Inferenzmethoden

Teil V

Behandlung spezifischer Fragestellungen

Spezialisierte Beweistechniken

1. Verarbeitung mathematischer Theorien
2. Gleichheitsbehandlung
3. Zahlen und Induktion
4. Termersetzung und -auswertung

Prädikatenlogik alleine hat Grenzen

- **Zu wenig vorgegeben Strukturen**
  – Keine Schlüsse über Werte von Termen möglich
  Interpretation von Gleichheit (z.B. 4+4=8) ist nicht festgelegt
  – Kein Schließen über Datentypen möglich
  Interpretation von $\forall x\ x=0 \vee x\geq 1$ nicht festgelegt
  In informaler mathematischer Logik sind diese Konzepte fundamental
- **Erweiterung der Logik durch Axiome unpraktisch**
  \+ alle guten Eigenschaften der Logik bleiben erhalten
  – Formales Schließen mühsam (zu viele Teilformeln)
- **Erweiterung von Semantik und Inferenzsystem**
  – Mehr Theorie: Korrektheit, Vollständigkeit muß neu bewiesen werden
  \+ Formales Schließen "natürlich" und einfacher

Mehr in "Automatisierte Logik und Programmierung"

Es gibt theoriespezifische Spezialverfahren

- **Entscheidungsprozeduren**
  – Testverfahren für Gültigkeit spezieller Formelklassen
    · Folgt eine Gleichheit aus mehreren anderen
    · Folgt eine arithmetische Aussage aus mehreren anderen
  – Sehr effizent für spezielle Anwendungsgebiete
  – Integration in Konnektionsmethode und Resolution schwierig
    · Komplementaritätsbegriff muß erweitert werden
    · Betrachtung von mehr als zwei Literalen macht Suche ineffizienter
- **Rewrite-Verfahren**
  – Bestimmung des Wertes von Termen durch “Umschreibung”
  – Anwendung algebraischer Gesetze als Transformationsregeln
  – Gleichungen erhalten eine Richtung
  – Integration in Unifikationsalgorithmus möglich

Wie kann man dies effizient in der Beweissuche einsetzen?

Inferenzmethoden

Einheit 15

Theorie- und Gleichheitsbehandlung

1. Theorien & Unifikationstheorie
2. Gleichheitsbehandlung in Beweisverfahren
3. Entscheidungsprozeduren für Gleichheit

Verarbeitung mathematischer Standardtheorien

- **Theorien werden beschrieben durch Axiome**
  - "Grundwahrheiten" der Theorie, aus denen alles andere folgt
    - · Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Substitutivität für Gleichheit
    - · Assoziativität, Identität, Inverse für Gruppen
    - · Peano-Axiome für natürliche Zahlen
- **Theorien verwenden oft spezielle Inferenzketten**
  - Standardargumente, die Axiome effizient in Schlußfolgerungen einsetzen
  - z.B. gezieltes Einsetzen von Substitutivität beim Gleichheitsschließen
- **Allgemeine Theorembeweiser unterstützen dies nicht**
  - Theoriespezifische Inferenzen passen nicht zum allgemeinen Verfahren
  - Beweiser müssen Axiome als zusätzliche Klauseln hinzunehmen
  - Alternative ist Integration der Theorie in die Unifikation

Beweise $Pa \wedge a{=}b \ \Rightarrow\ Pb$ aus Gleichheitsaxiomen

- **Integration der Axiome in die Matrix**

$$\left[\begin{array}{ccccccc} Pa^T & a{=}b^T & \begin{array}[t]{c} x{=}y^F \\ y{=}z^F \\ x{=}z^T \end{array} & \begin{array}[t]{c} x{=}y^F \\ y{=}x^T \end{array} & x{=}x^T & \begin{array}[t]{c} x{=}y^F \\ Px^F \\ Py^T \end{array} & Pb^F \end{array}\right]$$

  – Beweissuchverfahren kann unverändert bleiben

  – Zusätzliche Klauseln erhöhen Anzahl der Suchschritte erheblich

Theorieverarbeitung in Beweisverfahren

Beweise $Pa \wedge a{=}b \;\Rightarrow\; Pb$ aus Gleichheitsaxiomen

- **Integration der Axiome in die Matrix**

$$\begin{bmatrix} Pa^T & a{=}b^T & x{=}y^F & x{=}y^F & x{=}x^T & x{=}y^F & Pb^F \\ & & y{=}z^F & y{=}x^T & & Px^F & \\ & & x{=}z^T & & & Py^T & \end{bmatrix}$$

