Inferenzmethoden

Einheit 14

Logiken höherer Stufe

1. Lineare Logik
2. Matrixmethoden für Fragmente
3. Higher-order Logik

Lineare Logik

Ressourcen-orientierte Logik

- **Schließen über Konsequenzen von Handlungen**
  - Formeln sind Ressourcen, die aufgebraucht werden
  - Manche Ressourcen werden als wiederverwendbar gekennzeichnet
  - Adäquater für Planung und Modellierung von Aktionen
  - Keine Frame-Axiome erforderlich
- **Viele andersartige Grundoperatoren erforderlich**
  - Mehrerere Varianten von Konjunktion, Disjunktion, Implikation
    Kommutative und nichtkommutative Versionen
    Idempotente und nicht-idempotente Versionen (z.B. $A \not\models A \wedge A$)
  - Additive, multiplikative und exponentielle Operatoren
- **Logik gilt nach 30 Jahren immer noch als kompliziert**
  - Semantik von der Fachwelt nur wenig verstanden
  - Bereits aussagenlogisch unentscheidbar
  - Nur in Fragmenten automatisierbar (↦ Proof Nets / Lineare Konnektionsmethode)

Syntax und Semantik

- **Syntax der (aussagenlogischen) linearen Logik**
  - $\mathbf{1}$, $\perp$, $\top$, $\mathbf{0}$ und elementare Propositionen sind (atomare) Formeln
  - Sind A und B Formeln, dann auch
    $A^{\perp}$, $A{\otimes}B$, $A{\parr}B$, $A{\multimap}B$, $A\&B$, $A{\oplus}B$, $!A$, $?A$
  - Prädikatenlogische Syntax ist analog zur Standardlogik
- **Keine leicht zu definierende Semantik**
  - Dialogische Semantik (Game Semantics) erklärt Operatoren
  - Einfachere Semantik basiert auf Beweisbarkeit im Sequenzenkalkül
- **Lineare Logik ist als substrukturelle Logik beschreibbar**
  - Sequenzenkalkül ohne allgemeine Kontraktion und Ausdünnung
    Nur wiederverwendbare Ressourcen können verdoppelt werden
    Alle anderen Hypothesen werden "verbraucht" (Linearität)
  - Regeln definieren Bedeutung der einzelnen Operatoren

Bedeutung der Konnektive

- $A^{\perp}$: Lineare Negation (Wechsel zwischen Verwenden und Erzeugen)
- $A{\otimes}B$: Multiplikative Konjunktion, *ein* A und *ein* B
- $A\&B$: Additive Konjunktion, freie Wahl zwischen A und B (nicht beide)
- $A \parr B \equiv (A^{\perp}{\otimes}B^{\perp})^{\perp}$: Multiplikative Disjunktion
- $A{\oplus}B \equiv (A^{\perp}\&B^{\perp})^{\perp}$: Additive Disjunktion, *genau ein* A oder *ein* B
- $A \multimap B \equiv (A{\otimes}B^{\perp})^{\perp}$: Multiplikative Implikation
  - *genau ein* A wird verbraucht um *ein* B zu erzeugen
- $\mathbf{1}$: Multiplikative Einheit
  - Kann verbraucht werden, ohne daß etwas produziert werden muß
  - Kann ohne Ressourcen erzeugt werden
- $\top$: Additive Einheit
  - Kann nicht verbraucht werden
  - Kann erzeugt werden und dabei beliebige Ressourcen verbrauchen/erzeugen
- $\perp \equiv \mathbf{1}^{\perp}$: Multiplikativ leere Ressource
- $\mathbf{0} \equiv \top^{\perp}$: Additiv leere Ressource
- $!A$: A kann beliebig oft verwendet werden (Exponential)
- $?A \equiv (!(A^{\perp}))^{\perp}$: A kann beliebig oft erzeugt werden (Exponential)

Beispielformalisierungen

- **Chemische Reaktion:** 2xWasserstoff+Sauerstoff=2xWasser
  - Klassische Formel $H_2 \wedge H_2 \wedge O_2 \;\Rightarrow\; H_2O \wedge H_2O$ drückt dies nicht aus, denn dies wäre gleichwertig zu $H_2 \wedge O_2 \;\Rightarrow\; H_2O$
  - Lineare Logik beschreibt Ressourcen $H_2 \otimes H_2 \otimes O_2 \multimap H_2O \otimes H_2O$

Beispielformalisierungen

- **Chemische Reaktion:** 2xWasserstoff+Sauerstoff=2xWasser
  - Klassische Formel $H_2 \wedge H_2 \wedge O_2 \;\Rightarrow\; H_2O \wedge H_2O$ drückt dies nicht aus, denn dies wäre gleichwertig zu $H_2 \wedge O_2 \;\Rightarrow\; H_2O$
  - Lineare Logik beschreibt Ressourcen $H_2 \otimes H_2 \otimes O_2 \multimap H_2O \otimes H_2O$
- **Planungsprobleme mit Auswahl**
  - Für 6€ bekomme ich Zigaretten
    Für 6€ bekomme ich ein Tagesticket Berlin ABC
  - Klassische Logik: $6€ \Rightarrow \text{Cig},\ 6€ \Rightarrow \text{ABC} \vdash 6€ \;\Rightarrow\; \text{Cig} \wedge \text{ABC}$
  - Lineare Logik: $6€ \multimap \text{Cig},\ 6€ \multimap \text{ABC} \;\vdash\; 6€ \multimap \text{Cig} \,\&\, \text{ABC}$
    $6€ \multimap \text{Cig},\ 6€ \multimap \text{ABC} \;\vdash\; 12€ \multimap \text{Cig} \otimes \text{ABC}$

    oder sogar $!(6€ \multimap \text{Cig}),\ !(6€ \multimap \text{ABC})$
    $\vdash 12€ \multimap (\text{Cig} \otimes \text{ABC}) \,\&\, (\text{Cig} \otimes \text{Cig}) \,\&\, (\text{ABC} \otimes \text{ABC})$

Beispielformalisierungen

- **Chemische Reaktion:** 2xWasserstoff+Sauerstoff=2xWasser
  - Klassische Formel $H_2 \wedge H_2 \wedge O_2 \;\Rightarrow\; H_2O \wedge H_2O$ drückt dies nicht aus, denn dies wäre gleichwertig zu $H_2 \wedge O_2 \;\Rightarrow\; H_2O$
  - Lineare Logik beschreibt Ressourcen $H_2 \otimes H_2 \otimes O_2 \multimap H_2O \otimes H_2O$
- **Planungsprobleme mit Auswahl**
  - Für 6€ bekomme ich Zigaretten
    Für 6€ bekomme ich ein Tagesticket Berlin ABC
  - Klassische Logik: $6€ \Rightarrow \text{Cig},\ 6€ \Rightarrow \text{ABC} \vdash\ 6€ \;\Rightarrow\; \text{Cig} \wedge \text{ABC}$
  - Lineare Logik: $6€ \multimap \text{Cig},\ 6€ \multimap \text{ABC} \;\vdash\; 6€ \multimap \text{Cig} \,\&\, \text{ABC}$
    $6€ \multimap \text{Cig},\ 6€ \multimap \text{ABC} \;\vdash\; 12€ \multimap \text{Cig} \otimes \text{ABC}$
    oder sogar $!(6€ \multimap \text{Cig}),\ !(6€ \multimap \text{ABC})$
    $\vdash 12€ \multimap (\text{Cig} \otimes \text{ABC}) \,\&\, (\text{Cig} \otimes \text{Cig}) \,\&\, (\text{ABC} \otimes \text{ABC})$
- **Tagesmenü eines Restaurants**
  - $25€ \multimap ((\text{Tomatensuppe} \oplus \text{Hühnersuppe}) \,\&\, \text{Salat}) \otimes (\text{Fisch} \,\&\, \text{Rind})$
    $\otimes\ (5€ \multimap ((\text{Eiskreme} \,\&\, \text{Kuchen}) \otimes !\text{Kaffee})\ )$
  - In klassischer Logik nicht beschreibbar

Refinement Kalkül für Lineare Logik

Multiplikatives Fragment	
$H, H', A\multimap B \vdash G, G'$ $\multimap$ L $H \vdash G, A$ $H', B \vdash G'$	$H \vdash G, A\multimap B$ $\multimap$ R $H, A \vdash G, B$
$H, A\otimes B \vdash G$ $\otimes$L $H, A, B \vdash G$	$H, H' \vdash G, G', A\otimes B$ $\otimes$R $H \vdash G, A$ $H' \vdash G', B$
$H, H', A\parr B \vdash G, G'$ $\parr$L $H, A \vdash G$ $H', B \vdash G'$	$H \vdash G, A\parr B$ $\parr$R $H \vdash G, A, B$
$H, \mathbf{1} \vdash G$ $\mathbf{1}$L $H \vdash G$	$\vdash \mathbf{1}$ $\mathbf{1}$R
$\bot \vdash$ $\bot$L	$H \vdash G, \bot$ $\bot$R $H \vdash G$
Negation	
$H, A^\bot \vdash G$ $^\bot$L $H \vdash G, A$	$H \vdash G, A^\bot$ $^\bot$R $H, A \vdash G$
Allgemeine Regeln	
$H, H' \vdash G, G'$ cut $H \vdash G, A$ $H', A \vdash G'$	$A \vdash A$ axiom

Additives Fragment	
$H, \mathbf{0} \vdash G$ $\mathbf{0}$L	$H \vdash G, \top$ $\top$R
$H, A\& B' \vdash G$ &L1 $H, A \vdash G$ $H, A\& B \vdash G$ &L2 $H, B \vdash G$	$H \vdash G, A\& B$ &R $H \vdash G, A$ $H \vdash G, B$
$H, A\oplus B \vdash G$ $\oplus$L $H, A \vdash G$ $H, B \vdash G$	$H \vdash G, A\oplus B$ $\oplus$R1 $H \vdash G, A$ $H \vdash G, A\oplus B$ $\oplus$R2 $H \vdash G, B$
Exponentiale	
$H, !A \vdash G$ w-L $H \vdash G$	$H \vdash G, ?A$ w-R $H \vdash G$
$H, !A \vdash G$ c-L $H, !A, !A \vdash G$	$H \vdash G, ?A$ c-R $H \vdash G, ?A, ?A$
$H, !A \vdash G$!L $H, A \vdash G$	$H^! \vdash G^?, !A$!R $H^! \vdash G^?, A$
$H^!, ?A \vdash G^?$?L $H^!, A \vdash G^?$	$H \vdash G, ?A$?R $H \vdash G, A$

Regeln für Quantoren wie bei Prädikatenlogik

H, H', G, G' sind multi-sets. Weakening und contraction gibt es nur für Exponentiale

$H^!$ und $G^?$ bestehen nur aus den entsprechenden Exponentialen

Die Regel `axiom` darf keine verbleibenden Hypothesen haben. Es gibt keine $\mathbf{0}$R oder $\top$L regel

Beweis für $6€ \multimap Cig, 6€ \multimap ABC \vdash 12€ \multimap (Cig \otimes ABC)$

$\vdash$ (6€ ⊸ Cig) ⊸ (6€ ⊸ ABC) ⊸ ((6€ ⊗ 6€) ⊸ (Cig ⊗ ABC))

BEWEIS FÜR $6€ \multimap \text{Cig}, 6€ \multimap \text{ABC} \vdash 12€ \multimap (\text{Cig} \otimes \text{ABC})$

```
⊢ (6€⊸Cig) ⊸ (6€⊸ABC) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC)) BY ⊸R
1. 6€⊸Cig ⊢ (6€⊸ABC) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC))
```

Beweis für $6€ \multimap \mathsf{Cig},\ 6€ \multimap \mathsf{ABC} \vdash 12€ \multimap (\mathsf{Cig} \otimes \mathsf{ABC})$

$\vdash\ (6€ \multimap \mathtt{Cig})\ \multimap\ (6€ \multimap \mathtt{ABC})\ \multimap\ ((6€ \otimes 6€) \multimap (\mathtt{Cig} \otimes \mathtt{ABC}))$ BY $\multimap$R

