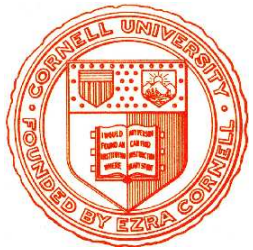
Inferenzmethoden

Teil V



Behandlung spezifischer Fragestellungen

Spezialisierte Beweistechniken

1. Verarbeitung mathematischer Theorien
2. Gleichheitsbehandlung
3. Zahlen und Induktion
4. Termersetzung und -auswertung

Prädikatenlogik alleine hat Grenzen

- **Zu wenig vorgegeben Strukturen**
  - Keine Schlüsse über Werte von Termen möglich
    Interpretation von Gleichheit (z.B. $4+4=8$) ist nicht festgelegt
  - Kein Schließen über Datentypen möglich
    Interpretation von $\forall x\ x=0 \vee x \geq 1$ nicht festgelegt

  In informaler mathematischer Logik sind diese Konzepte fundamental
- **Erweiterung der Logik durch Axiome unpraktisch**
  - \+ alle guten Eigenschaften der Logik bleiben erhalten
  - – Formales Schließen mühsam (zu viele Teilformeln)
- **Erweiterung von Semantik und Inferenzsystem**
  - – Mehr Theorie: Korrektheit, Vollständigkeit muß neu bewiesen werden
  - \+ Formales Schließen "natürlich" und einfacher

Mehr in "Automatisierte Logik und Programmierung"

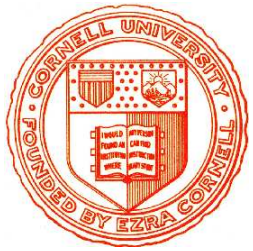
Es gibt theoriespezifische Spezialverfahren

- **Entscheidungsprozeduren**
  - Testverfahren für Gültigkeit spezieller Formelklassen
    - Folgt eine Gleichheit aus mehreren anderen
    - Folgt eine arithmetische Aussage aus mehreren anderen
  - Sehr effizent für spezielle Anwendungsgebiete
  - Integration in Konnektionsmethode und Resolution schwierig
    - Komplementaritätsbegriff muß erweitert werden
    - Betrachtung von mehr als zwei Literalen macht Suche ineffizienter
- **Rewrite-Verfahren**
  - Bestimmung des Wertes von Termen durch "Umschreibung"
  - Anwendung algebraischer Gesetze als Transformationsregeln
  - Gleichungen erhalten eine Richtung
  - Integration in Unifikationsalgorithmus möglich

Wie kann man dies effizient in der Beweissuche einsetzen?

Inferenzmethoden

Einheit 15



Theorie- und Gleichheitsbehandlung

1. Theorien & Unifikationstheorie
2. Gleichheitsbehandlung in Beweisverfahren
3. Entscheidungsprozeduren für Gleichheit

Theoriebehandlung

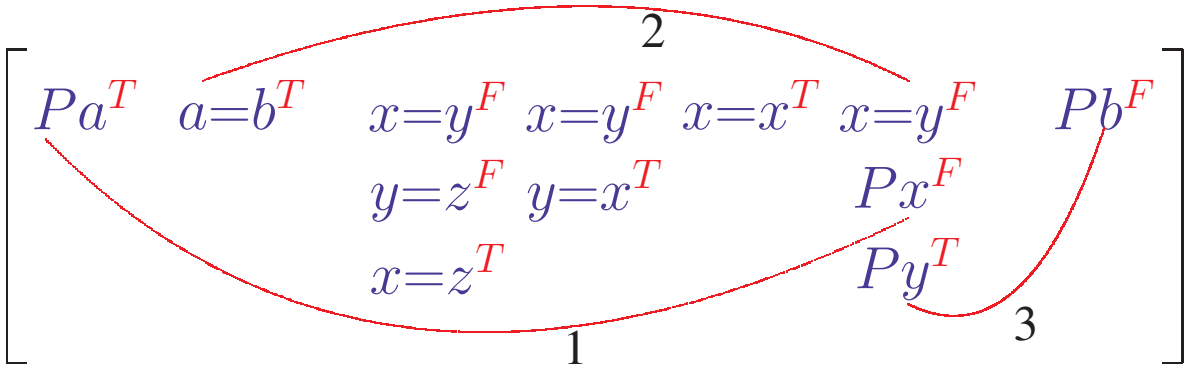
Verarbeitung mathematischer Standardtheorien

