

Inferenzmethoden

Einheit 13

Modallogiken



1. Syntax und Semantik
2. Modales Extensionsverfahren
3. Modale Präfixunifikation

- **Erweiterung der Prädikatenlogik um ‘Modalitäten’**

- Modellierung von Schlußfolgerungen, die im Alltag verwendet werden

- Formel F ist **beweisbar**

- Ich **bin sicher** oder **glaube**, daß F gilt

- **Möglicherweise** ist F gültig (oder wird es einmal)

- **Syntax: Prädikatenlogik + Modaloperatoren \Box , \Diamond**

- \Box , \Diamond sind **Meta-Operatoren**, die Aussagen über Formeln treffen

- Lesart: $\Box F$: “notwendigerweise F ” $\Diamond F$: “möglicherweise F ”

Semantik abhängig von vorgesehener Anwendung

- Je nachdem, ob \Box als “beweisbar”, “wissen”, “glauben” verstanden wird

- $(\forall x \Box Px) \Rightarrow \Box(\exists x Px)$ ist nicht für jede Interpretation gültig

- **Beweisverfahren:**

- (Erweiterte) **Sequenzkalküle**

- **Konnektionsbeweiser** + **Transformation** der Formeln in Prädikatenlogik

- **Modifizierter Konnektionsbeweiser** mit **Präfixen** für Modaloperatoren

- **Interpretation von Formeln abhängig von Welten**
 - In der Prädikatenlogik wird eine unveränderliche Welt modelliert
 - Modaloperatoren interpretieren relativ zu **denkbaren Welten**
 - mögliche zukünftige Entwicklung
 - mögliche vergangene Ereignisse
 - mögliche Wissens- oder Glaubenszustände
 - mathematische Theorien der Beweisbarkeit

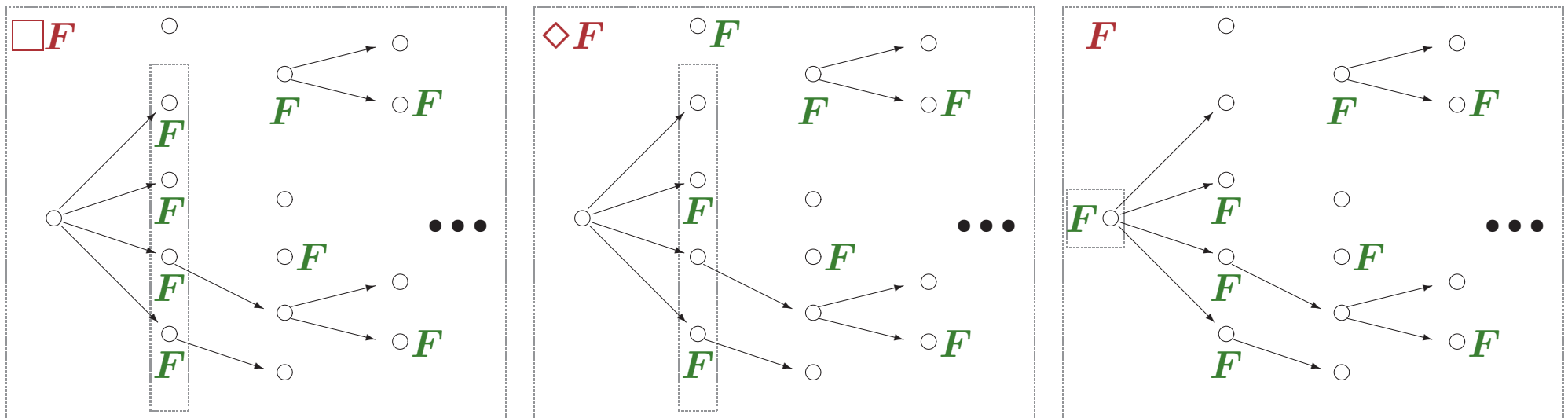
- **Kripke Semantik über Weltmodelle $(\mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{U}, u)$**

- \mathcal{W} : Menge der (denkbaren) Welten
- \mathcal{R} : **Erreichbarkeitsrelation** zwischen Welten aus \mathcal{W}
- \mathcal{U} : **Universum** aller Objekte aller Welten
- $u: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{P}(U)$: $u(w) \hat{=}$ die in Welt w existierenden Objekte
 $u(w)$ kann **konstant**, **variabel**, oder **kumulativ** bezüglich \mathcal{R} sein

