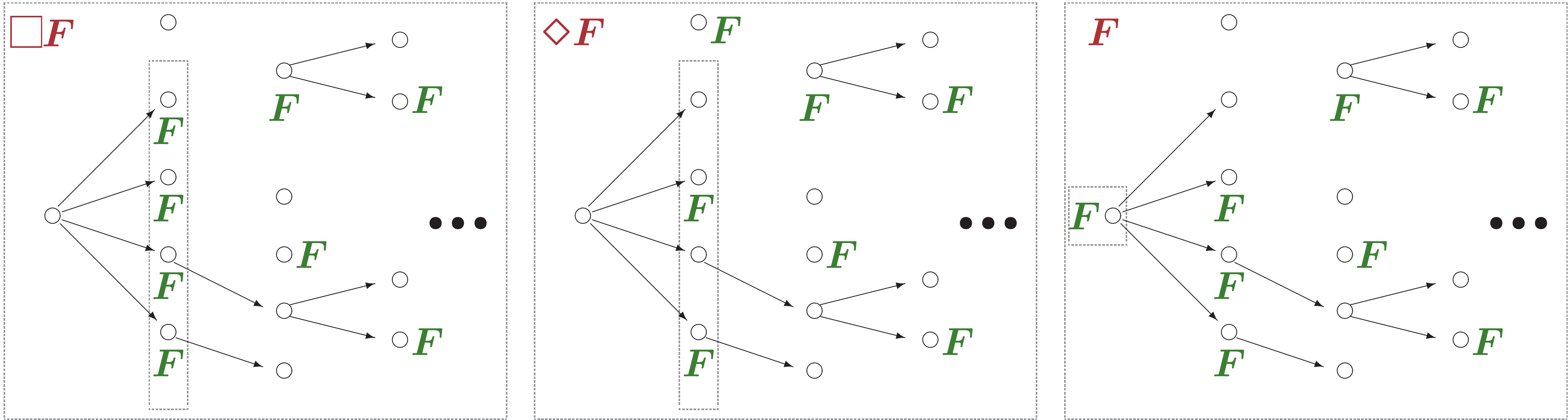




- $\Box F$ ist wahr, wenn F in allen erreichbaren Welten wahr ist
- $\Diamond F$ ist wahr, wenn F in mindestens einer erreichbaren Welt wahr ist

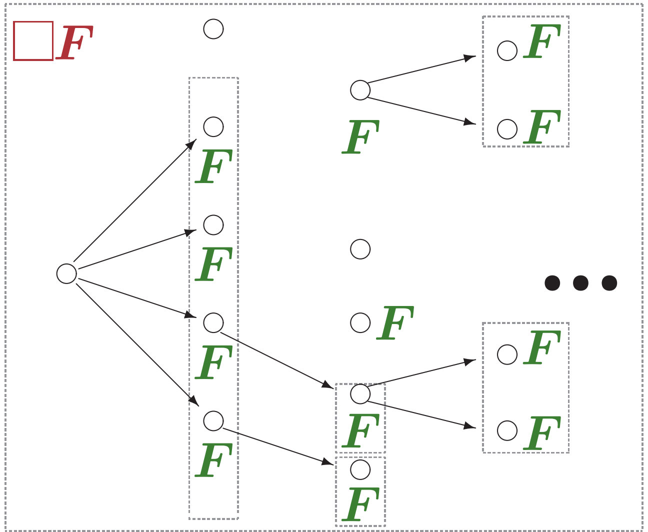
Kripke-Semantik von Modaloperatoren

Betrachte von aktueller Welt erreichbare Welten



- $\Box F$ ist wahr, wenn F in allen erreichbaren Welten wahr ist
- $\Diamond F$ ist wahr, wenn F in mindestens einer erreichbaren Welt wahr ist
- F ist wahr, wenn F in der aktuellen Welt wahr ist

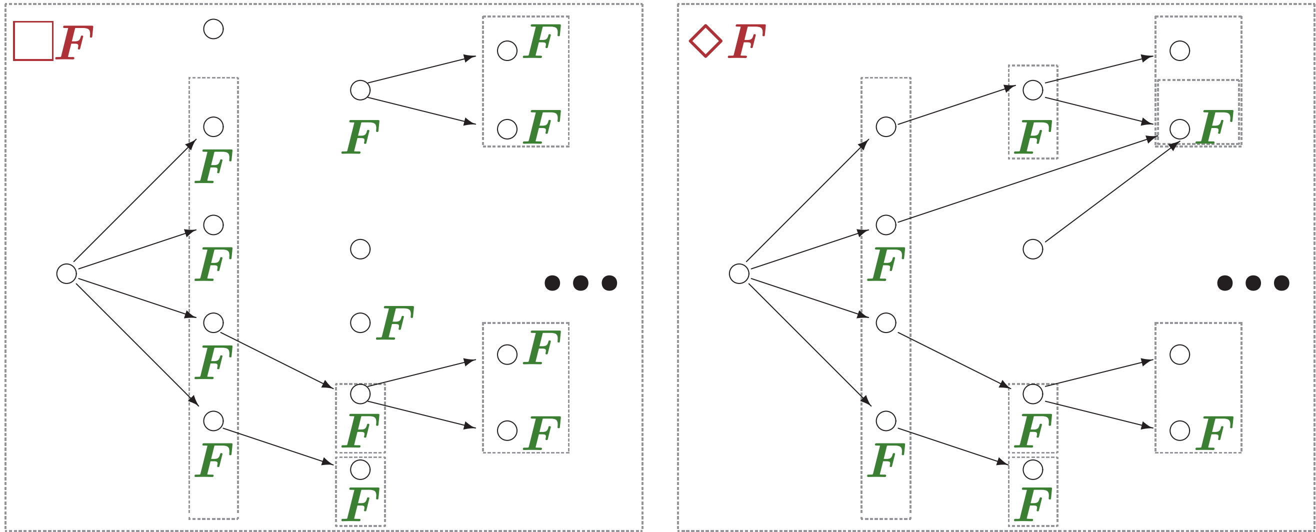
Betrachte Wahrheit von allen Welten aus



- **$\Box F$ ist gültig**
  wenn F in allen Welten wahr ist, die von irgendeiner Welt erreichbar sind