- **Theorien werden beschrieben durch Axiome**
  - "Grundwahrheiten" der Theorie, aus denen alles andere folgt
    - Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Substitutivität für Gleichheit
    - Assoziativität, Identität, Inverse für Gruppen
    - Peano-Axiome für natürliche Zahlen
- **Theorien verwenden oft spezielle Inferenzketten**
  - Standardargumente, die Axiome effizient in Schlußfolgerungen einsetzen
  - z.B. gezieltes Einsetzen von Substitutivität beim Gleichheitsschließen
- **Allgemeine Theorembeweiser unterstützen dies nicht**
  - Theoriespezifische Inferenzen passen nicht zum allgemeinen Verfahren
  - Beweiser müssen Axiome als zusätzliche Klauseln hinzunehmen
  - Alternative ist Integration der Theorie in die Unifikation

Theorieverarbeitung in Beweisverfahren

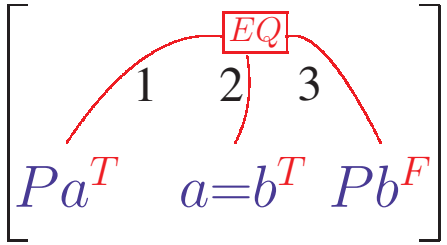
Beweise $Pa \wedge a{=}b \Rightarrow Pb$ aus Gleichheitsaxiomen

- **Integration der Axiome in die Matrix**



  - Beweissuchverfahren kann unverändert bleiben
  - Zusätzliche Klauseln erhöhen Anzahl der Suchschritte erheblich

- **Einbettung der Theorie durch spezielle Konnektionen**



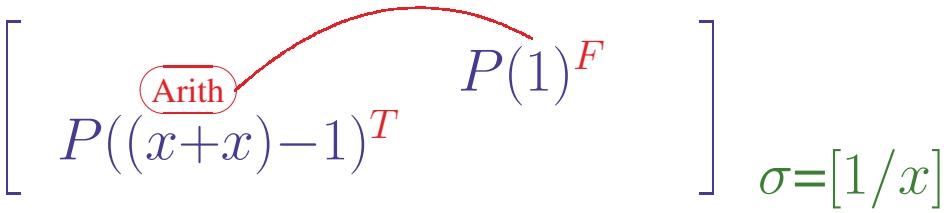
wobei $\boxed{EQ} \equiv$

$$\begin{bmatrix} x{=}y^F & x{=}y^F & x{=}x^T & x{=}y^F \\ y{=}z^F & y{=}x^T & & Px^F \\ x{=}z^T & & & Py^T \end{bmatrix}$$

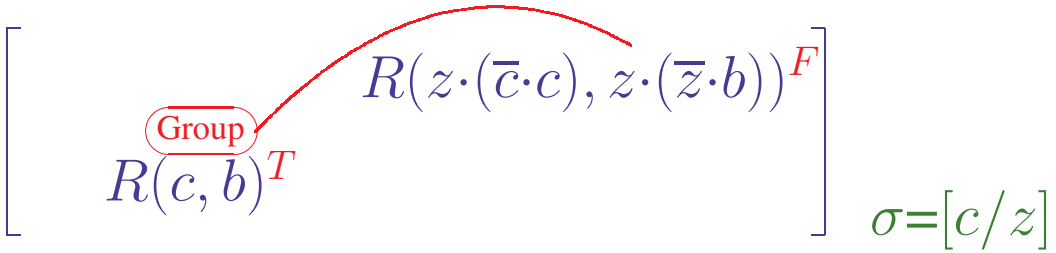
  - Theoriekonnektion beinhaltet Inferenzschritte der Theorie EQ
  - Suchverfahren & Unifikationsmechanismus müssen angepasst werden