Eigenschaften von \mathcal{R} bestimmen Bedeutung der Modaloperatoren

KRIPKE-SEMANTIK VON MODALOPERATOREN

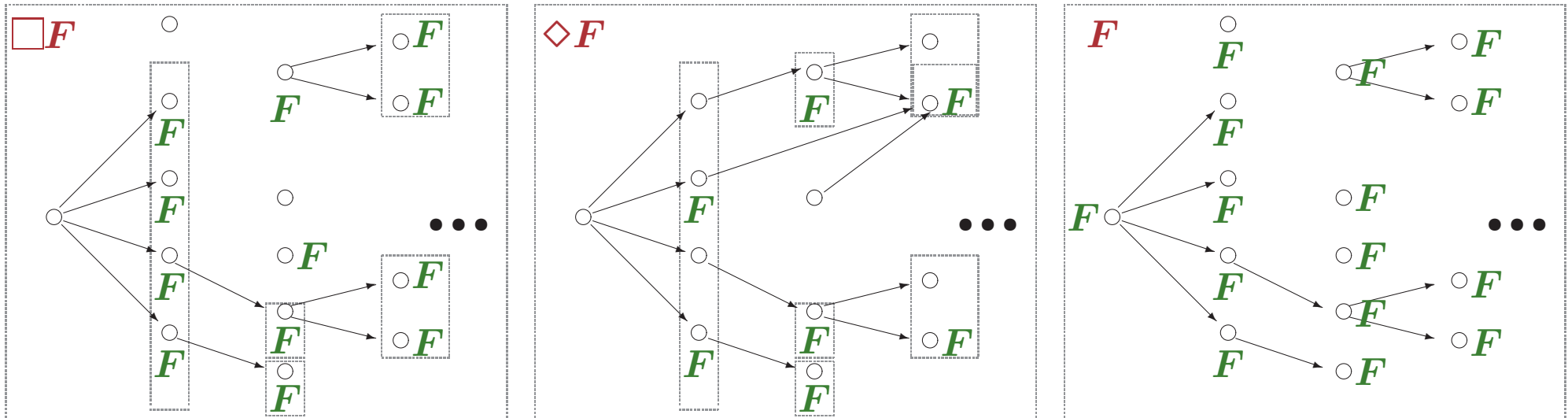
Betrachte von aktueller Welt erreichbare Welten



- $\Box F$ ist wahr, wenn F in allen erreichbaren Welten wahr ist
- $\Diamond F$ ist wahr, wenn F in mindestens einer erreichbaren Welt wahr ist
- F ist wahr, wenn F in der aktuellen Welt wahr ist

MODALLOGISCHE GÜLTIGKEIT

Betrachte Wahrheit von allen Welten aus



- $\Box F$ ist gültig
wenn F in allen Welten wahr ist, die von irgendeiner Welt erreichbar sind
- $\Diamond F$ ist gültig
wenn für jede Welt eine erreichbare Welt existiert, in der F wahr ist
- F ist gültig
wenn F in allen Welten wahr ist

ERREICHBARKEIT UND MODALE AXIOME

• Allgemeine Eigenschaften aller Modallogiken

(Df) Definition von \diamond	$\diamond F \Leftrightarrow \neg \Box \neg F$
(K) Distributivität	$\Box(F \Rightarrow G) \Rightarrow (\Box F \Rightarrow \Box G)$
(RN) Notwendigkeitsregel	aus $\vdash F$ folgt $\vdash \Box F$
(PL)	<i>Axiome der (klassischen) Prädikatenlogik</i>
(MP) Modus Ponens Regel	aus $\vdash F$ und $\vdash F \Rightarrow G$ folgt $\vdash G$