Modallogische Gültigkeit

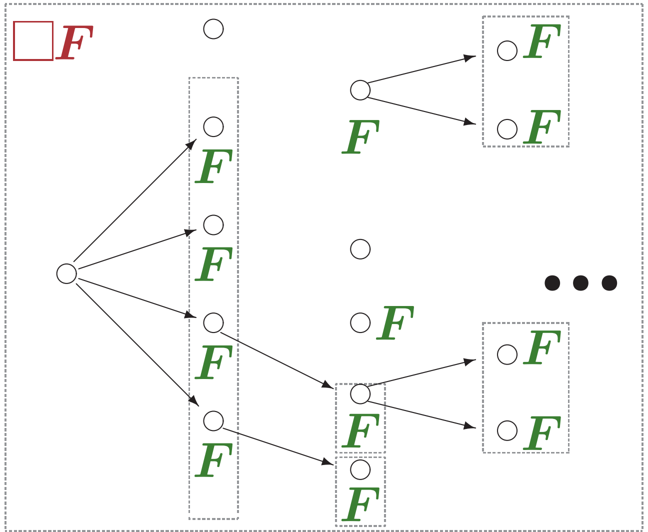
Betrachte Wahrheit von allen Welten aus

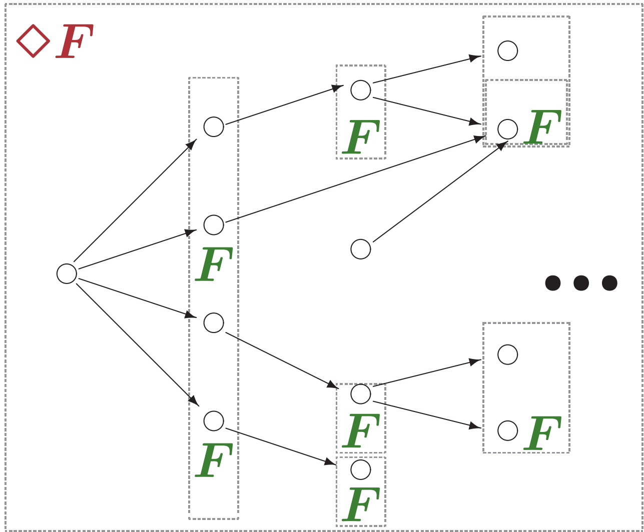


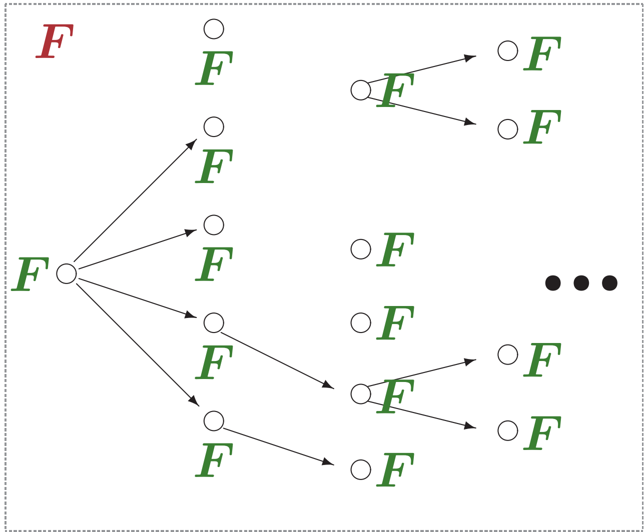
- **$\Box F$ ist gültig**
  wenn F in allen Welten wahr ist, die von irgendeiner Welt erreichbar sind
- **$\Diamond F$ ist gültig**
  wenn für jede Welt eine erreichbare Welt existiert, in der F wahr ist

Modallogische Gültigkeit

Betrachte Wahrheit von allen Welten aus







- **$\Box F$ ist gültig**
  wenn F in allen Welten wahr ist, die von irgendeiner Welt erreichbar sind
- **$\Diamond F$ ist gültig**
  wenn für jede Welt eine erreichbare Welt existiert, in der F wahr ist
- **F ist gültig**
  wenn F in allen Welten wahr ist

Erreichbarkeit und modale Axiome

- **Allgemeine Eigenschaften aller Modallogiken**

(Df)	Definition von $\Diamond$	$\Diamond F \Leftrightarrow \neg\Box\neg F$
(K)	Distributivität	$\Box(F \Rightarrow G) \;\Rightarrow\; (\Box F \Rightarrow \Box G)$
(RN)	Notwendigkeitsregel	aus $\vdash F$ folgt $\vdash \Box F$
(PL)		*Axiome der (klassischen) Prädikatenlogik*
(MP)	Modus Ponens Regel	aus $\vdash F$ und $\vdash F \Rightarrow G$ folgt $\vdash G$

Erreichbarkeit und modale Axiome

• Allgemeine Eigenschaften aller Modallogiken

(Df)	Definition von $\Diamond$	$\Diamond F \Leftrightarrow \neg\Box\neg F$
(K)	Distributivität	$\Box(F \Rightarrow G) \;\Rightarrow\; (\Box F \Rightarrow \Box G)$
(RN)	Notwendigkeitsregel	aus $\vdash F$ folgt $\vdash \Box F$
(PL)		*Axiome der (klassischen) Prädikatenlogik*
(MP)	Modus Ponens Regel	aus $\vdash F$ und $\vdash F \Rightarrow G$ folgt $\vdash G$

• Mögliche Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelation

(D)	seriell	Für alle $w_1 \in \mathcal{W}$ gibt es ein $w_2 \in \mathcal{W}$ mit $w_1 R w_2$
(T)	reflexiv	wRw für alle Welten $w \in \mathcal{W}$
(B)	symmetrisch	$w_1 R w_2 \Rightarrow w_2 R w_1$ für alle $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$
(4)	transitiv	$w_1 R w_2$ & $w_2 R w_3 \;\Rightarrow\; w_1 R w_3$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$
(5)	euklidisch	$w_1 R w_2$ & $w_1 R w_3 \;\Rightarrow\; w_2 R w_3$ und $w_3 R w_2$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$