Theoriekonnektionen

- **Erweiterter Komplementaritätsbegriff für Theorien**
  - $P\,t_1{}^T$ und $P\,t_2{}^F$ sind komplementär in der Theorie $\mathcal{T}$, wenn $\sigma(t_1)$ und $\sigma(t_2)$ in $\mathcal{T}$ gleich sind (σ zulässige Substitution)
  - Erlaubt Verarbeitung theoriespezifischer Inferenzketten
- **Unifikation wird mehr als syntaktisches Gleichmachen**



  - Konnektion benutzt Unifikation für einfache Arithmetik



  - Konnektion benutzt Unifikation für Gruppentheorie
- **Allgemeiner Mechanismus noch wenig erforscht**
  - Meist Integration von Theorie-Unifikation in konventionelle Beweiser
  - Konnektionen können auch unär, ternär oder komplexer sein

Erweiterung: gerichtete Theoriekonnektionen

- **Theorieimplikation $\Rightarrow_{\mathcal{T}}$**
  - Implikation die in der Theorie $\mathcal{T}$ gültig ist
- **Gerichtete σ-komplementäre Konnektion (L^T, L'^F)**
  - Es gilt $\sigma(L) = \sigma(L')$ oder $\sigma(L) \Rightarrow_{\mathcal{T}} \sigma(L')$
  - Richtung geht immer von Polarität T nach F
- **Unäre σ-komplementäre Konnektion L^T oder L'^F**
  - Es gilt $\sigma(L) \Rightarrow_{\mathcal{T}} \mathsf{False}$ bzw. $\mathsf{True} \Rightarrow_{\mathcal{T}} \sigma(L')$
  - Gültigkeit folgt alleine aus der Theorie, ohne Gegenliteral

$\Downarrow$

Eine Formel F ist gültig in der Theorie $\mathcal{T}$, wenn es eine Multiplizität μ, eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von bezüglich $\mathcal{T}$ σ-komplementären gerichteten Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

UNIFIKATIONSTHEORIE

- **Es gibt noch viele offene Fragen**
  - Wie genau Unifizierbarkeit modulo Theorie $\mathcal{T}$ definieren?
  - Gibt es mgu's und, wenn ja, wieviele?
  - Gibt es Unifikationsalgorithmen (als Entscheidungsprozeduren)?
  - Was ist die Komplexität des Unifikationsverfahrens?
- **Bisher gibt es nur wenig allgemeine Lösungen**
  - Erfolgreich nur für spezielle Theorien (Gleichheit, Gruppen, ...)
- **Es gibt verschiedene Typen von Unifikationstheorien**
  - **unitär**: Genau ein allgemeinsten Unifikator (z.B. Standard-Unifikation)
  - **finitär**:endlich viele allgemeinste Unifikatoren (z.B. AC-/Präfix-Unifikation)
  - **infinitäre**: unendlich viele mgu's (z.B. Unifikation modulo Assoziativität)
  - **leer**: keine allgemeinsten Unifikatoren (wenig erwünscht)

Die Theorie der Gleichheit

- **Wichtigste Grundbeziehung zwischen Objekten**
  - Spezialbehandlung sehr lohnenswert
  - Dargestellt als zweistelliges Prädikat zwischen Termen
  - Prädikatszeichen $\dot{=}$ in Infix-Notation
- **Charakterisiert durch 5 Grundeigenschaften**
  - $x \dot{=} x$ Reflexivität
  - $x \dot{=} y \Rightarrow y \dot{=} x$ Symmetrie
  - $x \dot{=} y \wedge y \dot{=} z \Rightarrow x \dot{=} z$ Transitivität
  - $x_i \dot{=} y \Rightarrow f(x_1, .., x_i, .., x_n) \dot{=} f(x_1, .., y, .., x_n)$

    Substitutivität auf Funktionen (Schema)
  - $x_i \dot{=} y \Rightarrow [P(x_1, .., x_i, .., x_n) \Leftrightarrow P(x_1, .., y, .., x_n)]$