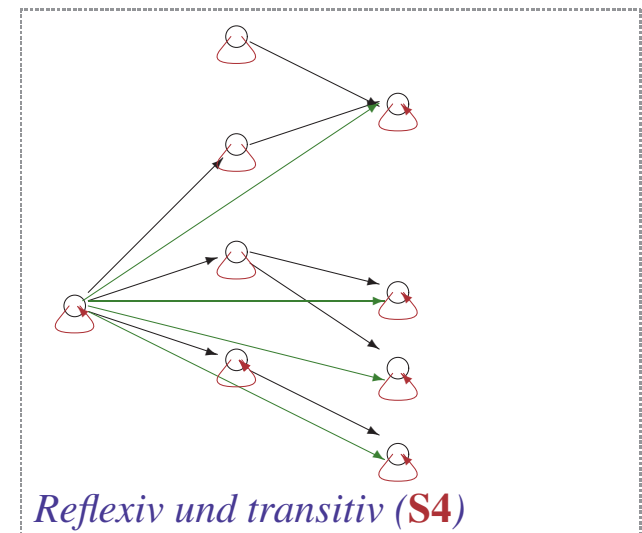
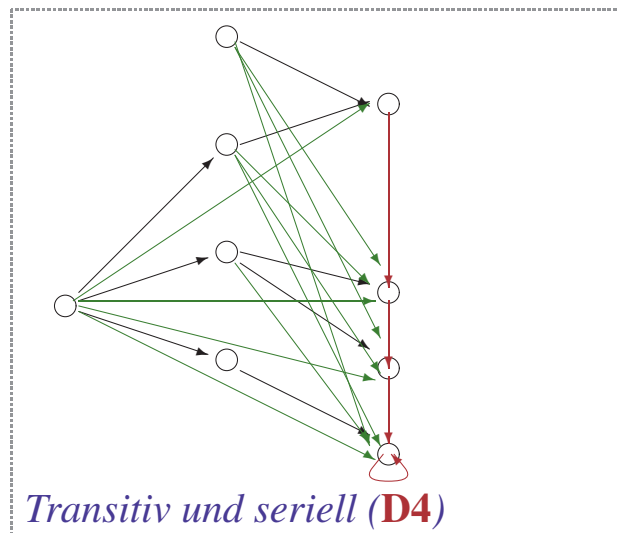
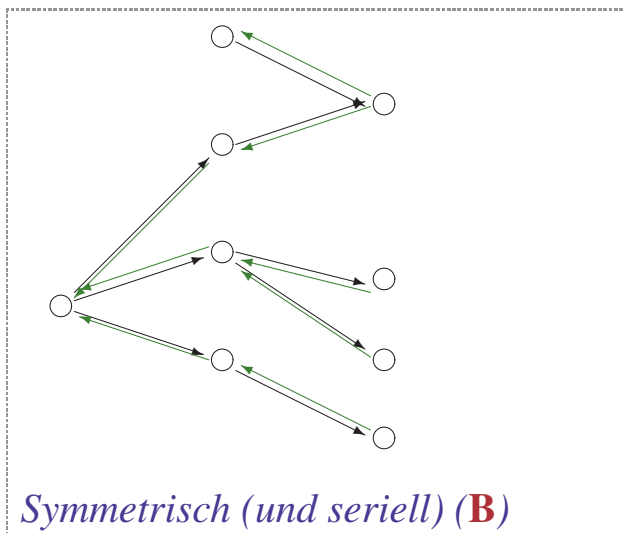
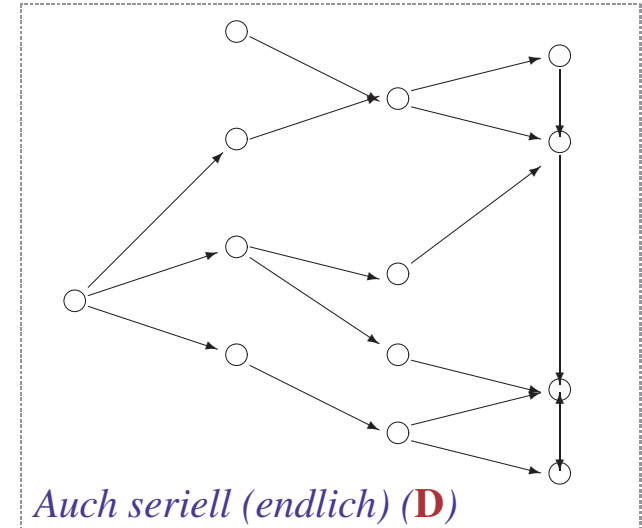
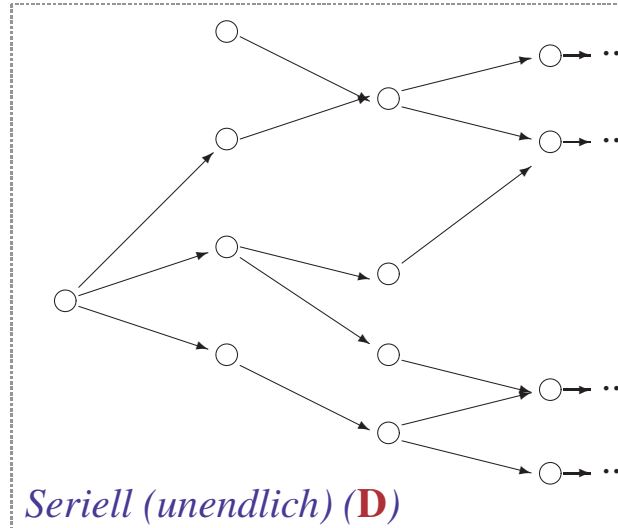
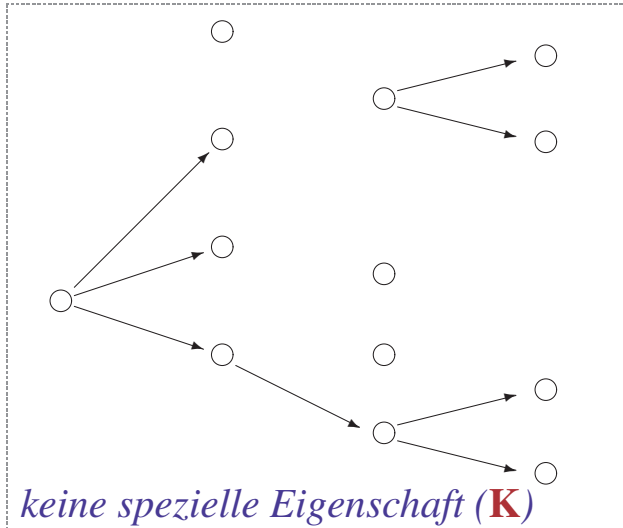
• Mögliche Eigenschaften der Erreichbarkeitsrelation