Erreichbarkeit und modale Axiome

- **Allgemeine Eigenschaften aller Modallogiken**

(Df)	Definition von $\Diamond$	$\Diamond F \Leftrightarrow \neg\Box\neg F$
(K)	Distributivität	$\Box(F \Rightarrow G) \ \Rightarrow\ (\Box F \Rightarrow \Box G)$
(RN)	Notwendigkeitsregel	aus $\vdash F$ folgt $\vdash \Box F$
(PL)		*Axiome der (klassischen) Prädikatenlogik*
(MP)	Modus Ponens Regel	aus $\vdash F$ und $\vdash F \Rightarrow G$ folgt $\vdash G$

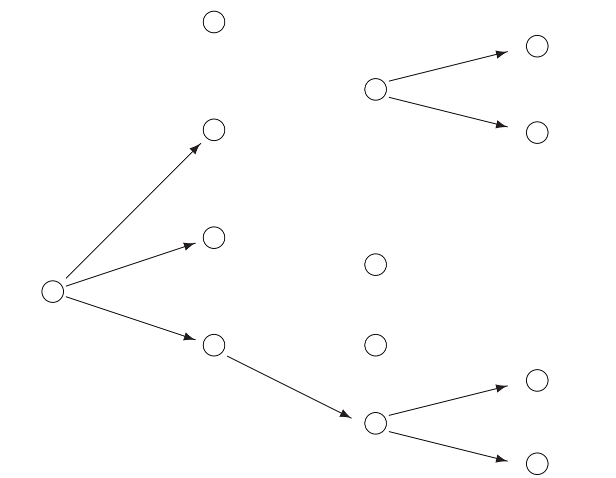
- **Mögliche Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelation**

(D)	seriell	Für alle $w_1 \in \mathcal{W}$ gibt es ein $w_2 \in \mathcal{W}$ mit $w_1 R w_2$
(T)	reflexiv	wRw für alle Welten $w \in \mathcal{W}$
(B)	symmetrisch	$w_1 R w_2 \Rightarrow w_2 R w_1$ für alle $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$
(4)	transitiv	$w_1 R w_2$ & $w_2 R w_3 \ \Rightarrow\ w_1 R w_3$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$
(5)	euklidisch	$w_1 R w_2$ & $w_1 R w_3 \ \Rightarrow\ w_2 R w_3$ und $w_3 R w_2$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$

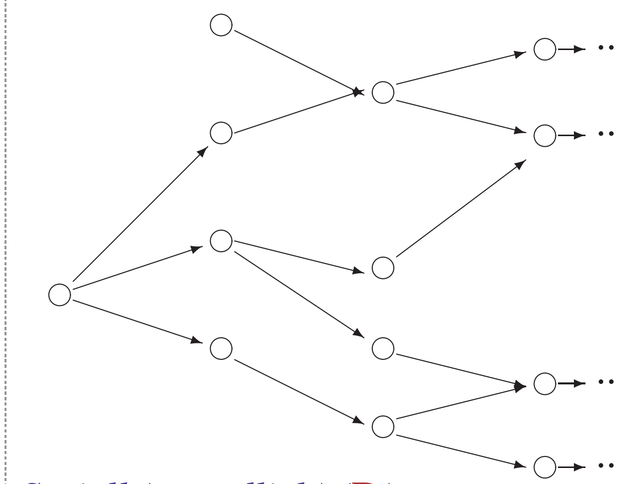
- **Durch R induzierte Axiome für $\Box$**

(D)	seriell	$\Box F \Rightarrow \Diamond F$	*“Was ich glaube, ist auch möglich”*
(T)	reflexiv	$\Box F \Rightarrow F$	*“Was beweisbar ist, ist auch gültig”*
(B)	symmetrisch	$F \Rightarrow \Box\Diamond F$	*“Ist F wahr, dann weiß man, daß F möglich ist”*
(4)	transitiv	$\Box F \Rightarrow \Box\Box F$	*“Ich weiß, was ich weiß”*
(5)	euklidisch	$\Diamond F \Rightarrow \Box\Diamond F$	

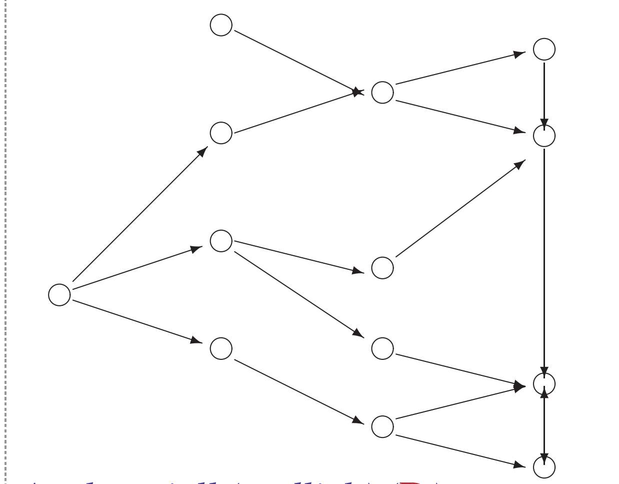
Typische Erreichbarkeitsrelationen



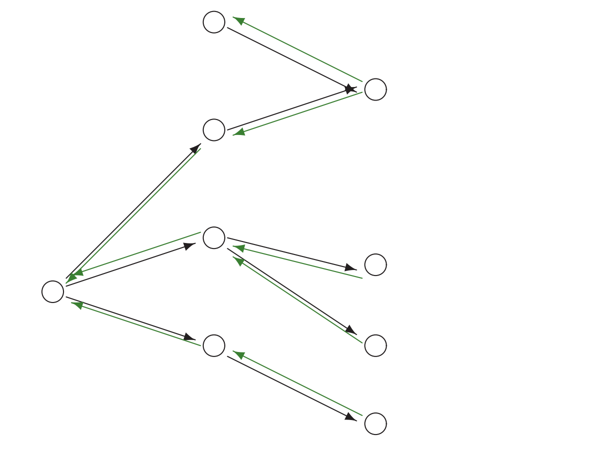
keine spezielle Eigenschaft (**K**)