1\. $6€ \multimap \mathtt{Cig} \vdash (6€ \multimap \mathtt{ABC})\ \multimap\ ((6€ \otimes 6€) \multimap (\mathtt{Cig} \otimes \mathtt{ABC}))$ BY $\multimap$R

1.1. $6€ \multimap \mathtt{Cig},\ 6€ \multimap \mathtt{ABC} \vdash (6€ \otimes 6€) \multimap (\mathtt{Cig} \otimes \mathtt{ABC})$

Beweis für $6€ \multimap \mathsf{Cig},\ 6€ \multimap \mathsf{ABC} \vdash 12€ \multimap (\mathsf{Cig} \otimes \mathsf{ABC})$

$\vdash (6€ \multimap \mathtt{Cig}) \multimap (6€ \multimap \mathtt{ABC}) \multimap ((6€ \otimes 6€) \multimap (\mathtt{Cig} \otimes \mathtt{ABC}))$ BY $\multimap R$

1\. $6€ \multimap \mathtt{Cig} \vdash (6€ \multimap \mathtt{ABC}) \multimap ((6€ \otimes 6€) \multimap (\mathtt{Cig} \otimes \mathtt{ABC}))$ BY $\multimap R$

1.1. $6€ \multimap \mathtt{Cig},\ 6€ \multimap \mathtt{ABC} \vdash (6€ \otimes 6€) \multimap (\mathtt{Cig} \otimes \mathtt{ABC})$ BY $\multimap R$

1.1.1. $6€ \multimap \mathtt{Cig},\ 6€ \multimap \mathtt{ABC},\ 6€ \otimes 6€ \vdash \mathtt{Cig} \otimes \mathtt{ABC}$

Beweis für $6€ \multimap \mathsf{Cig}, 6€ \multimap \mathsf{ABC} \vdash 12€ \multimap (\mathsf{Cig} \otimes \mathsf{ABC})$

$\vdash (6€ \multimap \texttt{Cig}) \multimap (6€ \multimap \texttt{ABC}) \multimap ((6€ \otimes 6€) \multimap (\texttt{Cig} \otimes \texttt{ABC}))$ BY $\multimap$R

1\. $6€ \multimap \texttt{Cig} \vdash (6€ \multimap \texttt{ABC}) \multimap ((6€ \otimes 6€) \multimap (\texttt{Cig} \otimes \texttt{ABC}))$ BY $\multimap$R

1.1. $6€ \multimap \texttt{Cig}, 6€ \multimap \texttt{ABC} \vdash (6€ \otimes 6€) \multimap (\texttt{Cig} \otimes \texttt{ABC})$ BY $\multimap$R

1.1.1. $6€ \multimap \texttt{Cig}, 6€ \multimap \texttt{ABC}, 6€ \otimes 6€ \vdash \texttt{Cig} \otimes \texttt{ABC}$ BY $\otimes$L

1.1.1.1. $6€ \multimap \texttt{Cig}, 6€ \multimap \texttt{ABC}, 6€, 6€ \vdash \texttt{Cig} \otimes \texttt{ABC}$

Beweis für $6€ \multimap Cig,\ 6€ \multimap ABC \vdash 12€ \multimap (Cig \otimes ABC)$

$\vdash$ `(6€`$\multimap$`Cig)` $\multimap$ `(6€`$\multimap$`ABC)` $\multimap$ `((6€`$\otimes$`6€)`$\multimap$`(Cig`$\otimes$`ABC))` BY $\multimap$R

1. `6€`$\multimap$`Cig` $\vdash$ `(6€`$\multimap$`ABC)` $\multimap$ `((6€`$\otimes$`6€)`$\multimap$`(Cig`$\otimes$`ABC))` BY $\multimap$R

1.1. `6€`$\multimap$`Cig, 6€`$\multimap$`ABC` $\vdash$ `(6€`$\otimes$`6€)`$\multimap$`(Cig`$\otimes$`ABC)` BY $\multimap$R

1.1.1. `6€`$\multimap$`Cig, 6€`$\multimap$`ABC, 6€`$\otimes$`6€` $\vdash$ `Cig`$\otimes$`ABC` BY $\otimes$L

1.1.1.1. `6€`$\multimap$`Cig, 6€`$\multimap$`ABC, 6€, 6€` $\vdash$ `Cig`$\otimes$`ABC` BY $\otimes$R

1.1.1.1.1. `6€`$\multimap$`Cig, 6€` $\vdash$ `Cig`

1.1.1.1.2. `6€`$\multimap$`ABC, 6€` $\vdash$ `ABC`

Beweis für $6€ \multimap \mathsf{Cig},\ 6€ \multimap \mathsf{ABC} \vdash 12€ \multimap (\mathsf{Cig} \otimes \mathsf{ABC})$

```
⊢ (6€⊸Cig) ⊸ (6€⊸ABC) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC)) BY ⊸R
1. 6€⊸Cig ⊢ (6€⊸ABC) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC))   BY ⊸R
1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC ⊢ (6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC)      BY ⊸R
1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC, 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗ABC       BY ⊗L
1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC, 6€, 6€ ⊢ Cig⊗ABC    BY ⊗R
1.1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€ ⊢ Cig                  BY ⊸L
1.1.1.1.1.1. 6€ ⊢ 6€
1.1.1.1.1.2. Cig ⊢ Cig
1.1.1.1.2. 6€⊸ABC, 6€ ⊢ ABC
```

Beweis für $6€ \multimap Cig, 6€ \multimap ABC \vdash 12€ \multimap (Cig \otimes ABC)$

`⊢ (6€⊸Cig) ⊸ (6€⊸ABC) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC))`	BY ⊸R
`1. 6€⊸Cig ⊢ (6€⊸ABC) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC))`	BY ⊸R
`1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC ⊢ (6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC)`	BY ⊸R
`1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC, 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗ABC`	BY ⊗L
`1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC, 6€, 6€ ⊢ Cig⊗ABC`	BY ⊗R
`1.1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€ ⊢ Cig`	BY ⊸L
`1.1.1.1.1.1. 6€ ⊢ 6€`	BY axiom
`1.1.1.1.1.2. Cig ⊢ Cig`	BY axiom
`1.1.1.1.2. 6€⊸ABC, 6€ ⊢ ABC`	

Beweis für $6€ \multimap Cig, 6€ \multimap ABC \vdash 12€ \multimap (Cig \otimes ABC)$

```
⊢ (6€⊸Cig) ⊸ (6€⊸ABC) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC)) BY ⊸R
1. 6€⊸Cig ⊢ (6€⊸ABC) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC))    BY ⊸R
1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC ⊢ (6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC)       BY ⊸R
1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC, 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗ABC         BY ⊗L
1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC, 6€, 6€ ⊢ Cig⊗ABC      BY ⊗R
1.1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€ ⊢ Cig                    BY ⊸L
1.1.1.1.1.1. 6€ ⊢ 6€                           BY axiom
1.1.1.1.1.2. Cig ⊢ Cig                         BY axiom
1.1.1.1.2. 6€⊸ABC, 6€ ⊢ ABC                    BY ⊸L
1.1.1.1.1.1. 6€ ⊢ 6€
1.1.1.1.1.2. ABC ⊢ ABC
```

Beweis für $6€ \multimap Cig,\ 6€ \multimap ABC \vdash 12€ \multimap (Cig \otimes ABC)$

```
⊢ (6€⊸Cig) ⊸ (6€⊸ABC) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC)) BY ⊸R
1. 6€⊸Cig ⊢ (6€⊸ABC) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC))   BY ⊸R
1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC ⊢ (6€⊗6€)⊸(Cig⊗ABC)      BY ⊸R
1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC, 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗ABC        BY ⊗L
1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸ABC, 6€, 6€ ⊢ Cig⊗ABC     BY ⊗R
1.1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€ ⊢ Cig                   BY ⊸L
1.1.1.1.1.1. 6€ ⊢ 6€                          BY axiom
1.1.1.1.1.2. Cig ⊢ Cig                        BY axiom
1.1.1.1.2. 6€⊸ABC, 6€ ⊢ ABC                   BY ⊸L
1.1.1.1.1.1. 6€ ⊢ 6€                          BY axiom
1.1.1.1.1.2. ABC ⊢ ABC                        BY axiom
```

Beweis für $!(6€ \multimap \mathsf{Cig}) \vdash 12€ \multimap (\mathsf{Cig} \otimes \mathsf{Cig})$

$\vdash \; !(6€ \multimap \texttt{Cig}) \;\multimap\; ((6€ \otimes 6€) \multimap (\texttt{Cig} \otimes \texttt{Cig}))$

Beweis für $!(6€\multimap Cig) \vdash 12€\multimap(Cig\otimes Cig)$

```
⊢ !(6€⊸Cig) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗Cig))                BY ⊸R
1. !(6€⊸Cig) ⊢ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗Cig))
```

Beweis für $!(6€ \multimap \mathsf{Cig}) \vdash 12€ \multimap (\mathsf{Cig} \otimes \mathsf{Cig})$

$\vdash\ !(6€\multimap \texttt{Cig}) \multimap ((6€\otimes 6€)\multimap(\texttt{Cig}\otimes\texttt{Cig}))$	BY $\multimap$R
1. $!(6€\multimap \texttt{Cig}) \vdash ((6€\otimes 6€)\multimap(\texttt{Cig}\otimes\texttt{Cig}))$	BY $\multimap$R
1.1. $!(6€\multimap \texttt{Cig}),\ 6€\otimes 6€ \vdash \texttt{Cig}\otimes\texttt{Cig}$	

Beweis für $!(6€ \multimap \text{Cig}) \vdash 12€ \multimap (\text{Cig} \otimes \text{Cig})$

$\vdash\ !(6€ \multimap \text{Cig}) \multimap ((6€ \otimes 6€) \multimap (\text{Cig} \otimes \text{Cig}))$	BY $\multimap$R
1. $!(6€ \multimap \text{Cig}) \vdash ((6€ \otimes 6€) \multimap (\text{Cig} \otimes \text{Cig}))$	BY $\multimap$R
1.1. $!(6€ \multimap \text{Cig}),\ 6€ \otimes 6€ \vdash \text{Cig} \otimes \text{Cig}$	BY c-L
1.1.1. $!(6€ \multimap \text{Cig}),\ !(6€ \multimap \text{Cig}),\ 6€ \otimes 6€ \vdash \text{Cig} \otimes \text{Cig}$	

Beweis für $!(6€ \multimap \mathsf{Cig}) \vdash 12€ \multimap (\mathsf{Cig} \otimes \mathsf{Cig})$

$\vdash\ !(6€ \multimap \mathtt{Cig})\ \multimap\ ((6€ \otimes 6€) \multimap (\mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}))$	BY $\multimap$R
1. $!(6€ \multimap \mathtt{Cig}) \vdash ((6€ \otimes 6€) \multimap (\mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}))$	BY $\multimap$R
1.1. $!(6€ \multimap \mathtt{Cig}),\ 6€ \otimes 6€ \vdash \mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}$	BY c-L
1.1.1. $!(6€ \multimap \mathtt{Cig}),\ !(6€ \multimap \mathtt{Cig}),\ 6€ \otimes 6€ \vdash \mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}$	BY !L
1.1.1.1. $6€ \multimap \mathtt{Cig},\ !(6€ \multimap \mathtt{Cig}),\ 6€ \otimes 6€ \vdash \mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}$	

Beweis für $!(6€ \multimap \text{Cig}) \vdash 12€ \multimap (\text{Cig} \otimes \text{Cig})$

```
⊢ !(6€⊸Cig) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗Cig))                   BY ⊸R
1. !(6€⊸Cig) ⊢ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗Cig))                  BY ⊸R
1.1. !(6€⊸Cig), 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗Cig                      BY c-L
1.1.1. !(6€⊸Cig), !(6€⊸Cig), 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗Cig         BY !L
1.1.1.1. 6€⊸Cig, !(6€⊸Cig), 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗Cig          BY !L
1.1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸Cig, 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗Cig
```