(D) seriell	Für alle $w_1 \in \mathcal{W}$ gibt es ein $w_2 \in \mathcal{W}$ mit $w_1 R w_2$
(T) reflexiv	$w R w$ für alle Welten $w \in \mathcal{W}$
(B) symmetrisch	$w_1 R w_2 \Rightarrow w_2 R w_1$ für alle $w_1, w_2 \in \mathcal{W}$
(4) transitiv	$w_1 R w_2 \ \& \ w_2 R w_3 \Rightarrow w_1 R w_3$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$
(5) euklidisch	$w_1 R w_2 \ \& \ w_1 R w_3 \Rightarrow w_2 R w_3$ und $w_3 R w_2$ für alle $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{W}$

• Durch R induzierte Axiome für \Box

(D) seriell	$\Box F \Rightarrow \diamond F$	<i>“Was ich glaube, ist auch möglich”</i>
(T) reflexiv	$\Box F \Rightarrow F$	<i>“Was beweisbar ist, ist auch gültig”</i>
(B) symmetrisch	$F \Rightarrow \Box \diamond F$	<i>“Ist F wahr, dann weiß man, daß F möglich ist”</i>
(4) transitiv	$\Box F \Rightarrow \Box \Box F$	<i>“Ich weiß, was ich weiß”</i>
(5) euklidisch	$\diamond F \Rightarrow \Box \diamond F$	

TYPISCHE ERREICHBARKEITSRELATIONEN



DIE WICHTIGSTEN MODALLOGIKEN

<i>Name</i>	<i>Eigenschaften von R</i>	<i>Axiome</i>
K	keine	PL, Df, K
K4	transitiv	PL, Df, K, 4
D	seriell	PL, Df, K, D
D4	seriell, transitiv	PL, Df, K, D, 4
B	symmetrisch	PL, Df, K, B
T	reflexiv	PL, Df, K, T
S4	reflexiv, transitiv	PL, Df, K, T, 4
S5	reflexiv, transitiv, symmetrisch	PL, Df, K, T, B, 4 (+5)

- **$F \Rightarrow \Box F$ gilt trotz der Notwendigkeitsregel nicht**

$\vdash F \hat{=} \text{“}F \text{ gilt in jeder Welt } w \in \mathcal{W}\text{”}$

$\vdash \Box F \hat{=} \text{“Für alle } w \in \mathcal{W} \text{ gilt } F \text{ gilt in jeder von } w \text{ erreichbaren Welt”}$

$\vdash F \Rightarrow \Box F \hat{=} \text{“In jeder Welt } w \in \mathcal{W} \text{ folgt } \Box F \text{ aus } F\text{”}$

Deduktionstheorem “ $\vdash F$ folgt aus $\vdash E$ genau dann, wenn $\vdash E \Rightarrow F$ gilt”
gilt nicht für Modallogiken (und konstruktive Logik)

BEWEISE IN DER MODALLOGIK

• In K folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ aus $F \Rightarrow G$

– Es gelte $F \Rightarrow G$

– Dann gilt $\neg G \Rightarrow \neg F$ (Kontraposition)

– Dann gilt $\Box(\neg G \Rightarrow \neg F)$ (RN)

– Dann gilt $\Box\neg G \Rightarrow \Box\neg F$ (K, MP)

– Dann gilt $\neg\Box\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg G$ (Kontraposition)

– Es folgt $\diamond F \Rightarrow \diamond G$ (Df)

• In K folgt $\Box F \Rightarrow \Box G$ aus $F \Rightarrow G$

– Aus $F \Rightarrow G$ folgt $\Box(F \Rightarrow G)$ mit RN und hieraus $\Box F \Rightarrow \Box G$ mit K

• In T gilt $F \Rightarrow \diamond F$

– Es gilt $\Box\neg F \Rightarrow \neg F$ (T)

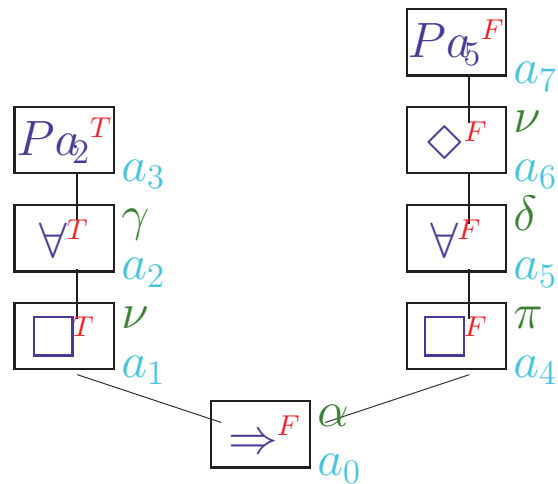
– Daraus folgt $\neg\neg F \Rightarrow \neg\Box\neg F$ (Kontraposition)