    Substitutivität auf Prädikaten (Schema)

Symmetrie und Transitivität sind ableitbar

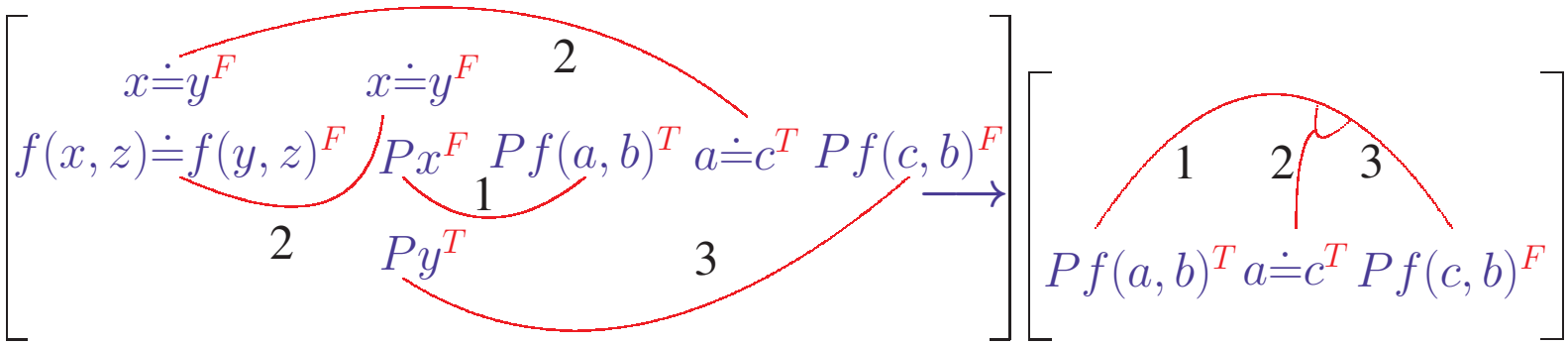
Erweitere Formel um Axiome der Gleichheit

- **Verwende minimale Axiomenmenge**
  - $x \doteq x$
  - $x_i \doteq y \Rightarrow f(x_1, .., x_i, .., x_n) \doteq f(x_1, .., y, .., x_n)$
  - $x_i \doteq y \Rightarrow [P(x_1, .., x_i, .., x_n) \Rightarrow P(x_1, .., y, .., x_n)]$

  Das Schema der Substitutivität muß für jedes vorkommende Funktions- und Prädikatssymbol instantiiert werden
- **Erhebliche Vergrößerung des Suchraums**
  - Unbrauchbar für komplexe Formeln
  - In der Praxis bei kleinen Formeln oft effizienter als Spezialverfahren
- **Alternative Techniken**
  - Paramodulation (nur für resolutionsbasierte Beweiser)
  - Gleichheitskonnektionen für matrixbasierte Verfahren

Gleichheitskonnektionen

- **Axiomatische Gleichheitsbehandlung ist aufwendig**
  - Einfache Beweise wie $Pf(a,b) \wedge a \doteq c \Rightarrow Pf(c,b)$ werden umständlich



  - Menschen gehen direkter mit Gleichheiten um
- **Verdichte Beweisführung durch eq-Konnektion**
  - Konnektion verbindet Literalpaar und ein oder mehrere Gleichungen
  - Unifikation darf konnektierte Gleichheiten berücksichtigen
- **Strategische Steuerung wird aufwendiger**
  - Welche Gleichheiten sind geeignet? (i.a. unentscheidbares Problem)
  - Sehr kompliziert, wenn gleichzeitig Substitutionen zu bestimmen sind
  - Einfacher, wenn Gleichheit nur getestet werden muß