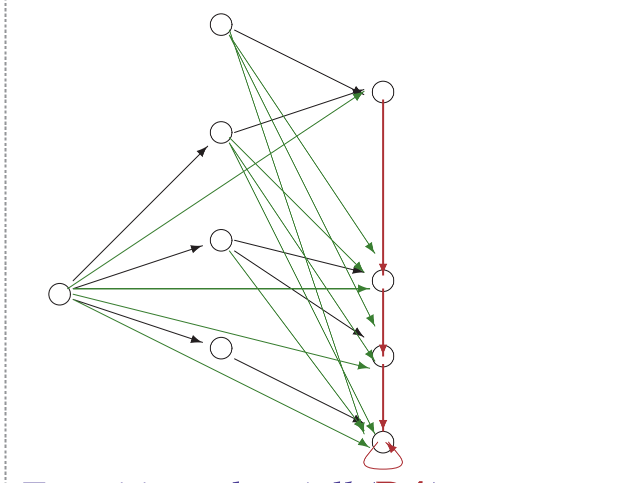
Seriell (unendlich) (**D**)



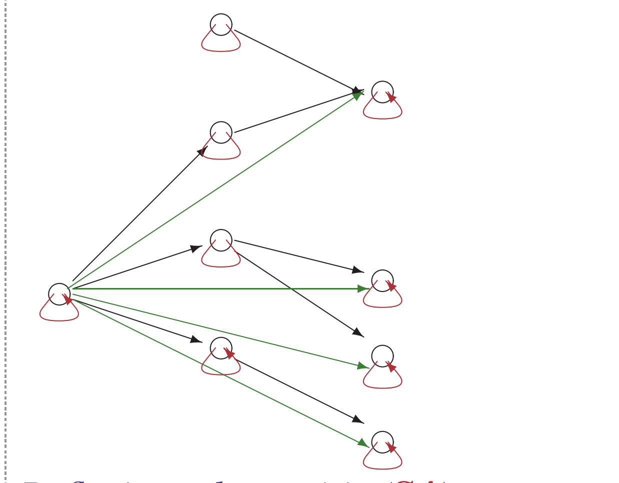
Auch seriell (endlich) (**D**)



Symmetrisch (und seriell) (**B**)



Transitiv und seriell (**D4**)



Reflexiv und transitiv (**S4**)

Die wichtigsten Modallogiken

Name	*Eigenschaften von R*	*Axiome*
K	keine	PL, Df, K
K4	transitiv	PL, Df, K, 4
D	seriell	PL, Df, K, D
D4	seriell, transitiv	PL, Df, K, D, 4
B	symmetrisch	PL, Df, K, B
T	reflexiv	PL, Df, K, T
S4	reflexiv, transitiv	PL, Df, K, T, 4
S5	reflexiv, transitiv, symmetrisch	PL, Df, K, T, B, 4 (+5)

Die wichtigsten Modallogiken

Name	*Eigenschaften von R*	*Axiome*
K	keine	PL, Df, K
K4	transitiv	PL, Df, K, 4
D	seriell	PL, Df, K, D
D4	seriell, transitiv	PL, Df, K, D, 4
B	symmetrisch	PL, Df, K, B
T	reflexiv	PL, Df, K, T
S4	reflexiv, transitiv	PL, Df, K, T, 4
S5	reflexiv, transitiv, symmetrisch	PL, Df, K, T, B, 4 (+5)

- **$F \Rightarrow \Box F$ gilt trotz der Notwendigkeitsregel nicht**

  $\vdash F$ $\hat{=}$ "F gilt in jeder Welt $w \in \mathcal{W}$"

  $\vdash \Box F$ $\hat{=}$ "Für alle $w \in \mathcal{W}$ gilt F gilt in jeder von w erreichbaren Welt"

  $\vdash F \Rightarrow \Box F$ $\hat{=}$ "In jeder Welt $w \in \mathcal{W}$ folgt $\Box F$ aus F "

  Deduktionstheorem "$\vdash F$ folgt aus $\vdash E$ genau dann, wenn $\vdash E \Rightarrow F$ gilt"
  gilt nicht für Modallogiken (und konstruktive Logik)

Beweise in der Modallogik

- **In K folgt $\Diamond F \Rightarrow \Diamond G$ aus $F \Rightarrow G$**
  - Es gelte $F \Rightarrow G$
  - Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)
  - Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)
  - Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)
  - Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)
  - Es folgt $\Diamond F \Rightarrow \Diamond G$ (Df)

Beweise in der Modallogik

- **In K folgt $\Diamond F \Rightarrow \Diamond G$ aus $F \Rightarrow G$**
  - Es gelte $F \Rightarrow G$
  - Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)
  - Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)
  - Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)
  - Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)
  - Es folgt $\Diamond F \Rightarrow \Diamond G$ (Df)
- **In K folgt $\Box F \Rightarrow \Box G$ aus $F \Rightarrow G$**
  - Aus $F \Rightarrow G$ folgt $\Box(F \Rightarrow G)$ mit RN und hieraus $\Box F \Rightarrow \Box G$ mit K