BEWEIS FÜR $!(6€ \multimap \mathsf{Cig}) \vdash 12€ \multimap (\mathsf{Cig} \otimes \mathsf{Cig})$

```
⊢ !(6€⊸Cig) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗Cig))                    BY ⊸R
1. !(6€⊸Cig) ⊢ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗Cig))                    BY ⊸R
1.1. !(6€⊸Cig), 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗Cig                        BY c-L
1.1.1. !(6€⊸Cig), !(6€⊸Cig), 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗Cig           BY !L
1.1.1.1. 6€⊸Cig, !(6€⊸Cig), 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗Cig            BY !L
1.1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸Cig, 6€⊗6€ ⊢ Cig⊗Cig             BY ⊗L
1.1.1.1.1.1 6€⊸Cig, 6€⊸Cig, 6€, 6€ ⊢ Cig⊗Cig
```

Beweis für $!(6€ \multimap Cig) \vdash 12€ \multimap (Cig \otimes Cig)$

$\vdash$!(6€$\multimap$Cig) $\multimap$ ((6€$\otimes$6€)$\multimap$(Cig$\otimes$Cig)) BY $\multimap$R

1. !(6€$\multimap$Cig) $\vdash$ ((6€$\otimes$6€)$\multimap$(Cig$\otimes$Cig)) BY $\multimap$R

1.1. !(6€$\multimap$Cig), 6€$\otimes$6€ $\vdash$ Cig$\otimes$Cig BY c-L

1.1.1. !(6€$\multimap$Cig), !(6€$\multimap$Cig), 6€$\otimes$6€ $\vdash$ Cig$\otimes$Cig BY !L

1.1.1.1. 6€$\multimap$Cig, !(6€$\multimap$Cig), 6€$\otimes$6€ $\vdash$ Cig$\otimes$Cig BY !L

1.1.1.1.1. 6€$\multimap$Cig, 6€$\multimap$Cig, 6€$\otimes$6€ $\vdash$ Cig$\otimes$Cig BY $\otimes$L

1.1.1.1.1.1 6€$\multimap$Cig, 6€$\multimap$Cig, 6€, 6€ $\vdash$ Cig$\otimes$Cig BY $\otimes$R

1.1.1.1.1.1.1. 6€$\multimap$Cig, 6€ $\vdash$ Cig

1.1.1.1.1.1.2. 6€$\multimap$Cig, 6€ $\vdash$ Cig

Beweis für $!(6€ \multimap Cig) \vdash 12€ \multimap (Cig \otimes Cig)$

$\vdash$!(6€⊸Cig) ⊸ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗Cig))	BY ⊸R
1. !(6€⊸Cig) $\vdash$ ((6€⊗6€)⊸(Cig⊗Cig))	BY ⊸R
1.1. !(6€⊸Cig), 6€⊗6€ $\vdash$ Cig⊗Cig	BY c-L
1.1.1. !(6€⊸Cig), !(6€⊸Cig), 6€⊗6€ $\vdash$ Cig⊗Cig	BY !L
1.1.1.1. 6€⊸Cig, !(6€⊸Cig), 6€⊗6€ $\vdash$ Cig⊗Cig	BY !L
1.1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€⊸Cig, 6€⊗6€ $\vdash$ Cig⊗Cig	BY ⊗L
1.1.1.1.1.1 6€⊸Cig, 6€⊸Cig, 6€, 6€ $\vdash$ Cig⊗Cig	BY ⊗R
1.1.1.1.1.1.1. 6€⊸Cig, 6€ $\vdash$ Cig	BY ⊸L
1.1.1.1.1.1.1.1. 6€ $\vdash$ 6€	BY axiom
1.1.1.1.1.1.1.2. Cig $\vdash$ Cig	BY axiom
1.1.1.1.1.1.2. 6€⊸Cig, 6€ $\vdash$ Cig	

Beweis für $!(6€ \multimap \mathsf{Cig}) \vdash 12€ \multimap (\mathsf{Cig} \otimes \mathsf{Cig})$

$\vdash\ !(6€ \multimap \mathtt{Cig})\ \multimap\ ((6€ \otimes 6€) \multimap (\mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}))$	BY $\multimap$R
1. $!(6€ \multimap \mathtt{Cig}) \vdash ((6€ \otimes 6€) \multimap (\mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}))$	BY $\multimap$R
1.1. $!(6€ \multimap \mathtt{Cig}),\ 6€ \otimes 6€ \vdash \mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}$	BY c-L
1.1.1. $!(6€ \multimap \mathtt{Cig}),\ !(6€ \multimap \mathtt{Cig}),\ 6€ \otimes 6€ \vdash \mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}$	BY !L
1.1.1.1. $6€ \multimap \mathtt{Cig},\ !(6€ \multimap \mathtt{Cig}),\ 6€ \otimes 6€ \vdash \mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}$	BY !L
1.1.1.1.1. $6€ \multimap \mathtt{Cig},\ 6€ \multimap \mathtt{Cig},\ 6€ \otimes 6€ \vdash \mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}$	BY $\otimes$L
1.1.1.1.1.1 $6€ \multimap \mathtt{Cig},\ 6€ \multimap \mathtt{Cig},\ 6€,\ 6€ \vdash \mathtt{Cig} \otimes \mathtt{Cig}$	BY $\otimes$R
1.1.1.1.1.1.1. $6€ \multimap \mathtt{Cig},\ 6€ \vdash \mathtt{Cig}$	BY $\multimap$L
1.1.1.1.1.1.1.1. $6€ \vdash 6€$	BY axiom
1.1.1.1.1.1.1.2. $\mathtt{Cig} \vdash \mathtt{Cig}$	BY axiom
1.1.1.1.1.1.2. $6€ \multimap \mathtt{Cig},\ 6€ \vdash \mathtt{Cig}$	BY $\multimap$L
1.1.1.1.1.1.2.1. $6€ \vdash 6€$	BY axiom
1.1.1.1.1.1.2.2. $\mathtt{Cig} \vdash \mathtt{Cig}$	BY axiom

Beweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$$\vdash \; ((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$$

Beweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash\ ((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$ BY $\parr$R

1. $\vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A),\ (A \parr B)^\perp$

Beweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash\ ((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$	`BY` $\parr$R
`1.` $\vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A),\ \ (A \parr B)^\perp$	`BY` $^\perp$R
`1.1.` $A \parr B \vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)$	

BEWEIS FÜR $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash\ ((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$	BY $\parr$R
1. $\vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A),\ \ (A \parr B)^\perp$	BY $^\perp$R
1.1. $A \parr B \vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)$	BY $\otimes$R
1.1.1. $\vdash\ A \parr A^\perp$	
1.1.2. $A \parr B \vdash\ B \parr A$	

Beweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash\ ((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$	BY $\parr$R
1. $\vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A),\ \ (A \parr B)^\perp$	BY $^\perp$R
1.1. $A \parr B \vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)$	BY $\otimes$R
1.1.1. $\vdash\ A \parr A^\perp$	BY $\parr$R
1.1.1.1. $\vdash\ A, A^\perp$	
1.1.2. $A \parr B \vdash\ B \parr A$	

Beweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash ((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$	BY $\parr$R
1. $\vdash (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A),\ (A \parr B)^\perp$	BY $^\perp$R
1.1. $A \parr B \vdash (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)$	BY $\otimes$R
1.1.1. $\vdash A \parr A^\perp$	BY $\parr$R
1.1.1.1. $\vdash A, A^\perp$	BY $^\perp$R
1.1.1.1.1. $A \vdash A$	
1.1.2. $A \parr B \vdash B \parr A$	

Beweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash\ ((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$	BY $\parr$R
1. $\vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A),\ \ (A \parr B)^\perp$	BY $^\perp$R
1.1. $A \parr B \vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)$	BY $\otimes$R
1.1.1. $\vdash\ A \parr A^\perp$	BY $\parr$R
1.1.1.1. $\vdash\ A, A^\perp$	BY $^\perp$R
1.1.1.1.1. $A \vdash\ A$	BY axiom
1.1.2. $A \parr B \vdash\ B \parr A$	

Beweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash ((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$	BY $\parr$R
1. $\vdash (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A),\ (A \parr B)^\perp$	BY $^\perp$R
1.1. $A \parr B \vdash (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)$	BY $\otimes$R
1.1.1. $\vdash A \parr A^\perp$	BY $\parr$R
1.1.1.1. $\vdash A, A^\perp$	BY $^\perp$R
1.1.1.1.1. $A \vdash A$	BY axiom
1.1.2. $A \parr B \vdash B \parr A$	BY $\parr$R
1.1.2.1. $A \parr B \vdash B, A$	

Beweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash\ ((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$	BY $\parr$R
1. $\vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A),\ (A \parr B)^\perp$	BY $^\perp$R
1.1. $A \parr B \vdash (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)$	BY $\otimes$R
1.1.1. $\vdash\ A \parr A^\perp$	BY $\parr$R
1.1.1.1. $\vdash\ A, A^\perp$	BY $^\perp$R
1.1.1.1.1. $A \vdash A$	BY axiom
1.1.2. $A \parr B \vdash B \parr A$	BY $\parr$R
1.1.2.1. $A \parr B \vdash B, A$	BY $\parr$L
1.1.2.1.1. $B \vdash B$	
1.1.2.1.2. $A \vdash A$	

Beweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash\ ((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$	BY $\parr$R
1. $\vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A),\ \ (A \parr B)^\perp$	BY $^\perp$R
1.1. $A \parr B \vdash\ (A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)$	BY $\otimes$R
1.1.1. $\vdash\ A \parr A^\perp$	BY $\parr$R
1.1.1.1. $\vdash\ A, A^\perp$	BY $^\perp$R
1.1.1.1.1. $A \vdash\ A$	BY axiom
1.1.2. $A \parr B \vdash\ B \parr A$	BY $\parr$R
1.1.2.1. $A \parr B \vdash\ B, A$	BY $\parr$L
1.1.2.1.1. $B \vdash\ B$	BY axiom
1.1.2.1.2. $A \vdash\ A$	BY axiom

Matrixbasierte Beweissuche für Lineare Logik

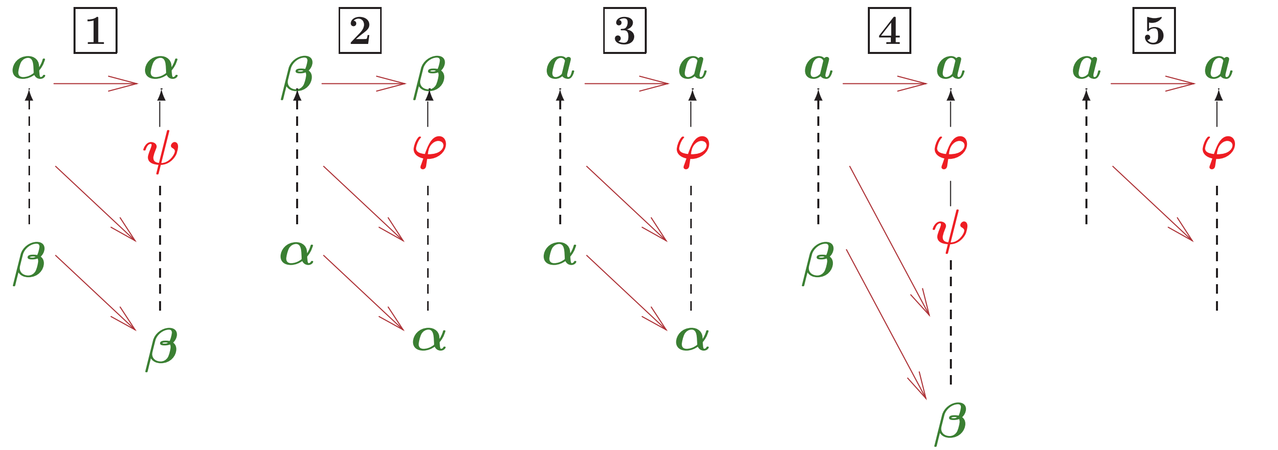
- **Erweiterte Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
  - **F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär**
  - Komplementaritätsbegriff muß ergänzt werden
    - Unifizierbarkeit der konnektierten Terme (wenn Prädikatenlogik)
    - Erreichbarkeit der Literale bei exakter Verwendung der Ressourcen
- **Erweitertes Beweissuchverfahren**
  - Unverändertes konnektionen-orientiertes Pfadüberprüfungsverfahren
  - Erweiterter Komplementaritätstest
    - Termunifikation liefert Substitution σ_Q von γ-Variablen durch Terme
    - Präfixunifikation liefert Substitution σ_L für lineare Präfixe
    - Zusätzliche Linearitätstests sichern Ressourcenverwendung
  - Substitutionen liefern Reihenfolge von Regeln im Sequenzenbeweis
- **Bisher nur für multiplikatives Fragment gelungen**
  - Charakterisierung + Beweisverfahren für $\mathcal{MLL}$ $(\multimap, \otimes, \parr, \mathbf{1}, \bot, {}^{\bot})$
  - Matrixcharakterisierung für $\mathcal{MELL}$ $(\mathcal{MLL}$ + Exponentiale $!, ?))$
  - Für $\mathcal{ALL}$ $(\&, \oplus, \mathbf{0}, \top, {}^{\bot})$ gibt es nur separate Verfahren $\mapsto$ Galmiche