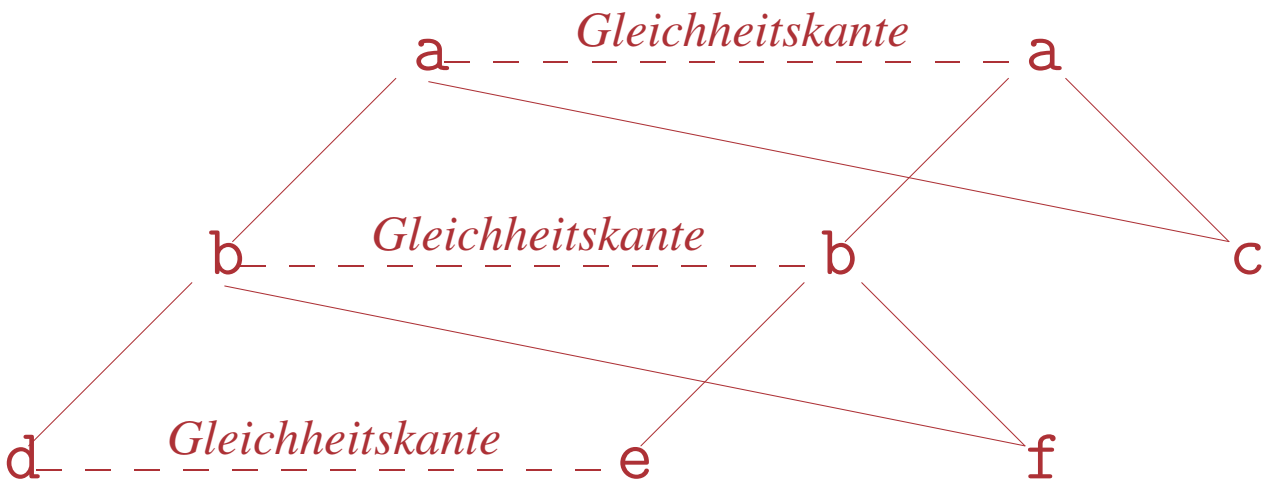
Entscheidungsprozedur für einfache Gleichheit

Folgt eine Gleichheit aus anderen Gleichheiten?

- **Wichtig für praktische Beweisführung**
  - z.B.: $f(f(a,b),b) \doteq a$ folgt aus $f(a,b) \doteq a$
    $g(a) \doteq a$ folgt aus $g(g(g(a))) \doteq a$ und $g(g(g(g(g(a))))) \doteq a$
  - Intuitiver Beweis (gezieltes Einsetzen) einfach
- **Quantorenfreie Gleichheit ist entscheidbar**
  - Einfache Theorie: Gleichheiten mit uninterpretierten Symbolen
  - Semantik: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Substitution
- **Effiziente Verfahren verfügbar**
  - Berechnung der transitiven Hülle einer Äquivalenzrelation
  - Technisch: Kongruenzabschluß des Relationsgraphen
- **Entscheidungsprozedur ist keine Unifikation**
  - Verfahren überprüft Gleichheiten, aber instantiiert keine Variablen

Gleicheitsschliessen durch Kongruenzabschluss

Zeige : `a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)` **folgt aus** `d=e`



1. Verschmelze identische Knoten
2. Verbinde gleiche Knoten durch Gleichheitskante
3. Verbinde Wurzeln von Teilbäumen, die in allen Knoten gleich sind

Gleichheit $\hat{=}$ Wurzeln der Termbäume sind verbunden

Eq: GRAPHENTHEORETISCHE KONZEPTE

- **Notationen für gerichteter Graphen $G = (V, E)$**
  - $l(v)$: Markierung des Knoten v in G
  - $\delta(v)$: Anzahl der von v ausgehenden Kanten
  - $v[i]$: i-ter Nachfolgerknoten von v
  - u **Vorgänger** von v, wenn $v = u[i]$ für ein i

- **Begriffe für Äquivalenzrelationen R auf V**
  - **u und v kongruent unter R** ($u \sim_R v$):
    $l(u) = l(v)$, $\delta(u) = \delta(v)$ und für alle i $(u[i], v[i]) \in R$
  - **R abgeschlossen unter Kongruenzen**: $u \sim_R v \Rightarrow (u, v) \in R$
  - **Kongruenzabschluß R^***: eindeutige minimale Erweiterung von R, die abgeschlossen unter Kongruenzen und Äquivalenzrelation ist

  $\hat{=}$ **Menge aller Äquivalenzen, die logisch aus R folgen**

Gleichheitsschliessen als Kongruenzabschluss

Folgt $s = t$ aus $s_1{=}t_1,\ldots,s_n{=}t_n$?