Beweise in der Modallogik

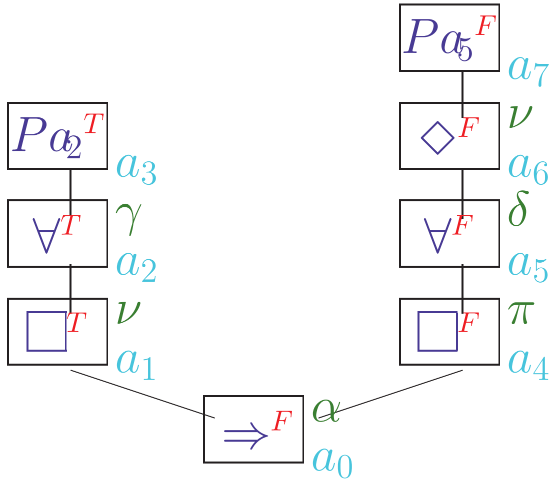
- **In K folgt $\Diamond F \Rightarrow \Diamond G$ aus $F \Rightarrow G$**
  - Es gelte $F \Rightarrow G$
  - Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)
  - Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)
  - Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)
  - Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)
  - Es folgt $\Diamond F \Rightarrow \Diamond G$ (Df)
- **In K folgt $\Box F \Rightarrow \Box G$ aus $F \Rightarrow G$**
  - Aus $F \Rightarrow G$ folgt $\Box(F \Rightarrow G)$ mit RN und hieraus $\Box F \Rightarrow \Box G$ mit K
- **In T gilt $F \Rightarrow \Diamond F$**
  - Es gilt $\Box\neg F \Rightarrow \neg F$ (T)
  - Daraus folgt $\neg\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg F$ (Kontraposition)
  - Es folgt $F \Rightarrow \Diamond F$ (PL, Df)

Extensionsverfahren für Modallogiken

Modifikationen analog zur Konstruktiven Logik

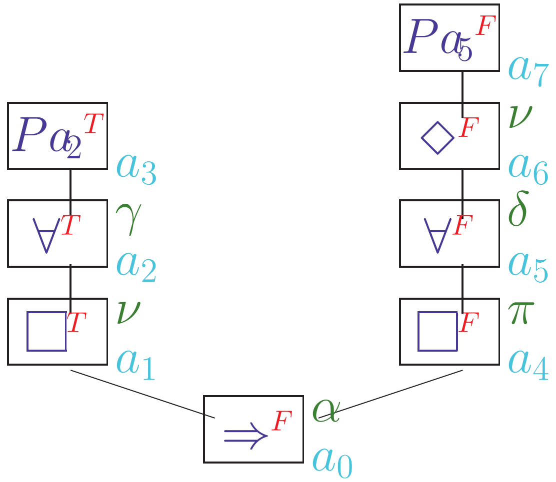
- **Erweitere Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
  - **F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär**
  - Betrachtung von Nichtnormalform-Matrizen ist sinnvoll
  - Komplementaritätsbegriff muß ergänzt werden
    - Unifizierbarkeit der konnektierten Terme
    - Erreichbarkeit beider Literale bei Einschränkungen an Regelreihenfolge
- **Erweitertes Beweissuchverfahren**
  - Unverändertes konnektionen-orientiertes Pfadüberprüfungsverfahren
    - Uniformes Verfahren für Nichtnormalform-Matrizen sinnvoll
  - Erweiterter Komplementaritätstest
    - Termunifikation liefert Substitution σ_Q von γ-Variablen durch Terme
    - Präfixunifikation liefert Substitution σ_M für modale Präfixe
  - Substitutionen codieren Einschränkungen an Reihenfolge der Regeln
  - Eigenschaften von R codiert in Bedingungen an Zulässigkeit von σ_M

Modale Präfixe



- **Weise Positionen modale Typen zu**
  - **Typ ν**: $\Box^T$, $\Diamond^F$ — Variablen
  - **Typ π**: $\Box^F$, $\Diamond^T$ — Konstante

Modale Präfixe

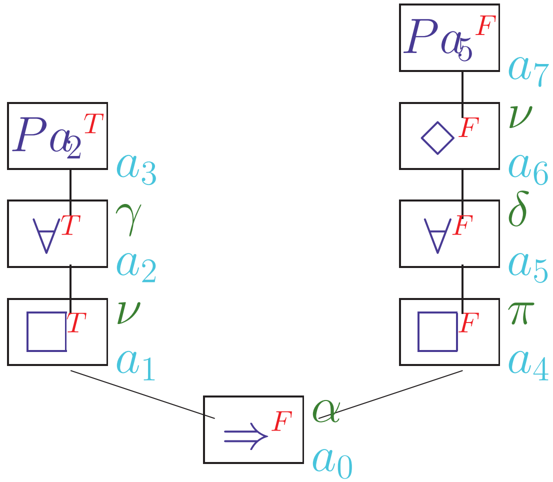


$\left[\; A_1{:}Pa_2^F \quad a_4A_6{:}Pa_5^T \;\right]$ K, D, D4, S4, T

$\left[\; A_1{:}Pa_2^F \quad A_6{:}Pa_5^T \;\right]$ S5

- **Weise Positionen modale Typen zu**
  - **Typ ν**: $\Box^T$, $\Diamond^F$ — Variablen
  - **Typ π**: $\Box^F$, $\Diamond^T$ — Konstante
- **Bestimme Präfix eines Atoms P**
  - Liste der modalen Positionen zwischen Wurzel und P
  - Letzte modale Position vor P für Logik S5

Modale Präfixe



$\left[\ A_1{:}Pa_2{}^F \quad a_4A_6{:}Pa_5{}^T\ \right]$ K, D, D4, S4, T

$\left[\ A_1{:}Pa_2{}^F \quad A_6{:}Pa_5{}^T\ \right]$ S5

- **Weise Positionen modale Typen zu**
  - **Typ ν**: $\Box^T$, $\Diamond^F$ — Variablen
  - **Typ π**: $\Box^F$, $\Diamond^T$ — Konstante
- **Bestimme Präfix eines Atoms P**
  - Liste der modalen Positionen zwischen Wurzel und P
  - Letzte modale Position vor P für Logik S5
- **Definiere modale Substitution σ_M**
  - Abbildung von ν-Positionen in Strings über modalen Positionen
  - σ_M induziert Reduktionsordnung $\sqsubseteq_M$ auf modalen Positionen:
    Ist $\sigma_M(U) = v_1...v_n$ dann gilt $v_i \sqsubseteq_M U$ für jede π-Position v_i