– Es folgt $F \Rightarrow \diamond F$ (PL, Df)

Modifikationen analog zur Konstruktiven Logik

- **Erweitere Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
 - F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär
 - Betrachtung von Nichtnormalform-Matrizen ist sinnvoll
 - Komplementaritätsbegriff muß ergänzt werden
 - Unifizierbarkeit der konnektierten Terme
 - Erreichbarkeit beider Literale bei Einschränkungen an Regelreihenfolge
- **Erweitertes Beweissuchverfahren**
 - Unverändertes konnektionen-orientiertes Pfadüberprüfungsverfahren
 - Uniformes Verfahren für Nichtnormalform-Matrizen sinnvoll
 - Erweiterter Komplementaritätstest
 - Termunifikation liefert Substitution σ_Q von γ -Variablen durch Terme
 - Präfixunifikation liefert Substitution σ_M für modale Präfixe
 - Substitutionen codieren Einschränkungen an Reihenfolge der Regeln
 - Eigenschaften von R codiert in Bedingungen an Zulässigkeit von σ_M

MODALE PRÄFIXE



$$\left[\overset{\text{red arc}}{A_1:Pa_2^F \quad a_4A_6:Pa_5^T} \right] \quad \text{K, D, D4, S4, T}$$

$$\left[\overset{\text{red arc}}{A_1:Pa_2^F \quad A_6:Pa_5^T} \right] \quad \text{S5}$$

- **Weise Positionen modale Typen zu**

- **Typ ν** : \square^T , \diamond^F
- **Typ π** : \square^F , \diamond^T

Variablen
Konstante

- **Bestimme Präfix eines Atoms P**

- Liste der modalen Positionen zwischen Wurzel und P
- Letzte modale Position vor P für Logik S5

- **Definiere modale Substitution σ_M**

- Abbildung von ν -Positionen in Strings über modalen Positionen
- σ_M induziert Reduktionsordnung \sqsubseteq_M auf modalen Positionen:
Ist $\sigma_M(U) = v_1 \dots v_n$ dann gilt $v_i \sqsubseteq_M U$ für jede π -Position v_i

KOMPLEMENTARITÄT UND GÜLTIGKEIT

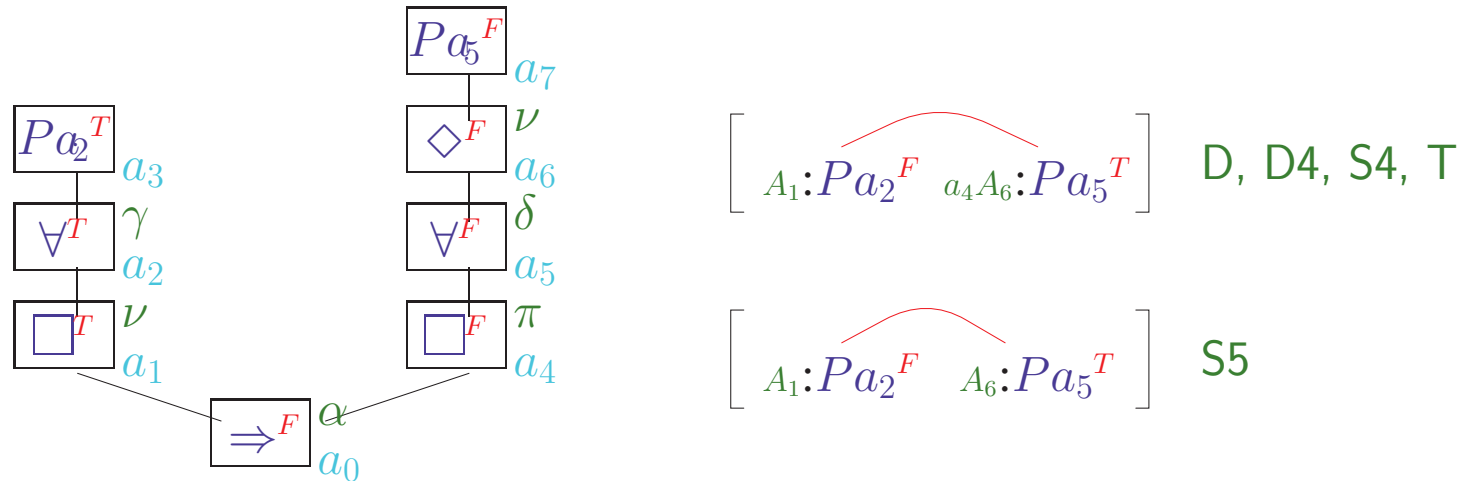
- **Komplementarität unter $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$**
 - Terme konnektierter Literale sind unter σ_Q unifizierbar, Präfixe unter σ_M
 - σ_Q : Ersetze quantifizierte γ -Variablen durch Terme
Termunifikation versucht Terme konnektierter Atome gleich zu machen
 - σ_M : Ersetze φ -Variablen durch Strings
Präfixunifikation versucht Präfixe konnektierter Atome gleich zu machen
- **Zulässigkeit von (σ_Q, σ_M)**
 - Gesamte **Reduktionsordnung** $\triangleleft := (< \cup \Xi_Q \cup \Xi_M)^+$ ist azyklisch
 - Kommt eine δ -Position v in $\sigma_Q(u)$ vor, so gilt $|\sigma_M(\text{pre}_v)| \leq |\sigma_M(\text{pre}_u)|$
($|\sigma_M(\text{pre}_v)| \leq |\sigma_M(\text{pre}_u)| \leq |\sigma_M(\text{pre}_v)| + 1$ für T und D)
 - $\sigma_M(a_i)$ hat maximal (T), genau (D), mindestens (D4) Länge 1
- **Modale Multiplizität $\mu_M(a_i)$**
 - Anzahl der Kopien des ν -Knotens im Baum