- **Konstruiere Graph G von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$**
  - G besteht aus Termbäumen von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$
  - Identische Teilausdrücke werden durch denselben Teilbaum dargestellt
- **Bestimme Kongruenzabschluß aller $s_i{=}t_i$ iterativ**
  - Start: R ist Identitätsrelation auf den Knoten von G ($R^* = R$)
  - Im Schritt i bestimme Kongruenzabschluß von $R^* \cup \{(\tau(s_i), \tau(t_i))\}$
    ($\tau(u)$: Wurzelknoten des Termbaums von u)
  - Repräsentiere R^* als Menge von Äquivalenzklassen $\{\, [u]_R \mid u \in V \,\}$
    ($[u]_R \equiv \{x \in V \mid (x, u) \in R\}$)
- **Teste Äquivalenz von s und t**
  - $s = t$ gilt genau dann, wenn $(\tau(s), \tau(t)) \in R^*$

Berechne Kongruenzabschluss von $R \cup \{(u, v)\}$

- **Algorithmus** MERGE(R,u,v)
  - Eingabe: gerichteter Graph $G = (V, E)$, u, $v \in V$

    Äquivalenzrelation R (abgeschlossen unter Kongruenzen)

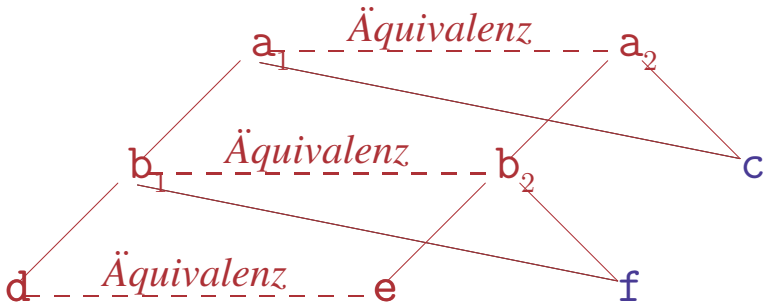
- **Falls $u \sim_R v$, dann halte mit Ergebnis R**
  - Es gilt $(R \cup \{(u, v)\})^* = R$

- **Andernfalls modifiziere R durch Verschmelzung**
  - Setze $P_u := \{x \in V \mid \exists w \in [u]_R.\ x \text{ Vorgänger von } w\}$
  - Setze $P_v := \{x \in V \mid \exists w \in [v]_R.\ x \text{ Vorgänger von } w\}$
  - Vereinige Äquivalenzklassen $[u]_R$ und $[v]_R$ in R
  - Wiederhole für $x \in P_u$ und $y \in P_v$

    Falls $x \sim_R y$ und $[x]_R \neq [y]_R$ dann setze R:=MERGE(R,x,y)

  Halte mit der modifizierten Relation R als Ergebnis

KONGRUENZABSCHLUSS: $d = e \vdash a(b(d, f), c) = a(b(e, f), c)$



- **Graph ist Termbaum von $a(b(d, f), c)$ und $a(b(e, f), c)$**
  - Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum
  - Initiale Relation: $R := \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\}$
- **Hinzunahme von $d = e$**

  Bestimme Vorgänger von $[d]_R$ ($\{b_1\}$) und $[e]_R$ ($\{b_2\}$)
  - Vereinige $[d]_R$ und $[e]_R$: $R := \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d, e\}, \{f\}\}$

  Bestimme Vorgänger von $[b_1]_R$ ($\{a_1\}$) und $[b_2]_R$ ($\{a_2\}$)
  - Vereinige $[b_1]_R$ und $[b_2]_R$: $R := \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c\}, \{d, e\}, \{f\}\}$

  Bestimme Vorgänger von $[a_1]_R$ ($\emptyset$) und $[a_2]_R$ ($\emptyset$)
  - Vereinige $[a_1]_R$ und $[a_2]_R$: $R := \{\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c\}, \{d, e\}, \{f\}\}$