Komplementarität und Gültigkeit

- **Komplementarität unter $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$**
  - Terme konnektierter Literale sind unter σ_Q unifizierbar, Präfixe unter σ_M
  - $\boldsymbol{\sigma_Q}$: Ersetze quantifizierte γ-Variablen durch Terme
    Termunifikation versucht Terme konnektierter Atome gleich zu machen
  - $\boldsymbol{\sigma_M}$: Ersetze φ-Variablen durch Strings
    Präfixunifikation versucht Präfixe konnektierter Atome gleich zu machen
- **Zulässigkeit von (σ_Q, σ_M)**
  - Gesamte Reduktionsordnung $\lhd := (< \cup \sqsubseteq_Q \cup \sqsubseteq_M)^+$ ist azyklisch
  - Kommt eine δ-Position v in $\sigma_Q(u)$ vor, so gilt $|\sigma_M(pre_v)| \leq |\sigma_M(pre_u))|$
    ($|\sigma_M(pre_v)| \leq |\sigma_M(pre_u))| \leq |\sigma_M(pre_v)| + 1$ für T und D)
  - $\sigma_M(a_i)$ hat maximal (T), genau (D), mindestens (D4) Länge 1
- **Modale Multiplizität $\mu_M(a_i)$**
  - Anzahl der Kopien des ν-Knotens im Baum

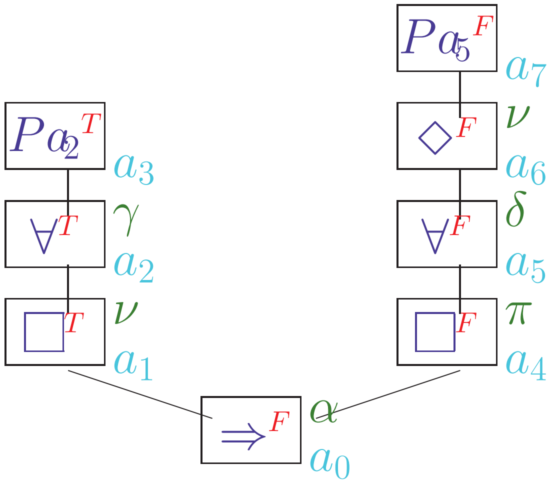
Ein modales F ist gültig, wenn es eine Multiplizität μ=(μ_Q, μ_M), eine zulässige Substitution σ=(σ_Q, σ_M) und eine Menge $\mathcal{C}$ σ-komplementärer Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F ein Element von $\mathcal{C}$ enthält

Extensionsverfahren für Modallogik

- **Pfadüberprüfungsverfahren bleibt unverändert**
  – Nicht-Normalform-Verfahren aus Einheit 6
- **Komplementaritätstest wird erweitert**
  – Bekanntes Termunifikationsverfahren
  – Präfixunifikationsverfahren mit Logik-spezifischen Regeln
  – Überprüfung der Zulässigkeit
- **Anwendbar auf D, D4, T, S4, S5**
  – Regeln für Präfixunifikation in K, K4 sind vorhanden
  – Matrixcharakterisierung für K, K4, B formal noch nicht abgesichert

Weitere Details in Literatur auf Webseite

Modaler Matrixbeweis für $\Box\forall x Px \Rightarrow \Box\forall y \Diamond Py$

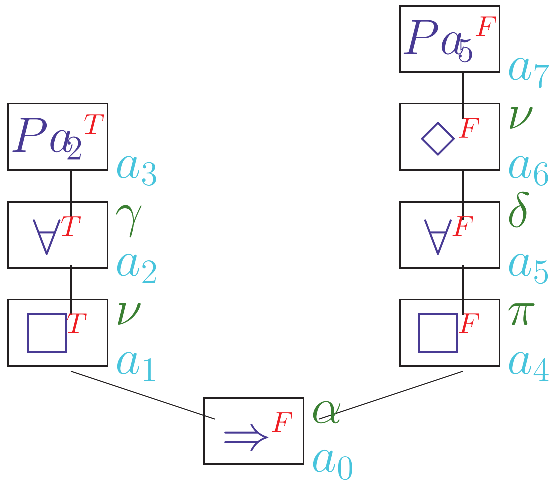


$\left[\; A_1{:}Pa_2{}^F \quad a_4A_6{:}Pa_5{}^T \;\right]$ D, D4, S4, T

$\left[\; A_1{:}Pa_2{}^F \quad A_6{:}Pa_5{}^T \;\right]$ S5

- **Einziger Pfad $\{a_3a_7\}$ durch Konnektion abgedeckt**
  Terme sind gleich unter $\sigma_Q = [a_5/a_2]$
  – Induzierte Reduktionsordnung $a_5 \sqsubseteq_Q a_2$

Modaler Matrixbeweis für $\Box\forall x Px \Rightarrow \Box\forall y \Diamond Py$

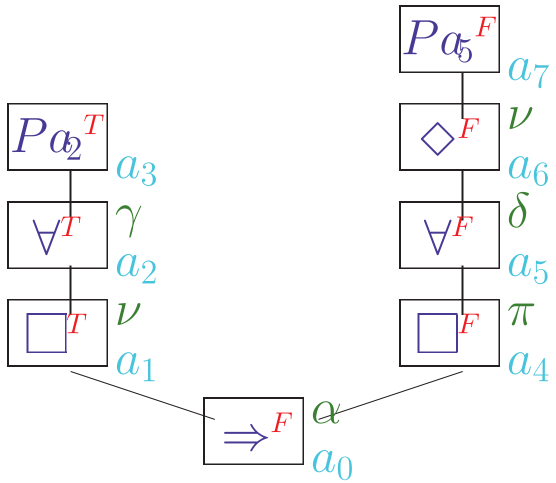


$\left[\; A_1{:}Pa_2{}^F \quad a_4A_6{:}Pa_5{}^T \;\right]$ D, D4, S4, T

$\left[\; A_1{:}Pa_2{}^F \quad A_6{:}Pa_5{}^T \;\right]$ S5

- **Einziger Pfad $\{a_3a_7\}$ durch Konnektion abgedeckt**
  Terme sind gleich unter $\sigma_Q = [a_5/a_2]$
  – Induzierte Reduktionsordnung $a_5 \sqsubseteq_Q a_2$
- **Drei mögliche Präfix-Unifikatoren**
  – $\sigma_{M_1} = [a_4A_6/A_1]$ für D, D4, S4,T; zulässig nur für D4 und S4
  – $\sigma_{M_2} = [a_4/A_1, \varepsilon/A_6]$ für D, D4, S4,T; zulässig nur für S4 und T
  – $\sigma_{M_3} = [a_4/A_1, a_4/A_6]$ nur für S5, zulässig
  – σ_{M_1} und σ_{M_2} verletzen Längenbedingung für D
  – σ_{M_1} verletzt Bedingung an δ-Positionen für T, σ_{M_2} für D4