Ein modales F ist gültig, wenn es eine Multiplizität $\mu = (\mu_Q, \mu_M)$, eine zulässige Substitution $\sigma = (\sigma_Q, \sigma_M)$ und eine Menge \mathcal{C} σ -komplementärer Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F ein Element von \mathcal{C} enthält

- **Pfadüberprüfungsverfahren bleibt unverändert**
 - Nicht-Normalform-Verfahren aus Einheit 6
- **Komplementaritätstest wird erweitert**
 - Bekanntes Termunifikationsverfahren
 - Präfixunifikationsverfahren mit Logik-spezifischen Regeln
 - Überprüfung der Zulässigkeit
- **Anwendbar auf D, D4, T, S4, S5**
 - Regeln für Präfixunifikation in K, K4 sind vorhanden
 - Matrixcharakterisierung für K, K4, B formal noch nicht abgesichert

Weitere Details in Literatur auf Webseite

MODALER MATRIXBEWEIS FÜR $\Box\forall xPx \Rightarrow \Box\forall y\Diamond Py$



- **Einzigster Pfad $\{a_3 a_7\}$ durch Konnektion abgedeckt**

Terme sind gleich unter $\sigma_Q = [a_5/a_2]$

– Induzierte Reduktionsordnung $a_5 \sqsubseteq_Q a_2$

- **Drei mögliche Präfix-Unifikatoren**

– $\sigma_{M_1} = [a_4 A_6 / A_1]$ für D, D4, S4, T; zulässig nur für D4 und S4

– $\sigma_{M_2} = [a_4 / A_1, \varepsilon / A_6]$ für D, D4, S4, T; zulässig nur für S4 und T

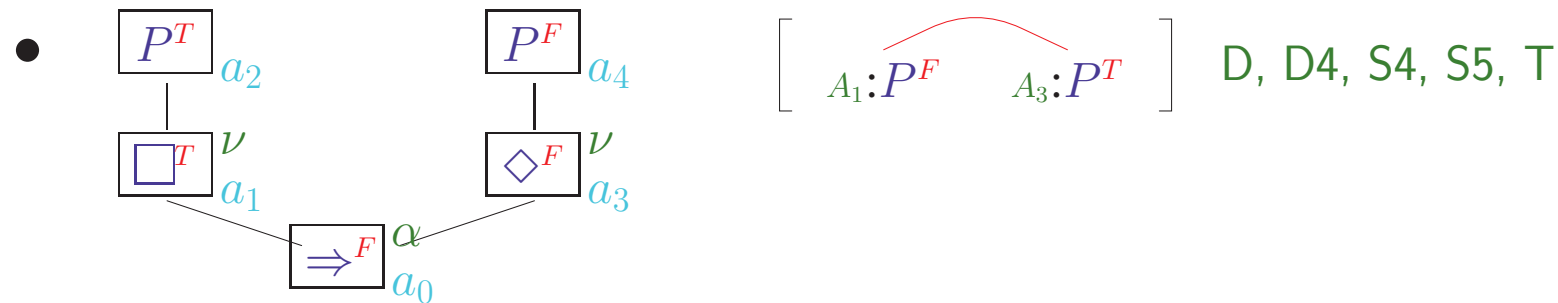
– $\sigma_{M_3} = [a_4 / A_1, a_4 / A_6]$ nur für S5, zulässig