  Wurzelknoten der beiden Terme sind äquivalent

KONGRUENZABSCHLUSS: $g(g(g(a)))\doteq a,\quad g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$

- **Graph ist Termbaum von $g(g(g(g(g(a)))))$**
  - Initiale Relation: $R := \{\{v_1\},\{v_2\},\{v_3\},\{v_4\},\{v_5\},\{v_6\}\}$
- **Hinzunahme von $g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$**
  - $R := \{\{v_1,v_6\},\{v_2\},\{v_3\},\{v_4\},\{v_5\}\}$ ist abgeschlossen
- **Hinzunahme von $g(g(g(a)))\doteq a$**

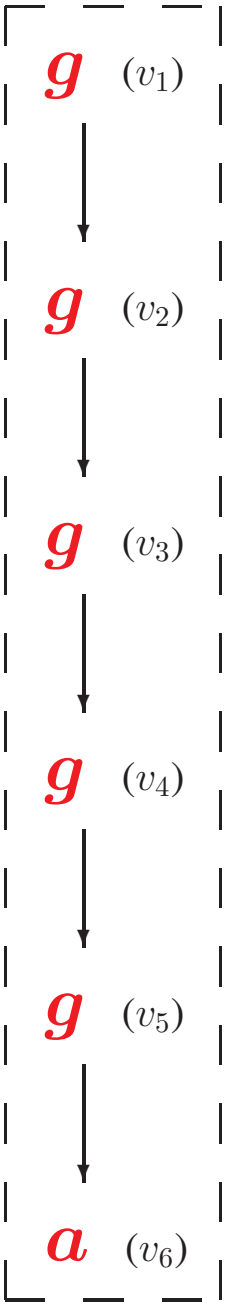
  MERGE(R,v_3,v_6):
  - $P_{v_3} := \{v_2\},\ P_{v_6} := \{v_5\},\ R := \{\{v_1,v_6,v_3\},\{v_2\},\{v_4\},\{v_5\}\}$
  - Wegen $(v_3,v_6)\in R$ gilt $v_2 \sim_R v_5$ aber $[v_2]_R \neq [v_5]_R$

  MERGE(R,v_2,v_5):
  - $P_{v_2} := \{v_1\},\ P_{v_5} := \{v_4\},\ R := \{\{v_1,v_6,v_3\},\{v_4\},\{v_2,v_5\}\}$
  - Wegen $(v_2,v_5)\in R$ gilt $v_1 \sim_R v_4$ aber $[v_1]_R \neq [v_4]_R$

  MERGE(R,v_1,v_4):
  - $P_{v_1} := \{v_2,v_5\},\ P_{v_4} := \{v_3\},\ R := \{\{v_1,v_6,v_3,v_4\},\{v_2,v_5\}\}$
  - Wegen $(v_6,v_4)\in R$ gilt $v_5 \sim_R v_3$ aber $[v_5]_R \neq [v_3]_R$

  MERGE(R,v_5,v_3):
  - $P_{v_5} := \{v_1,v_4\},\ P_{v_3} := \{v_2,v_5,v_3\},\ R := \{\{v_1,v_6,v_3,v_4,v_2,v_5\}\}$

  Alle Knoten sind äquivalent: R=R^*



Integration von Gleichheitsentscheidungen

- **Entscheidungsprozedur ist sehr effizient**
- **Kein Unifikationsverfahren**
  - Variablen werden nicht instantiiert
- **Direkt verwendbar für binäre Konnektionen**
  - Erweitert Unifikation um direkte Gleichheitsschlüsse
- **Unäre, ternäre etc. Schlüsse schwer zu integrieren**
  - Beweissuchverfahren müsste Multi-Konnektionen untersuchen anstelle der viel einfacheren Binärkonnektionen
  - Strategische Steuerung wird aufwendiger
    - Welche Literale sind relevant?
  - Analyse kann Suchverfahren massiv verlangsamen

Immer noch offenes Forschungsthema