Modaler Matrixbeweis für $\Box\forall x Px \Rightarrow \Box\forall y \Diamond Py$



$\left[\; {}_{A_1}{:}Pa_2{}^F \quad {}_{a_4 A_6}{:}Pa_5{}^T \;\right]$ D, D4, S4, T

$\left[\; {}_{A_1}{:}Pa_2{}^F \quad {}_{A_6}{:}Pa_5{}^T \;\right]$ S5

- **Einziger Pfad $\{a_3 a_7\}$ durch Konnektion abgedeckt**

  Terme sind gleich unter $\sigma_Q = [a_5/a_2]$

  – Induzierte Reduktionsordnung $a_5 \sqsubseteq_Q a_2$
- **Drei mögliche Präfix-Unifikatoren**

  – $\sigma_{M_1} = [a_4A_6/A_1]$ für D, D4, S4,T; zulässig nur für D4 und S4

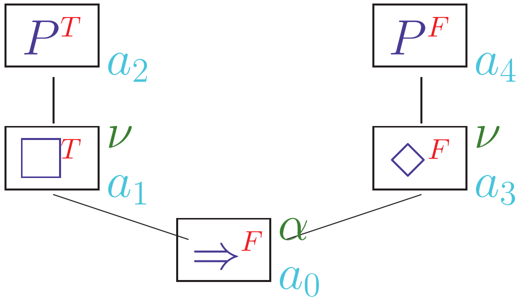
  – $\sigma_{M_2} = [a_4/A_1, \varepsilon/A_6]$ für D, D4, S4,T; zulässig nur für S4 und T

  – $\sigma_{M_3} = [a_4/A_1, a_4/A_6]$ nur für S5, zulässig

  – σ_{M_1} und σ_{M_2} verletzen Längenbedingung für D

  – σ_{M_1} verletzt Bedingung an δ-Positionen für T, σ_{M_2} für D4
- **Die Formel ist gültig in D4, T, S4, S5 aber nicht in D**

MATRIXBEWEISE FÜR $\Box P \Rightarrow \Diamond P$ UND $\Box P \Rightarrow P$

- 

  $\left[\ A_1{:}P^F \quad A_3{:}P^T\ \right]$ D, D4, S4, S5, T

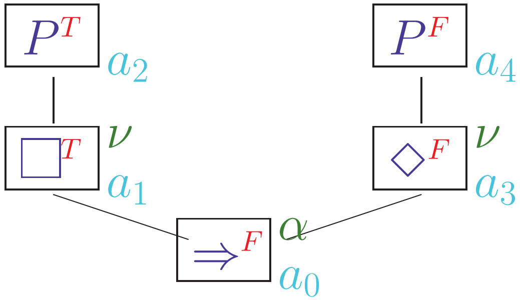
  – Einziger Pfad $\{a_2 a_4\}$ durch Konnektion abgedeckt

  – Terme sind gleich

  – Allgemeinster Präfix-Unifikator $\sigma_{M_1} = [A_3/A_1]$ ist immer zulässig

  Die Formel ist gültig in D, D4, T, S4, S5 (aber nicht in K, K4, K5, B)

Matrixbeweise für $\Box P \Rightarrow \Diamond P$ und $\Box P \Rightarrow P$

- 

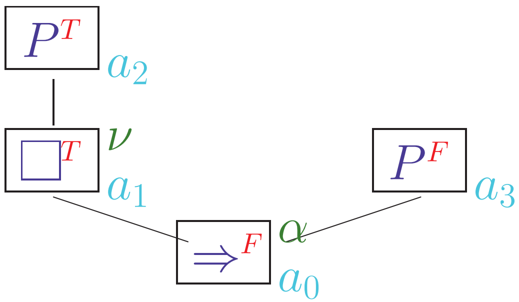
$$\left[\; A_1{:}P^F \qquad A_3{:}P^T \;\right]$$ D, D4, S4, S5, T

  – Einziger Pfad $\{a_2 a_4\}$ durch Konnektion abgedeckt

  – Terme sind gleich

  – Allgemeinster Präfix-Unifikator $\sigma_{M_1} = [A_3/A_1]$ ist immer zulässig

  Die Formel ist gültig in D, D4, T, S4, S5 (aber nicht in K, K4, K5, B)

- 

$$\left[\; A_1{:}P^F \qquad \epsilon{:}P^T \;\right]$$ D, D4, S4, S5, T

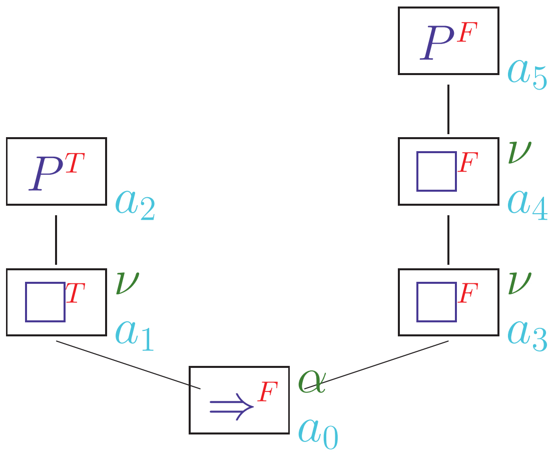
  – Einziger Pfad $\{a_2 a_3\}$ durch Konnektion abgedeckt