Lineare Positionsbäume

- **Zuordnung von Typen und Polaritäten** (analog zu $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\neg$)
  - Wurzel hat Polarität F
  - Nachfolgerpolaritäten und -typen werden tabellarisch bestimmt

α	$(A\otimes B)^T$	$(A⅋B)^F$	$(A\multimap B)^F$	β	$(A\otimes B)^F$	$(A⅋B)^T$	$(A\multimap B)^T$	o	$(A^\perp)^T$	$(A^\perp)^F$
α_1	A^T	A^F	A^T	β_1	A^F	A^T	A^F	o_1	A^F	A^T
α_2	B^T	B^F	B^F	β_2	B^F	B^T	B^T			

- **Ergänze lineare Positionen φ, ψ zum Formelbaum**
  - Wende die folgenden fünf Erweiterungsregeln solange wie möglich an



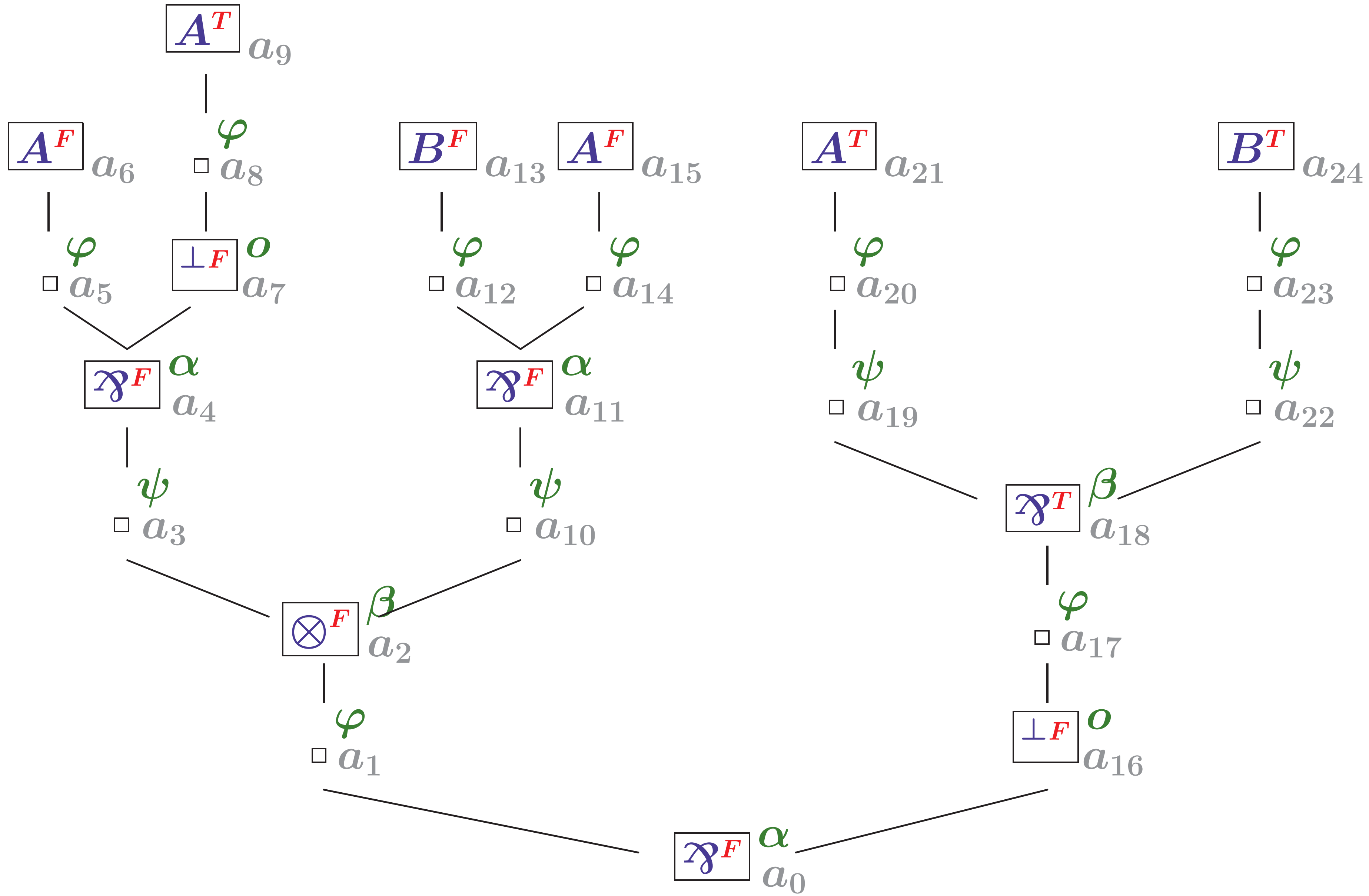
α, β, a stehen für α-, β-, atomare Positionen

- - - steht für beliebig viele o-Positionen

z.B. $\boxed{1}$: Füge ψ-Position unmittelbar vor α ein, wenn vor α ein β vorkommt

  - Entstehender Baum ist **linearer Positionsbaum** der Formel
  - φ-Positionen gelten als Variablen, ψ-Positionen als Konstante

Positionsbaum für $((A \parr A^{\perp}) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^{\perp}$



Lineare Präfixe

- **Lineare Positionen codieren Linearitätsbedingungen**
  – Trennen α-Ebenen von β-Ebenen und atomare Positionen vom Rest
  – Helfen sicherzustellen, daß jede Position genau einmal verwendet wird und Sequenzenregeln in der richtigen Reihenfolge angewandt werden
  – Stellen sicher, daß Ressourcen korrekt aufgeteilt werden können
  – Technische Verwendung ähnlich wie bei konstruktiver Logik
- **Bestimme lineares Präfix eines Atoms P**
  – Liste der linearen Positionen zwischen Wurzel und P
- **Definiere lineare Substitution σ_L**
  – Abbildung von φ-Positionen in Strings über linearen Positionen
  – σ_L induziert Reduktionsordnung $\sqsubseteq_L$ auf linearen Positionen:
  Ist $\sigma_L(u) = v_1...v_n$ dann gilt $v_i \sqsubseteq_L u$ für jede ψ-Position v_i
- **Lineare Multiplizität nur für Exponentiale ($\mathcal{MELL}$)**

Komplementaritätsbedingungen

Komplexeres Kriterium als in konstruktiver Logik

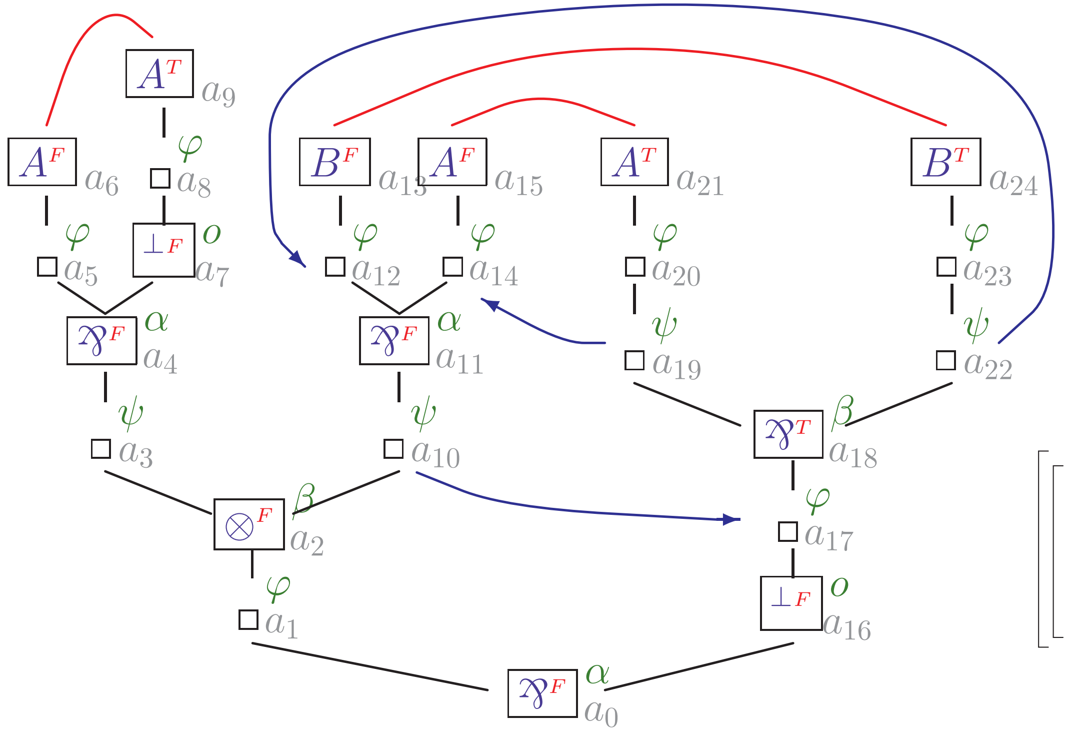
- **Aufspannende Menge $\mathcal{C}on$ von Konnektionen**
  – Jeder Pfad durch Positionsbaum enthält Konnektion aus $\mathcal{C}on$
- **Komplementarität jeder Konnektionen $\{u, v\}$**
  – $\sigma_L(pre(u))=\sigma_L(pre(v))$ (ggf. auch Komplementarität unter σ_Q)
- **Zulässigkeit von σ_L**
  – Ist $\sigma_L(pre(u)) = s_1 v s_2$, dann muß $\sigma_L(pre(v))=s_1 v$ sein
- **Linearität von $\mathcal{C}on$**
  – Jede atomare Position ist maximal einmal konnektiert
  – Keine Ressource wird mehrfach verwendet
- **Relevanz von F für $\mathcal{C}on$**
  – Jede atomare Position ist mindestens einmal konnektiert
  – Jede Ressource wird auch eingesetzt
- **Minimalität von $\mathcal{C}on$**
  – Keine echte Teilmenge von $\mathcal{C}on$ spannt den Positionsbaum auf

MATRIXCHARAKTERISIERUNG FÜR $\mathcal{MLL}$

- **Wichtige Erkenntnisse**
  - Ist eine aufspannde Paarung $\mathcal{C}on$ σ_L-komplementär für F, dann ist die induzierte Ordnung $\lhd = (< \cup \sqsubset_L)^+$ irreflexiv
  - Ist eine aufspannde Paarung $\mathcal{C}on$ σ_L-komplementär für F und σ_L zulässig, dann ist $\mathcal{C}on$ linear (vereinfacht die Matrixcharakterisierung)
  - Ist eine aufspannde Paarung $\mathcal{C}on$ σ_L-komplementär für F, linear und relevant, dann ist $\mathcal{C}on$ genau dann minimal, wenn $|\mathcal{C}on| = \#_\beta(F) + 1$ (vereinfacht den Test auf Minimalität)

Eine Formel F ist gültig in $\mathcal{MLL}$, wenn es eine zulässige Substitution σ_L und eine minimale Menge $\mathcal{C}on$ von σ_L-komplementären Konnektionen gibt, so daß F relevant für $\mathcal{C}on$ ist und jeder Pfad durch den Positionsbaum von F ein Element von $\mathcal{C}$ enthält