– σ_{M_1} und σ_{M_2} verletzen Längenbedingung für D

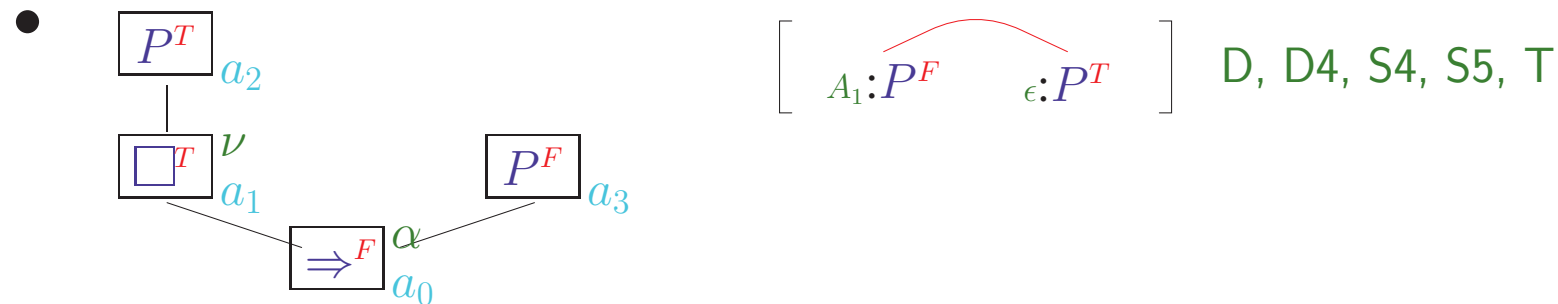
– σ_{M_1} verletzt Bedingung an δ -Positionen für T, σ_{M_2} für D4

- **Die Formel ist gültig in D4, T, S4, S5 aber nicht in D**

MATRIXBEWEISE FÜR $\Box P \Rightarrow \Diamond P$ UND $\Box P \Rightarrow P$

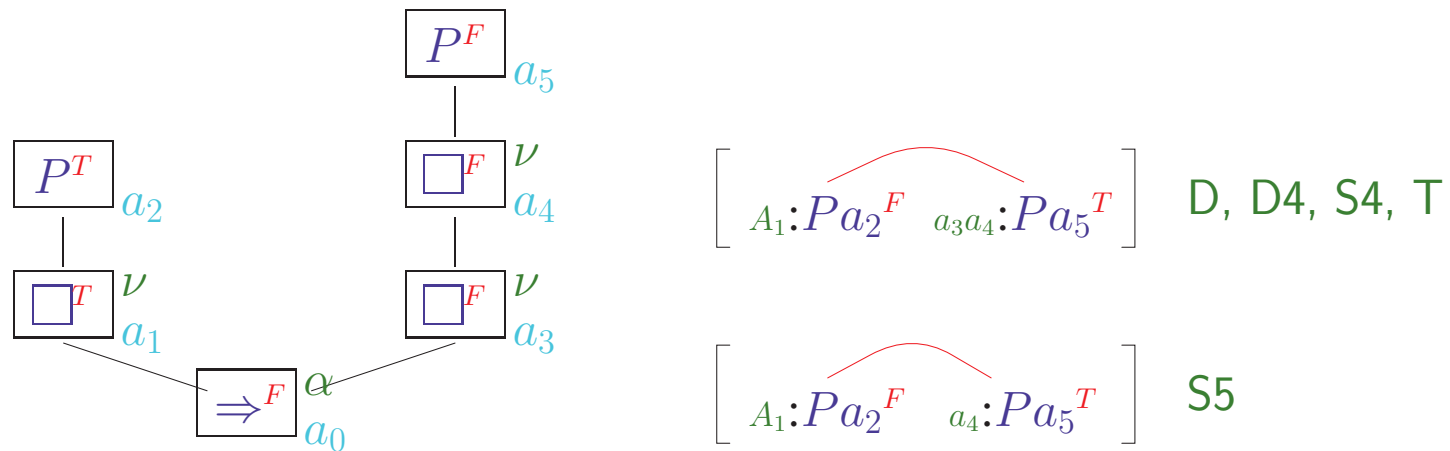


- Einziger Pfad $\{a_2 a_4\}$ durch Konnektion abgedeckt
 - Terme sind gleich
 - Allgemeinster Präfix-Unifikator $\sigma_{M_1} = [A_3/A_1]$ ist immer zulässig
- Die Formel ist gültig in D, D4, T, S4, S5 (aber nicht in K, K4, K5, B)



- Einziger Pfad $\{a_2 a_3\}$ durch Konnektion abgedeckt
 - Terme sind gleich
 - Allgemeinster Präfix-Unifikator $\sigma_{M_1} = [\epsilon/A_1]$ zulässig für T, S4, S5
- Die Formel ist gültig in T, S4, S5 (aber nicht in D, D4, K, K4, K5, B)

MODALER MATRIXBEWEIS FÜR $\Box P \Rightarrow \Box\Box P$



Einzigster Pfad $\{a_2a_3\}$ durch Konnektion abgedeckt

- Terme sind gleich
- Zwei Präfix-Unifikatoren
- $\sigma_{M_1} = [a_3a_4/A_1]$ für D, D4, S4,T; verletzt Längenbedingung für D, T
- $\sigma_{M_2} = [a_4/A_1]$ nur für S5, zulässig