  – Terme sind gleich

  – Allgemeinster Präfix-Unifikator $\sigma_{M_1} = [\epsilon/A_1]$ zulässig für T, S4, S5

  Die Formel ist gültig in T, S4, S5 (aber nicht in D, D4, K, K4, K5, B)

Modaler Matrixbeweis für $\Box P \Rightarrow \Box\Box P$



$$\left[\; {}_{A_1}{:}Pa_2{}^F \quad {}_{a_3a_4}{:}Pa_5{}^T \; \right] \qquad \text{D, D4, S4, T}$$

$$\left[\; {}_{A_1}{:}Pa_2{}^F \quad {}_{a_4}{:}Pa_5{}^T \; \right] \qquad \text{S5}$$

Einziger Pfad $\{a_2a_3\}$ durch Konnektion abgedeckt

– Terme sind gleich

– Zwei Präfix-Unifikatoren

– $\sigma_{M_1} = [a_3a_4/A_1]$ für D, D4, S4,T; verletzt Längenbedingung für D, T

– $\sigma_{M_2} = [a_4/A_1]$ nur für S5, zulässig

Die Formel ist gültig in D4, S4, S5 (auch K4, K5, nicht in D, T, K, B)

Modale Präfix-Unifikation

Unifiziere Präfix-Strings konnektierter Atome

- **Ähnlich zur Präfix-Unifikation für konstruktive Logik**
  - Gleiches Transformationsverfahren im Stil von Martelli-Montanari
  - Unterschiedliche Transformationsregeln für jede Modallogik

Modale Präfix-Unifikation

Unifiziere Präfix-Strings konnektierter Atome

- **Ähnlich zur Präfix-Unifikation für konstruktive Logik**
  – Gleiches Transformationsverfahren im Stil von Martelli-Montanari
  – Unterschiedliche Transformationsregeln für jede Modallogik

- **Transformationsregeln für D und K**

$$\begin{array}{llll}
R_1 & \{\varepsilon = \varepsilon|\varepsilon\}, \sigma & \rightarrow & \{\}, \sigma \\
R_2 & \{Vs = \varepsilon|Xt\}, \sigma & \rightarrow & \{s = \varepsilon|t\}, \{V\backslash X\} \cup \sigma, \quad V{\neq}X \\
R_3 & \{Xs = \varepsilon|Xt\}, \sigma & \rightarrow & \{s = \varepsilon|t\}, \sigma \\
R_4 & \{Cs = \varepsilon|Vt\}, \sigma & \rightarrow & \{Vt = \varepsilon|Cs\}, \sigma
\end{array}$$

Transformationsregeln für D4 und K4

$R_1 - R_4$, $R_7 - R_{10}$ *wie bei konstruktiver Logik*

$$\begin{array}{llll}
R_5. & \{Vs = z|\varepsilon\}, \sigma & \rightarrow & \{s = \varepsilon|\varepsilon\}, \{V\backslash z\} \cup \sigma, \quad z{\neq}\varepsilon \text{ oder } V \in V' \wedge R_V^{(\sigma)} \\
R_6. & \{Vs = \varepsilon|C_1t\}, \sigma & \rightarrow & \{s = \varepsilon|C_1t\}, \{V\backslash\varepsilon\} \cup \sigma, \quad V \in V' \wedge R_V^{(\sigma)}
\end{array}$$

Transformationsregeln für S5

R_1	$\{V = \varepsilon\|X\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{\}, \{V\backslash X\} \cup \sigma$	$V{\neq}X$
R_2	$\{X = \varepsilon\|X\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{\}, \sigma$	
R_3	$\{C = \varepsilon\|V\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{V = \varepsilon\|C\}, \sigma$	

Transformationsregeln für S4 wie bei konstruktiver Logik

Transformationsregeln für T

$R_1 - R_3$ *wie bei konstruktiver Logik*

R_4	$\{Vs = z_v\|\varepsilon\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{s = \varepsilon\|\varepsilon\}, \{V\backslash z_v\} \cup \sigma$
R_5	$\{s_1Vs_2 = z\|Ct\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{s_1 = \varepsilon\|z, s_2 = \varepsilon\|t\}, \{V\backslash C\} \cup \sigma_V^{(\sigma)} \cup \sigma$
R_6	$\{s_c^+ = \varepsilon\|t_v^+\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{t_v^+ = \varepsilon\|s_c^+\}, \sigma$
R_7	$\{Vs_v^+ = \varepsilon\|V_1t_v\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{V_1t_v = V\|s_v^+\}, \sigma$
R_8	$\{Vs_v^+ = z^+\|V_1t_v\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{V_1t_v = V'\|s_v^+\}, \{V\backslash z^+V'\} \cup \sigma$
R_9	$\{Xs = z\|Vt\}, \sigma$	$\rightarrow$	$\{Xs = zV\|t\}, \sigma,\quad X{\neq}V,\ s{=}\varepsilon$ oder $t{\neq}\varepsilon$

Modallogiken im Rückblick

- **Zusätzliche Quantoren für Notwendigkeit / Möglichkeit**
  - Semantik basiert auf “erreichbaren Welten”
  - Teilformeleigenschaft ist nicht mehr gültig
- **Erweiterung des Matrixkalküls erforderlich**
  - Pfade müssen weiterhin komplementäre Konnektionen enthalten
  - Komplementarität verlangt zusätzlich Unifizierbarkeit der Präfixe
  - Bisher nur für Kernlogiken D, D4, T, S4, und S5 möglich
  - Logiken K, K4, K5, B benötigen Einbettung in Logik höherer Stufe
- **Erweiterung des Extensionsverfahrens entsprechend**
  - Pfadüberprüfungsverfahren bleibt unverändert
  - Komplementaritätstest wird um Präfix-Unifikation erweitert
- **Es gibt Beweiser in Klauselform**
  - Mitführen von Präfixen ermöglicht Normalformbildung
  - MleanCop ist mit Abstand schnellster Beweiser für Modallogiken