Matrixbeweis für $((A \parr A^{\perp}) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^{\perp}$



$$\left[\begin{matrix}\left[\begin{matrix}\left[\begin{matrix} A_1a_3A_5{:}A^F & A_1a_3A_8{:}A^T\end{matrix}\right] \\ \left[\begin{matrix} A_1a_{10}A_{12}{:}B^F & A_1a_{10}A_{14}{:}A^F\end{matrix}\right]\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix} A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T\end{matrix}\right]\end{matrix}\right]$$

- **Alle vier Pfade sind durch drei Konnektion aufgespannt**
  - $\mathcal{C}on = \{\{a_6, a_9\},\ \{a_{15}, a_{21}\},\ \{a_{13}, a_{24}\}\}$
  - **$\mathcal{C}on$ ist minimal** (es gibt zwei β-Positionen in F)
  - **F ist relevant für $\mathcal{C}on$** (alle atomaren Positionen erscheinen in $\mathcal{C}on$)
  - **$\mathcal{C}on$ ist σ_L-komplementär** für die zulässige Substition

    $\sigma_L = \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\}$
- **Die Formel ist gültig in $\mathcal{MLL}$**

Extensionsverfahren für $\mathcal{MLL}$

- **Pfadüberprüfungsverfahren wird geringfügig erweitert**
  - Regeln aus Einheit 6 müssen verwendete Konnektionen verwalten
  - Linearitätstest wird dynamisch im Extensionsschritt durchgeführt
    Guter Filter, um erfolglose Suchpfade frühzeitig zu eliminieren
  - Keine Reduktionsregel (Anwendung würde Linearität verletzen)
  - Relevanz und Minimalität muß separat am Ende geprüft werden
- **Komplementaritätstest wird erweitert**
  - Termunifikationsverfahren entfällt für $\mathcal{MLL}$
  - Präfixunifikationsverfahren mit Logik-spezifischen Regeln
  - Überprüfung der Zulässigkeit separat am Ende
- **Verfahren bisher nur auf $\mathcal{MLL}$ anwendbar**
  - Matrixcharakterisierung für $\mathcal{MELL}$ ist komplexer und benötigt
    Multiplizitäten, Weakening-Tabelle, aufwendigere Präfixunifikation

Konnektionskalkül für lineare Matrizen

- **Regeln verwalten Objekte der Form $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma, \mathcal{C}on$**
  - Aktuelle Klausel, Restmatrix, Pfad, Substitution, Konnektionsmenge
  - Substitution σ und Konnektionsmenge $\mathcal{C}on$ werden lokal bestimmt, und an Unterziele weitergereicht und von dort zurückgereicht
- **Startregel**
  - Für Beweis von $\mathcal{M}$ wähle Startziel $\mathcal{C}{=}\mathcal{M}$, setze $\mathcal{P}{=}\{\}$, $\sigma{=}[\,]$, $\mathcal{C}on{=}\{\,\}$

$\vdash \mathcal{M}$ ret $\sigma, \mathcal{C}on$

$\quad\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, [\,], \{\,\}$ ret $\sigma, \mathcal{C}on$

$\quad\vdash \text{admissible}(\sigma)$

$\quad\vdash |\mathcal{C}on| = \#_\beta(\mathcal{M}) + 1$

$\quad\vdash \text{atoms}(\mathcal{M}) \subseteq \bigcup \mathcal{C}on$ Start

  - Substitution und Konnektionsmenge werden im Unterziels bestimmt und auf Zulässigkeit, Minimalität und Relevanz geprüft

Regeln des linearen Konnektionskalküls

- **Bereinigung: Abschluß des aktuellen Pfades**
  - $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \mathcal{C}on$ ist beweisbar, wenn $\mathcal{C}$ leer ist

    $\boxed{\vdash \{\}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma, \mathcal{C}on \qquad \text{ret } \sigma, \mathcal{C}on}$ $\quad$ `Axiom`

  - Regel schließt einen Ast im Konnektionskalkülbeweis
  - Eingabesubstitution und -konnektionsmenge werden Rückgabewert

- **Extension: Verlängerung des aktuellen Pfades**
  - $\mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \mathcal{C}on$ ist beweisbar, wenn es $L \in \mathcal{C}$, $L' \sim_\alpha \mathcal{P} \cup \{L\}$ gibt, sodaß $c = \{L, L'\}$ komplementär, $c \in \mathcal{C}on$ oder $c \cap \bigcup \mathcal{C}on = \emptyset$ (Linearität) und $L'_\beta(\mathcal{P} \cup \{L\}), \mathcal{M}, \mathcal{P} \cup \{L\}$ sowie $\mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}$ beweisbar sind

$$\begin{array}{|ll|}\hline
\vdash \mathcal{C}, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma, \mathcal{C}on & \text{ret } \sigma_2, \mathcal{C}on_2 \\
\quad \vdash L'_\beta(\mathcal{P} \cup \{L\}), \mathcal{M}, \mathcal{P} \cup \{L\}, \sigma\rho, \mathcal{C}on \cup \{L, L'\} & \text{ret } \sigma_1, \mathcal{C}on_1 \\
\quad \vdash \mathcal{C} \cap L_\beta, \mathcal{M}, \mathcal{P}, \sigma_1, \mathcal{C}on_1 & \text{ret } \sigma_2, \mathcal{C}on_2 \\
\quad \vdash L \in \mathcal{C} & \\
\quad \vdash L' \sim_\alpha \mathcal{P} \cup \{L\} & \\
\quad \vdash \sigma\rho(L') = \sigma\rho(\overline{L}) & \\
\quad \vdash \{L, L'\} \in \mathcal{C}on \vee \{L, L'\} \cap \bigcup \mathcal{C}on = \emptyset & \\ \hline
\end{array} \quad \texttt{Extension } L, L', \rho$$

  - Bisherige Substitution und Konnektionsmenge kann erweitert werden
  - Resultat des ersten Teilziels wird weitergereicht, dann zurückgegeben

Extensionsbeweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash \mathcal{M}$

$$\left[\left[\begin{bmatrix} A_1 a_3 A_5 : A^F & A_1 a_3 A_8 : A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 a_{10} A_{12} : B^F & A_1 a_{10} A_{14} : A^F \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} A_{17} a_{19} A_{20} : A^T \\ A_{17} a_{22} A_{23} : B^T \end{bmatrix}\right]$$

Extensionsbeweis für $((A ⅋ A^{\perp}) \otimes (B ⅋ A)) ⅋ (A ⅋ B)^{\perp}$

$\vdash\ \mathcal{M}$ BY Start

1. $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,],\ \{\}$

$$\left[\left[\begin{bmatrix} A_1 a_3 A_5{:}A^F & A_1 a_3 A_8{:}A^T \end{bmatrix} \atop \begin{bmatrix} A_1 a_{10} A_{12}{:}B^F & A_1 a_{10} A_{14}{:}A^F \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} A_{17} a_{19} A_{20}{:}A^T \\ A_{17} a_{22} A_{23}{:}B^T \end{bmatrix}\right]$$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash \mathcal{M}$	BY Start
1. $\vdash \mathcal{M}, \mathcal{M}, \{\}, [\,], \{\}$	BY Extension A^F, A^T, ρ_1
1.1. $\vdash \{\,\}, \mathcal{M}, \{A^F\}, \sigma_1, \{\{A^F, A^T\}\}$	
1.2. $\vdash \{B^F, A^F\}, \mathcal{M}, \{\,\},$	

$$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$$

$$\left[\left[\begin{bmatrix} A_1 a_3 A_5{:}A^F & A_1 a_3 A_8{:}A^T \end{bmatrix} \atop \begin{bmatrix} A_1 a_{10} A_{12}{:}B^F & A_1 a_{10} A_{14}{:}A^F \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} A_{17} a_{19} A_{20}{:}A^T \\ A_{17} a_{22} A_{23}{:}B^T \end{bmatrix}\right]$$

$\sigma_1 = \rho_1 \quad = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$

Extensionsbeweis für $((A⅋A^\perp)\otimes(B⅋A))⅋(A⅋B)^\perp$

$\vdash\ \mathcal{M}$	BY Start
1. $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,],\ \{\}$	BY Extension A^F, A^T, ρ_1
1.1. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	BY Axiom $\qquad \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$
1.2. $\vdash\ \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},$	

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$

$$\left[\begin{bmatrix}\left[A_1a_3A_5{:}A^F \quad A_1a_3A_8{:}A^T\right] \\ \left[A_1a_{10}A_{12}{:}B^F \quad A_1a_{10}A_{14}{:}A^F\right]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T\end{bmatrix}\right]$$

$\sigma_1 = \rho_1 \quad = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$

EXTENSIONSBEWEIS FÜR $((A \parr A^{\perp}) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^{\perp}$

$\vdash\ \mathcal{M}$ BY Start

1. $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,],\ \{\}$ BY Extension A^F, A^T, ρ_1

1.1. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$ BY Axiom $\sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$

1.2. $\vdash\ \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$

$$\left[\left[\begin{matrix}A_1 a_3 A_5{:}A^F & A_1 a_3 A_8{:}A^T\end{matrix}\right] \atop \left[\begin{matrix}A_1 a_{10} A_{12}{:}B^F & A_1 a_{10} A_{14}{:}A^F\end{matrix}\right]\right] \left[\begin{matrix}A_{17} a_{19} A_{20}{:}A^T \\ A_{17} a_{22} A_{23}{:}B^T\end{matrix}\right]$$

$\sigma_1 = \rho_1 \quad = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^{\perp}) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^{\perp}$

$\vdash \mathcal{M}$	BY Start	
1. $\vdash \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [],\ \{\}$	BY Extension A^F, A^T, ρ_1	
1.1. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	BY Axiom	$\sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$
1.2. $\vdash \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	BY Extension B^F, B^T, ρ_2	
1.2.1. $\vdash \{A^T\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_2,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$		
1.2.2. $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{\},$		

$$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$$

$$\left[\left[\begin{array}{cc} [A_1a_3A_5{:}A^F & A_1a_3A_8{:}A^T] \\ [A_1a_{10}A_{12}{:}B^F & A_1a_{10}A_{14}{:}A^F] \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T \end{array}\right]\right]$$

$$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$$

$\sigma_1 = \rho_1 \quad = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$

$\sigma_2 = \sigma_1\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash\ \mathcal{M}$	BY Start	
1. $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,],\ \{\}$	BY Extension A^F, A^T, ρ_1	
1.1. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	BY Axiom	$\sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$
1.2. $\vdash\ \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	BY Extension B^F, B^T, ρ_2	
1.2.1. $\vdash\ \{A^T\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_2,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$		
	BY Extension A^T, A^F, ρ_3	
1.2.1.1. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^F, A^T\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$		
1.2.1.2. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},$		
1.2.2. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},$		

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$ $\qquad$ $\rho_3 = \{a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20}\}$

$$\left[\begin{bmatrix} \left[A_1a_3A_5{:}A^F \quad A_1a_3A_8{:}A^T \right] \\ \left[A_1a_{10}A_{12}{:}B^F \quad A_1a_{10}A_{14}{:}A^F \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T \end{bmatrix}\right]$$

$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \rho_1 &&= \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\} \\ \sigma_2 &= \sigma_1\rho_2 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\} \\ \sigma_3 &= \sigma_2\rho_3 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12}, \\ & && \quad a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\} \end{aligned}$$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^\perp)\otimes(B \parr A))\parr(A \parr B)^\perp$

$\vdash\ \mathcal{M}$ — BY Start

1\. $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,],\ \{\}$ — BY Extension A^F, A^T, ρ_1

1.1. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$ — BY Axiom — $\sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$

1.2. $\vdash\ \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$ — BY Extension B^F, B^T, ρ_2

1.2.1. $\vdash\ \{A^T\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_2,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$

BY Extension A^T, A^F, ρ_3

1.2.1.1. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^F, A^T\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$