Die Formel ist gültig in D4, S4, S5 (auch K4, K5, nicht in D, T, K, B)

Unifiziere Präfix-Strings konnektierter Atome

- **Ähnlich zur Präfix-Unifikation für konstruktive Logik**
 - Gleiches Transformationsverfahren im Stil von Martelli-Montanari
 - Unterschiedliche Transformationsregeln für jede Modallogik

- **Transformationsregeln für D und K**

$$R_1 \quad \{\varepsilon = \varepsilon | \varepsilon\}, \sigma \quad \rightarrow \quad \{\}, \sigma$$

$$R_2 \quad \{Vs = \varepsilon | Xt\}, \sigma \quad \rightarrow \quad \{s = \varepsilon | t\}, \{V \setminus X\} \cup \sigma, \quad V \neq X$$

$$R_3 \quad \{Xs = \varepsilon | Xt\}, \sigma \quad \rightarrow \quad \{s = \varepsilon | t\}, \sigma$$

$$R_4 \quad \{Cs = \varepsilon | Vt\}, \sigma \quad \rightarrow \quad \{Vt = \varepsilon | Cs\}, \sigma$$

Transformationsregeln für D4 und K4

$R_1 - R_4, R_7 - R_{10}$ wie bei konstruktiver Logik

$$R_5. \quad \{Vs = z | \varepsilon\}, \sigma \quad \rightarrow \quad \{s = \varepsilon | \varepsilon\}, \{V \setminus z\} \cup \sigma, \quad z \neq \varepsilon \text{ oder } V \in V' \wedge R_V^{(\sigma)}$$

$$R_6. \quad \{Vs = \varepsilon | C_1t\}, \sigma \quad \rightarrow \quad \{s = \varepsilon | C_1t\}, \{V \setminus \varepsilon\} \cup \sigma, \quad V \in V' \wedge R_V^{(\sigma)}$$

Transformationsregeln für S5

$$R_1 \{V = \varepsilon | X\}, \sigma \rightarrow \{\}, \{V \setminus X\} \cup \sigma \quad V \neq X$$

$$R_2 \{X = \varepsilon | X\}, \sigma \rightarrow \{\}, \sigma$$

$$R_3 \{C = \varepsilon | V\}, \sigma \rightarrow \{V = \varepsilon | C\}, \sigma$$

Transformationsregeln für S4 wie bei konstruktiver Logik

Transformationsregeln für T

$R_1 - R_3$ wie bei konstruktiver Logik

$$R_4 \{V s = z_v | \varepsilon\}, \sigma \rightarrow \{s = \varepsilon | \varepsilon\}, \{V \setminus z_v\} \cup \sigma$$

$$R_5 \{s_1 V s_2 = z | C t\}, \sigma \rightarrow \{s_1 = \varepsilon | z, s_2 = \varepsilon | t\}, \{V \setminus C\} \cup \sigma_V^{(\sigma)} \cup \sigma$$

$$R_6 \{s_c^+ = \varepsilon | t_v^+\}, \sigma \rightarrow \{t_v^+ = \varepsilon | s_c^+\}, \sigma$$

$$R_7 \{V s_v^+ = \varepsilon | V_1 t_v\}, \sigma \rightarrow \{V_1 t_v = V | s_v^+\}, \sigma$$

$$R_8 \{V s_v^+ = z^+ | V_1 t_v\}, \sigma \rightarrow \{V_1 t_v = V' | s_v^+\}, \{V \setminus z^+ V'\} \cup \sigma$$

$$R_9 \{X s = z | V t\}, \sigma \rightarrow \{X s = z V | t\}, \sigma, \quad X \neq V, s = \varepsilon \text{ oder } t \neq \varepsilon$$

- **Zusätzliche Quantoren für Notwendigkeit / Möglichkeit**
 - Semantik basiert auf “erreichbaren Welten”
 - Teilformeleigenschaft ist nicht mehr gültig
- **Erweiterung des Matrixkalküls erforderlich**
 - Pfade müssen weiterhin komplementäre Konnektionen enthalten
 - Komplementarität verlangt zusätzlich Unifizierbarkeit der Präfixe
 - Bisher nur für Kernlogiken D, D4, T, S4, und S5 möglich
 - Logiken K, K4, K5, B benötigen Einbettung in Logik höherer Stufe
- **Erweiterung des Extensionsverfahrens entsprechend**
 - Pfadüberprüfungsverfahren bleibt unverändert
 - Komplementaritätstest wird um Präfix-Unifikation erweitert
- **Es gibt Beweiser in Klauselform**
 - Mitführen von Präfixen ermöglicht Normalformbildung
 - **MleanCop** ist mit Abstand schnellster Beweiser für Modallogiken