BY Axiom — $\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$

1.2.1.2. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},$

1.2.2. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},$

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$

$\rho_3 = \{a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20}\}$

$$\left[\ \left[\begin{matrix}\left[\begin{matrix} A_1a_3A_5{:}A^F & A_1a_3A_8{:}A^T\end{matrix}\right] \\[2ex] \left[\begin{matrix} A_1a_{10}A_{12}{:}B^F & A_1a_{10}A_{14}{:}A^F\end{matrix}\right]\end{matrix}\right]\ \left[\begin{matrix} A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\[2ex] A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T\end{matrix}\right]\ \right]$$

$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$\sigma_1 = \rho_1 \quad = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$

$\sigma_2 = \sigma_1\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$\sigma_3 = \sigma_2\rho_3 = \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},$
$\quad a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\}$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^{\perp}) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^{\perp}$

$\vdash \mathcal{M}$ BY Start

1. $\vdash \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,],\ \{\}$ BY Extension A^F, A^T, ρ_1

1.1. $\vdash \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$ BY Axiom $\quad \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$

1.2. $\vdash \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$ BY Extension B^F, B^T, ρ_2

1.2.1. $\vdash \{A^T\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_2,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$
BY Extension A^T, A^F, ρ_3

1.2.1.1. $\vdash \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^F, A^T\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$
BY Axiom $\quad \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$

1.2.1.2. $\vdash \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$

1.2.2. $\vdash \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},$

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$ $\qquad \rho_3 = \{a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20}\}$

$$\left[\left[\begin{array}{c} \left[A_1a_3A_5{:}A^F \quad A_1a_3A_8{:}A^T\right] \\ \left[A_1a_{10}A_{12}{:}B^F \quad A_1a_{10}A_{14}{:}A^F\right] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T \end{array}\right]\right]$$

$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \rho_1 &&= \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\} \\
\sigma_2 &= \sigma_1\rho_2 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\} \\
\sigma_3 &= \sigma_2\rho_3 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12}, \\
& && \quad a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\}
\end{aligned}$$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^{\perp}) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^{\perp}$

$\vdash \mathcal{M}$	`BY Start`	
`1.` $\vdash \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [],\ \{\}$	`BY Extension` A^F, A^T, ρ_1	
`1.1.` $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	`BY Axiom`	$\sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$
`1.2.` $\vdash \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	`BY Extension` B^F, B^T, ρ_2	
`1.2.1.` $\vdash \{A^T\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_2,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$		
	`BY Extension` A^T, A^F, ρ_3	
`1.2.1.1.` $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{B^F, A^T\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$		
	`BY Axiom`	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
`1.2.1.2.` $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$		
	`BY Axiom`	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
`1.2.2.` $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{\},$		

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$ $\qquad$ $\rho_3 = \{a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20}\}$

$$\left[\left[\begin{array}{cc} \left[A_1a_3A_5{:}A^F \quad A_1a_3A_8{:}A^T\right] \\ \left[A_1a_{10}A_{12}{:}B^F \quad A_1a_{10}A_{14}{:}A^F\right] \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T \end{array}\right]\right]$$

$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \rho_1 &&= \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\} \\ \sigma_2 &= \sigma_1\rho_2 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\} \\ \sigma_3 &= \sigma_2\rho_3 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12}, \\ & && \quad a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\} \end{aligned}$$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^{\perp}) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^{\perp}$

$\vdash\ \mathcal{M}$	`BY Start`	
`1.` $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,],\ \{\}$	`BY Extension` A^F, A^T, ρ_1	
`1.1.` $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	`BY Axiom`	$\sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$
`1.2.` $\vdash\ \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	`BY Extension` B^F, B^T, ρ_2	
`1.2.1.` $\vdash\ \{A^T\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_2,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$		
	`BY Extension` A^T, A^F, ρ_3	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
`1.2.1.1.` $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^F, A^T\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$		
	`BY Axiom`	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
`1.2.1.2.` $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$		
	`BY Axiom`	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
`1.2.2.` $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},$		

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$

$\rho_3 = \{a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20}\}$

$$\left[\begin{matrix}\left[\begin{matrix}\left[A_1a_3A_5{:}A^F \quad A_1a_3A_8{:}A^T\right] \\ \left[A_1a_{10}A_{12}{:}B^F \quad A_1a_{10}A_{14}{:}A^F\right]\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T\end{matrix}\right]\end{matrix}\right]$$

$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \rho_1 &&= \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\} \\
\sigma_2 &= \sigma_1\rho_2 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\} \\
\sigma_3 &= \sigma_2\rho_3 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12}, \\
& && \quad a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\}
\end{aligned}$$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^{\perp}) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^{\perp}$

$\vdash\ \mathcal{M}$ — BY Start

1. $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,],\ \{\}$ — BY Extension A^F, A^T, ρ_1

1.1. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$ — BY Axiom — $\sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$

1.2. $\vdash\ \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$ — BY Extension B^F, B^T, ρ_2

1.2.1. $\vdash\ \{A^T\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_2,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$

BY Extension A^T, A^F, ρ_3 — $\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$

1.2.1.1. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^F, A^T\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$

BY Axiom — $\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$

1.2.1.2. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$

BY Axiom — $\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$

1.2.2. $\vdash\ \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$ $\qquad$ $\rho_3 = \{a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20}\}$

$$\left[\begin{bmatrix} \left[A_1a_3A_5{:}A^F \quad A_1a_3A_8{:}A^T\right] \\ \left[A_1a_{10}A_{12}{:}B^F \quad A_1a_{10}A_{14}{:}A^F\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T \end{bmatrix}\right]$$

$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$\sigma_1 = \rho_1 \quad = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$
$\sigma_2 = \sigma_1\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$
$\sigma_3 = \sigma_2\rho_3 = \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\}$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^\perp) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^\perp$

$\vdash\ \mathcal{M}$	BY Start	
1. $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [],\ \{\}$	BY Extension A^F, A^T, ρ_1	
1.1. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	BY Axiom	$\sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$
1.2. $\vdash\ \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	BY Extension B^F, B^T, ρ_2	
1.2.1. $\vdash\ \{A^T\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_2,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$		
	BY Extension A^T, A^F, ρ_3	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
1.2.1.1. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{B^F, A^T\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$		
	BY Axiom	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
1.2.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$		
	BY Axiom	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
1.2.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$		
	BY Axiom	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$

$\rho_3 = \{a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20}\}$

$$\left[\begin{matrix}\left[\begin{matrix}\left[A_1a_3A_5{:}A^F \quad A_1a_3A_8{:}A^T\right] \\[1em] \left[A_1a_{10}A_{12}{:}B^F \quad A_1a_{10}A_{14}{:}A^F\right]\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\[1em] A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T\end{matrix}\right]\end{matrix}\right]$$

$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \rho_1 &&= \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\} \\
\sigma_2 &= \sigma_1\rho_2 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\} \\
\sigma_3 &= \sigma_2\rho_3 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12}, \\
& && \quad a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\}
\end{aligned}$$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^{\perp}) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^{\perp}$

$\vdash \mathcal{M}$ BY Start

1. $\vdash \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [\,],\ \{\}$ BY Extension A^{F}, A^{T}, ρ_1

1.1. $\vdash \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{A^{F}\},\ \sigma_1,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}\}$ BY Axiom $\sigma_1,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}\}$

1.2. $\vdash \{B^{F}, A^{F}\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},\ \sigma_1,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}\}$ BY Extension B^{F}, B^{T}, ρ_2 $\sigma_3,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}, \{B^{F}, B^{T}\}, \{A^{T}, A^{F}\}\}$

1.2.1. $\vdash \{A^{T}\},\ \mathcal{M},\ \{B^{F}\},\ \sigma_2,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}, \{B^{F}, B^{T}\}\}$

BY Extension A^{T}, A^{F}, ρ_3 $\sigma_3,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}, \{B^{F}, B^{T}\}, \{A^{T}, A^{F}\}$

1.2.1.1. $\vdash \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^{F}, A^{T}\},\ \sigma_3,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}, \{B^{F}, B^{T}\}, \{A^{T}, A^{F}\}\}$

BY Axiom $\sigma_3,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}, \{B^{F}, B^{T}\}, \{A^{T}, A^{F}\}$

1.2.1.2. $\vdash \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{B^{F}\},\ \sigma_3,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}, \{B^{F}, B^{T}\}, \{A^{T}, A^{F}\}\}$

BY Axiom $\sigma_3,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}, \{B^{F}, B^{T}\}, \{A^{T}, A^{F}\}$

1.2.2. $\vdash \{\,\},\ \mathcal{M},\ \{\,\},\ \sigma_3,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}, \{B^{F}, B^{T}\}\}$

BY Axiom $\sigma_3,\ \{\{A^{F}, A^{T}\}, \{B^{F}, B^{T}\}, \{A^{T}, A^{F}\}$

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$ $\rho_3 = \{a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20}\}$

$$\left[\left[\begin{array}{l}\left[A_1a_3A_5{:}A^{F}\quad A_1a_3A_8{:}A^{T}\right]\\ \left[A_1a_{10}A_{12}{:}B^{F}\quad A_1a_{10}A_{14}{:}A^{F}\right]\end{array}\right]\left[\begin{array}{l}A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^{T}\\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^{T}\end{array}\right]\right]$$

$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \rho_1 &&= \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}\\ \sigma_2 &= \sigma_1\rho_2 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}\\ \sigma_3 &= \sigma_2\rho_3 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\\ & && \quad a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\}\end{aligned}$$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^\perp)\otimes(B \parr A))\parr(A \parr B)^\perp$

$\vdash\ \mathcal{M}$	BY Start	
1. $\vdash\ \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [],\ \{\}$	BY Extension A^F, A^T, ρ_1	$\sigma_3,\ \{\{A^F,A^T\},\{B^F,B^T\},\{A^T,A^F\}\}$
1.1. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F,A^T\}\}$	BY Axiom	$\sigma_1,\ \{\{A^F,A^T\}\}$
1.2. $\vdash\ \{B^F,A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F,A^T\}\}$	BY Extension B^F, B^T, ρ_2	$\sigma_3,\ \{\{A^F,A^T\},\{B^F,B^T\},\{A^T,A^F\}\}$
1.2.1. $\vdash\ \{A^T\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_2,\ \{\{A^F,A^T\},\{B^F,B^T\}\}$		
	BY Extension A^T, A^F, ρ_3	$\sigma_3,\ \{\{A^F,A^T\},\{B^F,B^T\},\{A^T,A^F\}$
1.2.1.1. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{B^F,A^T\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F,A^T\},\{B^F,B^T\},\{A^T,A^F\}\}$		
	BY Axiom	$\sigma_3,\ \{\{A^F,A^T\},\{B^F,B^T\},\{A^T,A^F\}$
1.2.1.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F,A^T\},\{B^F,B^T\},\{A^T,A^F\}\}$		
	BY Axiom	$\sigma_3,\ \{\{A^F,A^T\},\{B^F,B^T\},\{A^T,A^F\}$
1.2.2. $\vdash\ \{\},\ \mathcal{M},\ \{\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F,A^T\},\{B^F,B^T\}\}$		
	BY Axiom	$\sigma_3,\ \{\{A^F,A^T\},\{B^F,B^T\},\{A^T,A^F\}$

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$ $\qquad$ $\rho_3 = \{a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20}\}$

$$\left[\left[\begin{matrix}[A_1a_3A_5{:}A^F & A_1a_3A_8{:}A^T] \\ [A_1a_{10}A_{12}{:}B^F & A_1a_{10}A_{14}{:}A^F]\end{matrix}\right]\ \left[\begin{matrix}A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T\end{matrix}\right]\right]$$

$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \rho_1 &&= \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}\\
\sigma_2 &= \sigma_1\rho_2 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}\\
\sigma_3 &= \sigma_2\rho_3 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\\
& && \quad a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\}
\end{aligned}$$

Extensionsbeweis für $((A \parr A^{\perp}) \otimes (B \parr A)) \parr (A \parr B)^{\perp}$

$\vdash \mathcal{M}$	`BY Start`	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$
`1.` $\vdash \mathcal{M},\ \mathcal{M},\ \{\},\ [],\ \{\}$	`BY Extension` A^F, A^T, ρ_1	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$
`1.1.` $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{A^F\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	`BY Axiom`	$\sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$
`1.2.` $\vdash \{B^F, A^F\},\ \mathcal{M},\ \{\},\ \sigma_1,\ \{\{A^F, A^T\}\}$	`BY Extension` B^F, B^T, ρ_2	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$
`1.2.1.` $\vdash \{A^T\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_2,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$		
	`BY Extension` A^T, A^F, ρ_3	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
`1.2.1.1.` $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{B^F, A^T\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}$		
	`BY Axiom`	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
`1.2.1.2.` $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{B^F\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}\}\}$		
	`BY Axiom`	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$
`1.2.2.` $\vdash \{\},\ \mathcal{M},\ \{\},\ \sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}\}$		
	`BY Axiom`	$\sigma_3,\ \{\{A^F, A^T\}, \{B^F, B^T\}, \{A^T, A^F\}$

$\rho_1 = \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\}$ $\qquad$ $\rho_3 = \{a_{22}/A_{12},\ a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20}\}$

$$\left[\left[\begin{matrix}\left[A_1a_3A_5{:}A^F \quad A_1a_3A_8{:}A^T\right] \\ \left[A_1a_{10}A_{12}{:}B^F \quad A_1a_{10}A_{14}{:}A^F\right]\end{matrix}\right] \left[\begin{matrix}A_{17}a_{19}A_{20}{:}A^T \\ A_{17}a_{22}A_{23}{:}B^T\end{matrix}\right]\right]$$

$\rho_2 = \{\varepsilon/A_1,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\}$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \rho_1 &&= \{\varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8\} \\
\sigma_2 &= \sigma_1\rho_2 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12},\ \varepsilon/A_{23}\} \\
\sigma_3 &= \sigma_2\rho_3 &&= \{\varepsilon/A_1,\ \varepsilon/A_5,\ \varepsilon/A_8,\ a_{22}/A_{12}, \\
& && \quad a_{19}/A_{14},\ a_{10}/A_{17},\ \varepsilon/A_{20},\ \varepsilon/A_{23}\}
\end{aligned}$$

Unifiziere Präfix-Strings konnektierter Atome

- **Ähnlich zur Präfix-Unifikation für konstruktive Logik**
  - Gleiches Transformationsverfahren im Stil von Martelli-Montanari
  - Regeln wie bei konstruktiver Logik
  - Regeln R_2, R_4, R_6, R_7 können entfallen, da alle $\mathcal{MLL}$-Präfixe die Form $\psi_1\varphi_1\psi_2\varphi_2\ldots\psi_n\varphi_n$ oder $\varphi_1\psi_2\varphi_2\ldots\psi_n\varphi_n$ haben

- **Transformationsregeln für Lineare Logik**

R_1	$\{\varepsilon=\varepsilon\|\varepsilon\}, \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{\}, \sigma$	
R_3	$\{Xs=\varepsilon\|Xt\}, \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{s=\varepsilon\|t\}, \sigma$	
R_5	$\{Vs=z\|\varepsilon\}, \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{s=\varepsilon\|\varepsilon\}, [z/V]\cup\sigma$	
R_8	$\{Vs^+=\varepsilon\|V_1t\}, \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{V_1t=V\|s^+\}, \sigma$	
R_9	$\{Vs^+=z^+\|V_1t\}, \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{V_1t=V'\|s^+\}, [z^+V'/V]\cup\sigma$	
R_{10}	$\{Vs=z\|Xt\}, \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{Vs=zX\|t\}, \sigma$	($V{\neq}X$, und $s{=}\varepsilon$, $t{\neq}\varepsilon$, oder X Konstante)

Lineare Logik im Rückblick

- **Ressourcenlogik mit andersartigen Grundoperatoren**
  - Additive, multiplikative und exponentielle Operatoren
  - Logik höherer Stufe
  - Klassische und nichtklassische Logik simulierbar
- **Modifikation des Matrixkalküls erforderlich**
  - Formelbaum muß um spezielle lineare Positionen erweitert werden
  - Komplementarität verlangt Unifizierbarkeit linearer Präfixe
  - Ressourcenverwaltung verlangt Linearität, Relevanz, Minimalität
  - Charakterisierung bisher nur für $\mathcal{MLL}$ und $\mathcal{MELL}$ möglich
    Integration des additiven Fragments bisher nicht gelungen
  - Wird mit $\mathcal{MELL}$ die Grenze von Matrixkalkülen erreicht?
- **Erweiterung des Extensionsverfahrens entsprechend**
  - Pfadüberprüfungsverfahren muß um Linearitätstest erweitert werden
  - Komplementaritätstest benötigt lineare Präfix-Unifikation
  - Implementiert als kompakte Beweiser linTap und linCop für $\mathcal{MLL}$

Higher-order Logik

Logik höherer Stufe

- **Logik erster Stufe hat nur einfache Variablen**
  – Keine Quantifizierung über Funktions- oder Prädikatensymbole erlaubt
- **Konstrukte höherer Stufe kommen in der Realität vor**
  – Funktionen (2. Stufe): "Bestimme $x+2$ bei Eingabe x" $\lambda x.x+2$
  – Induktionsprinzip: $\forall P.P(0) \wedge (\forall y{:}\mathbb{N}.P(y) \Rightarrow P(y+1)) \Rightarrow \forall x{:}\mathbb{N}.P(x)$
  – Zwischenwertsatz: $\forall f{:}\mathbb{R}\to\mathbb{R}.\forall a < b{:}\mathbb{R}.(f(a)>0 \wedge f(b)<0) \Rightarrow \exists x{:}\mathbb{R}.f(x)=0$
  – Funktionale (3. Stufe): Ableitungsoperator $\lambda f.df/dx$
  – Quantifizierung über Funktionale, ...
- **Logik höherer Stufe hat keine Einschränkungen**
  – Extrem einfache Syntax: $x,\ \lambda x.t,\ f(a),\ \forall x\, P,\ P \Rightarrow Q$
  – Fester Auswertungsmechanismus Reduktion: $(\lambda x.t)(a) \longrightarrow t[a/x]$
- **Logik höherer Stufe ist minimale Grundlagentheorie**
  – Keine Abstützung auf Mengentheorie erforderlich
  – Reduktion erklärt Wert von Ausdrücken
  – Mathematische Konzepte werden nicht über Axiome erklärt sondern als definitorische Abkürzung für komplexe Terme (logizistischer Ansatz)

Logik höherer Stufe – Syntax

- **Alphabet für erlaubte Symbole**
  - $\mathcal{V}$: Variablensymbole
- **Terme**
  - Variablen $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$
  - $\boldsymbol{\lambda x.t}$, wobei $x \in \mathcal{V}$ und t Term — λ-Abstraktion
  - $\boldsymbol{f\ t}$, wobei t und f Terme — Applikation
  - $(\boldsymbol{t})$, wobei t Term
  - $(\boldsymbol{P \Rightarrow Q})$, wobei P,Q Terme
  - $(\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P})$, wobei $x \in \mathcal{V}$ und P Term
- **Konventionen**
  - Applikation bindet stärker als λ-Abstraktion
  - Applikation ist links-assoziativ: $\boldsymbol{f\ t_1 t_2 \;\hat{=}\; (f\ t_1)\ t_2}$
  - Notation $f(t_1,...t_n)$ entspricht iterierter Applikation $f\ \ t_1...t_n$

LOGIK HÖHERER STUFE – (WERT-)SEMANTIK

- **α-Konversion**: Umbenennung gebundener Variablen
  - Ersetze Teilterm der Gestalt $\lambda x.t$ durch $\lambda z.t[z/x]$ (z neue Variable)
  - Ersetze Teilterm der Gestalt $\forall x\ P$ durch $\forall z\ P[z/x]$
  - Terme t und u sind kongruent (α-konvertibel), wenn sie auseinander durch endlich viele Umbenennungen gebundener Variablen entstehen
- **(β-)Reduktion**: Auswertung von Termen
  - Ersetze Teilterm der Gestalt $(\lambda x.t)(s)$ (Redex) durch $t[s/x]$ (Kontraktum)
  - t ist reduzierbar auf u ($\boldsymbol{t \xrightarrow{*} u}$), wenn u aus t durch endlich viele Reduktionen und Umbenennungen entsteht ($\hat{=}$ Termersetzung)
- **(Semantische) Gleichheit $\boldsymbol{t = s}$**
  - Es gibt einen Term u mit $t \xrightarrow{*} u$ und $s \xrightarrow{*} u$
- **Normalform von $\boldsymbol{t}$: Wert eines Terms**
  - Irreduzibler (Redex-freier) Term u mit $t = u$
  - Der Wert eines Terms ist eindeutig ($\xrightarrow{*}$ ist konfluent)
  - Nicht jeder Term hat einen Wert (keine starke Normalisierbarkeit)
- **Semantik von $\forall$ und $\Rightarrow$ analog zur Prädikatenlogik**

Definition logischer Standardkonzepte

Junktoren werden zu benutzerdefinierten Funktionen

Konjunktion	$\wedge$	$\equiv$
Disjunktion	$\vee$	$\equiv$
Falschheit	$\perp$	$\equiv$
Negation	$\neg$	$\equiv$
Existenzquantor	$\exists x\, \boldsymbol{A}$	$\equiv$
Gleichheit	$\doteq$	$\equiv$

Definition logischer Standardkonzepte

Junktoren werden zu benutzerdefinierten Funktionen

Konjunktion	$\wedge$	$\equiv\ \lambda A.\lambda B.\forall P\,(A \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Disjunktion	$\vee$	$\equiv$
Falschheit	$\perp$	$\equiv$
Negation	$\neg$	$\equiv$
Existenzquantor	$\exists x\ \boldsymbol{A}$	$\equiv$
Gleichheit	$\doteq$	$\equiv$

Definition logischer Standardkonzepte

Junktoren werden zu benutzerdefinierten Funktionen

Konjunktion	$\wedge$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,(A \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Disjunktion	$\vee$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,((A \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Falschheit	$\bot$	$\equiv$	
Negation	$\neg$	$\equiv$	
Existenzquantor	$\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A}$	$\equiv$	
Gleichheit	$\doteq$	$\equiv$	

Definition logischer Standardkonzepte

Junktoren werden zu benutzerdefinierten Funktionen

Konjunktion	$\wedge$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,(A \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Disjunktion	$\vee$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,((A \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Falschheit	$\perp$	$\equiv$	$\forall P\; P$ (*intuitionistisch*)
Negation	$\neg$	$\equiv$	
Existenzquantor	$\exists x\; \boldsymbol{A}$	$\equiv$	
Gleichheit	$\doteq$	$\equiv$	

Definition logischer Standardkonzepte

Junktoren werden zu benutzerdefinierten Funktionen

Konjunktion	$\wedge$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,(A \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Disjunktion	$\vee$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,((A \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Falschheit	$\bot$	$\equiv$	$\forall P\, P$ (*intuitionistisch*)
Negation	$\neg$	$\equiv$	$\lambda A.\forall P\,(A \Rightarrow P)$
Existenzquantor	$\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A}$	$\equiv$	
Gleichheit	$\doteq$	$\equiv$	

Definition logischer Standardkonzepte

Junktoren werden zu benutzerdefinierten Funktionen

Konjunktion	$\wedge$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,(A \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Disjunktion	$\vee$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,((A \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Falschheit	$\bot$	$\equiv$	$\forall P\; P$ (*intuitionistisch*)
Negation	$\neg$	$\equiv$	$\lambda A.\forall P\,(A \Rightarrow P)$
Existenzquantor	$\exists \boldsymbol{x}\; \boldsymbol{A}$	$\equiv$	$\forall P\,(\forall x\,(A \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Gleichheit	$\doteq$	$\equiv$	

DEFINITION LOGISCHER STANDARDKONZEPTE

Junktoren werden zu benutzerdefinierten Funktionen

Konjunktion	$\wedge$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,(A \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Disjunktion	$\vee$	$\equiv$	$\lambda A.\lambda B.\forall P\,((A \Rightarrow P) \Rightarrow (B \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Falschheit	$\perp$	$\equiv$	$\forall P\, P$ (*intuitionistisch*)
Negation	$\neg$	$\equiv$	$\lambda A.\forall P\,(A \Rightarrow P)$
Existenzquantor	$\exists \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{A}$	$\equiv$	$\forall P\,(\forall x\,(A \Rightarrow P)) \Rightarrow P$
Gleichheit	$\doteq$	$\equiv$	$\lambda x.\lambda y.\forall P\,(\,P(x) \Rightarrow P(y)\,)$

Definition von Zahlen: Church Numerals

$$\overline{n} \equiv \lambda f.\lambda x.\, f^n\, x \equiv \lambda f.\lambda x.\, \underbrace{f\,(f \ldots (f\,x) \ldots)}_{n\text{-mal}}$$

$$\mathsf{s} \equiv \lambda n.\lambda f.\lambda x.\, n\, f\, (f\, x)$$

$$\mathsf{add} \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\, m\, f\, (n\, f\, x)$$

$$\mathsf{mul} \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\, m\, (n\, f)\, x$$

$$\mathsf{exp} \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\, n\, m\, f\, x$$

$$\mathsf{zero} \equiv \lambda n.\, n\, (\lambda n.\mathsf{F})\, \mathsf{T}$$

$$\mathsf{p} \equiv \lambda n.\, \mathsf{snd}\big((\mathtt{n}\ (\lambda \mathtt{fx}.\ (\mathsf{s},\ \mathsf{match}\ \mathtt{fx}\ \mathsf{with}\ (\mathtt{f},\mathtt{x}) \mapsto \mathtt{f}\ \mathtt{x}))\ (\lambda \mathtt{z}.\overline{\mathtt{0}},\ \overline{\mathtt{0}}))\big)$$

Definition von Zahlen: Church Numerals

$$
\begin{array}{lll}
\overline{n} & \equiv \lambda f.\lambda x.\, f^n\, x & \equiv \lambda f.\lambda x.\, \underbrace{f\,(f \ldots (f\,x) \ldots)}_{n\text{-mal}} \\
\mathsf{s} & \equiv \lambda n.\lambda f.\lambda x.\, n\, f\,(f\,x) & \\
\mathsf{add} & \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\, m\, f\,(n\, f\, x) & \\
\mathsf{mul} & \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\, m\,(n\, f)\, x & \\
\mathsf{exp} & \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\, n\, m\, f\, x & \\
\mathsf{zero} & \equiv \lambda n.\, n\,(\lambda n.\mathsf{F})\,\mathsf{T} & \\
\mathsf{p} & \equiv \lambda n.\, \mathsf{snd}(\,(\mathtt{n}\ (\lambda \mathtt{fx}.\ (\mathsf{s},\ \mathsf{match}\ \mathtt{fx}\ \mathsf{with}\ (\mathtt{f},\mathtt{x}) \mapsto \mathtt{f}\ \mathtt{x}))\ (\lambda \mathtt{z}.\overline{\mathtt{0}},\ \overline{\mathtt{0}}))\,) & \\
N & \equiv \lambda x.\forall P\ (\forall y\, P(y) \Rightarrow P(\mathsf{s}\, y)) \Rightarrow P(\overline{0}) \Rightarrow P(x) & \boxed{N(x) \hat{=} x \in \mathbb{N}}
\end{array}
$$

Definition von Zahlen: Church Numerals

$$\overline{n} \equiv \lambda f.\lambda x.\ f^n\,x \equiv \lambda f.\lambda x.\ \underbrace{f\,(f\ldots(f\,x)\ldots)}_{n\text{-mal}}$$

$$\mathsf{s} \equiv \lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\,f\,(f\,x)$$

$$\mathsf{add} \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ m\,f\,(n\,f\,x)$$

$$\mathsf{mul} \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ m\,(n\,f)\,x$$

$$\mathsf{exp} \equiv \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\,m\,f\,x$$

$$\mathsf{zero} \equiv \lambda n.\ n\,(\lambda n.\mathsf{F})\,\mathsf{T}$$

$$\mathsf{p} \equiv \lambda n.\ \mathsf{snd}(\,(\mathtt{n}\ (\lambda\mathtt{fx.}\ (\mathsf{s},\ \mathsf{match}\ \mathtt{fx}\ \mathsf{with}\ (\mathtt{f},\mathtt{x}) \mapsto \mathtt{f}\ \mathtt{x}))\ (\lambda\mathtt{z.}\overline{\mathtt{0}},\overline{\mathtt{0}}))\,)$$

$$N \equiv \lambda x.\forall P\ (\forall y\ P(y) \Rightarrow P(\mathsf{s}\,y)) \Rightarrow P(\overline{0}) \Rightarrow P(x) \qquad \boxed{N(x) \hat{=} x \in \mathbb{N}}$$

Abkürzungen

$$\mathsf{T} \equiv \lambda x.\lambda y.x$$

$$\mathsf{F} \equiv \lambda x.\lambda y.y$$

$$\mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ s\ \mathsf{else}\ t \equiv b\,s\,t$$

$$(s,t) \equiv \lambda p.\ p\,s\,t$$

$$\mathsf{match}\ pair\ \mathsf{with}\ (x,y) \mapsto t \equiv pair\ (\lambda x.\lambda y.t)$$

Church Numerals: Auswertung von Funktionen

$$
\begin{array}{lcll}
\mathsf{s}\,\overline{n} & \equiv & (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\ n\,f\,(f\,x))\,(\lambda f.\lambda x.\ f^n\,x) & \\
 & \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda f.\lambda x.\ f^n\,x)\,f\,(f\,x) & \\
 & \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\ (\lambda x.\ f^n\,x)\,(f\,x) & \\
 & \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\ f^n\,(f\,x) & \\
 & \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\ f^{n+1}\,x & \equiv\ \overline{n\mathbf{+}1}
\end{array}
$$

Church Numerals: Auswertung von Funktionen

$$
\begin{array}{lrll}
\mathsf{s}\,\overline{n} & \equiv & (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\; n\, f\,(f\, x))\;(\lambda f.\lambda x.\; f^{n}\, x) & \\
& \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\; (\lambda f.\lambda x.\; f^{n}\, x)\, f\,(f\, x) & \\
& \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\; (\lambda x.\; f^{n}\, x)\;(f\, x) & \\
& \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\; f^{n}\,(f\, x) & \\
& \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\; f^{n+1}\, x & \equiv\;\; \overline{n\mathbf{+}1} \\
\\
\mathsf{add}\,\overline{m}\,\overline{n} & \equiv & (\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.\; m\, f\,(n\, f\, x))\;\overline{m}\;\overline{n} & \\
& \longrightarrow & (\lambda n.\lambda f.\lambda x.\; \overline{m}\, f\,(n\, f\, x))\;\overline{n} & \\
& \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\; \overline{m}\, f\,(\overline{n}\, f\, x) & \\
& \equiv & \lambda f.\lambda x.\; (\lambda f.\lambda x.\; f^{m}\, x)\, f\,(\overline{n}\, f\, x) & \\
& \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\; (\lambda x.\; f^{m}\, x)\;(\overline{n}\, f\, x) & \\
& \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\; f^{m}\,(\overline{n}\, f\, x) & \\
& \equiv & \lambda f.\lambda x.\; f^{m}\,((\lambda f.\lambda x.\; f^{n}\, x)\, f\, x) & \\
& \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\; f^{m}\,((\lambda x.\; f^{n}\, x)\; x) & \\
& \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\; f^{m}\,(f^{n}\, x) & \\
& \longrightarrow & \lambda f.\lambda x.\; f^{m+n}\, x & \equiv\;\; \overline{m\mathbf{+}n}
\end{array}
$$

Beweisführung in Logik höherer Stufe

Extensionsverfahren ähnlich wie bei Prädikatenlogik

- **Erweiterte Matrixcharakterisierung der Gültigkeit**
  - **F ist gültig gdw. alle Pfade durch F komplementär**
  - Komplementarität mit erweitertem Substitutionsbegriff
    - · Prädikats- und Funktionssymbole dürfen ersetzt werden
    - · Konnektierte Terme müssen nur semantisch gleich sein
- **Erweitertes Beweissuchverfahren** $\longrightarrow$ TPS (Andrews)
  - Konnektionen-orientiertes Pfadüberprüfungsverfahren
  - Komplementaritätstest mit Unifikation höherer Stufe $\longrightarrow$ Huet
    - · i.A. unentscheidbar (!) und erheblich komplizierteres Verfahren
- **Beweise sind normalerweise sehr kurz und elegant**
  - Aber erheblich schwerer zu finden

Beweis der Grundeigenschaften der Gleichheit

$$\doteq \;\equiv\; \lambda x.\lambda y.\forall P(P(x) \Rightarrow P(y))$$

- **Reflexivität:** $a \doteq a$

$$\left[Pa^{T} \quad Pa^{F} \right]$$

Beweis der Grundeigenschaften der Gleichheit

$$\doteq \;\equiv\; \lambda x.\lambda y.\forall P(P(x) \Rightarrow P(y))$$

- **Reflexivität:** $a \doteq a$

$$\begin{bmatrix} Pa^{T} & Pa^{F} \end{bmatrix}$$

- **Kommutativität:** $a \doteq b \Rightarrow b \doteq a$

$$\begin{bmatrix} Xa^{F} & Pb^{T} & Pa^{F} \\ Xb^{T} & & \end{bmatrix}$$

$[\lambda z.\neg Pz/X]$

Beweis der Grundeigenschaften der Gleichheit

$$\doteq \;\equiv\; \lambda x.\lambda y.\forall P(P(x) \Rightarrow P(y))$$

- **Reflexivität:** $a \doteq a$

$$\begin{bmatrix} Pa^T & Pa^F \end{bmatrix}$$

- **Kommutativität:** $a \doteq b \Rightarrow b \doteq a$

$$\begin{bmatrix} Xa^F & Pb^T & Pa^F \\ Xb^T & & \end{bmatrix} \qquad [\lambda z.\neg Pz/X]$$

- **Transitivität:** $a \doteq b \wedge b \doteq c \Rightarrow a \doteq c$

$$\begin{bmatrix} Xa^F & Yb^F & Pa^T & Pc^F \\ Xb^T & Yc^T & & \end{bmatrix} \qquad [P/X, P/Y]$$

Beweis der Grundeigenschaften der Gleichheit

$$\doteq \;\equiv\; \lambda x.\lambda y.\forall P(P(x) \Rightarrow P(y))$$

- **Reflexivität:** $a \doteq a$

$$\begin{bmatrix} Pa^T & Pa^F \end{bmatrix}$$

- **Kommutativität:** $a \doteq b \Rightarrow b \doteq a$

$$\begin{bmatrix} Xa^F & Pb^T & Pa^F \\ Xb^T & & \end{bmatrix} \qquad [\lambda z.\neg Pz/X]$$

- **Transitivität:** $a \doteq b \wedge b \doteq c \Rightarrow a \doteq c$

$$\begin{bmatrix} Xa^F & Yb^F & Pa^T & Pc^F \\ Xb^T & Yc^T & & \end{bmatrix} \qquad [P/X, P/Y]$$

- **Substitutivität:** $Pa \wedge a \doteq b \Rightarrow Pb$

$$\begin{bmatrix} Pa^T & Xa^F & Pb^F \\ & Xb^T & \end{bmatrix} \qquad [P/X]$$

Intuitionistische Logik höherer Stufe

- **Unterstützt formale Manipulation von Algorithmen**
  - Synthese aus Spezifikationen, Optimierung, Verifikation, …
  - Einheitliche Sprache für Spezifikation, Programmierung, Deduktion…
- **(Zur Zeit noch) viele verschiedene Formulierungen**
  - Martin-Löf'sche Typentheorie (Computational Type Theory)
  - Kalkül der Konstruktionen
  - System F
  - LCF (Logik berechenbarer Funktionen)

    ⋮
- **Beweissysteme interaktiv mit taktischer Steuerung**
  - **AUTOMATH** (historischer Vorläufer)
  - **Nuprl, MetaPRL** (Computational Type Theory)
  - **Alf / Agda, ...** (Martin-Löf Typentheorie)
  - **Lego**, **Coq** (Kalkül der Konstruktionen)
  - **Cambridge LCF**
- **Viele erfolgreiche Anwendungen**