  – Beweissuchverfahren kann unverändert bleiben

  – Zusätzliche Klauseln erhöhen Anzahl der Suchschritte erheblich

- **Einbettung der Theorie durch spezielle Konnektionen**

$$\begin{bmatrix} Pa^T & a{=}b^T & Pb^F \end{bmatrix} \quad \text{wobei } \boxed{EQ} \equiv \begin{bmatrix} x{=}y^F & x{=}y^F & x{=}x^T & x{=}y^F \\ y{=}z^F & y{=}x^T & & Px^F \\ x{=}z^T & & & Py^T \end{bmatrix}$$

  – Theoriekonnektion beinhaltet Inferenzschritte der Theorie EQ

  – Suchverfahren & Unifikationsmechanismus müssen angepasst werden

THEORIEKONNEKTIONEN

- **Erweiterter Komplementaritätsbegriff für Theorien**
  – $P\,t_1{}^T$ und $P\,t_2{}^F$ sind komplementär in der Theorie $\mathcal{T}$, wenn $\sigma(t_1)$ und $\sigma(t_2)$ in $\mathcal{T}$ gleich sind (σ zulässige Substitution)
  – Erlaubt Verarbeitung theoriespezifischer Inferenzketten
- **Unifikation wird mehr als syntaktisches Gleichmachen**

$$\begin{bmatrix} & & P(1)^F \\ & \text{Arith} & \\ P((x{+}x){-}1)^T & & \end{bmatrix} \sigma{=}[1/x]$$

  – Konnektion benutzt Unifikation für einfache Arithmetik

$$\begin{bmatrix} & & R(z{\cdot}(\overline{c}{\cdot}c),\, z{\cdot}(\overline{z}{\cdot}b))^F \\ & \text{Group} & \\ R(c,b)^T & & \end{bmatrix} \sigma{=}[c/z]$$

  – Konnektion benutzt Unifikation für Gruppentheorie
- **Allgemeiner Mechanismus noch wenig erforscht**
  – Meist Integration von Theorie-Unifikation in konventionelle Beweiser
  – Konnektionen können auch unär, ternär oder komplexer sein

Erweiterung: gerichtete Theoriekonnektionen

- **Theorieimplikation** $\Rightarrow_{\mathcal{T}}$
  - Implikation die in der Theorie $\mathcal{T}$ gültig ist
- **Gerichtete σ-komplementäre Konnektion** (L^T, L'^F)
  - Es gilt $\sigma(L)=\sigma(L')$ oder $\sigma(L)\Rightarrow_{\mathcal{T}}\sigma(L')$
  - Richtung geht immer von Polarität T nach F
- **Unäre σ-komplementäre Konnektion** L^T **oder** L'^F
  - Es gilt $\sigma(L)\Rightarrow_{\mathcal{T}}\mathsf{False}$ bzw. $\mathsf{True}\Rightarrow_{\mathcal{T}}\sigma(L')$
  - Gültigkeit folgt alleine aus der Theorie, ohne Gegenliteral

$$\Downarrow$$

Eine Formel F ist gültig in der Theorie $\mathcal{T}$, wenn es eine Multiplizität μ, eine zulässige Substitution σ und eine Menge $\mathcal{C}$ von bezüglich $\mathcal{T}$ σ-komplementären gerichteten Konnektionen gibt, so daß jeder Pfad durch F eine Konnektion aus $\mathcal{C}$ enthält

UNIFIKATIONSTHEORIE

- **Es gibt noch viele offene Fragen**
  - Wie genau Unifizierbarkeit modulo Theorie $\mathcal{T}$ definieren?
  - Gibt es mgu's und, wenn ja, wieviele?
  - Gibt es Unifikationsalgorithmen (als Entscheidungsprozeduren)?
  - Was ist die Komplexität des Unifikationsverfahrens?
- **Bisher gibt es nur wenig allgemeine Lösungen**
  - Erfolgreich nur für spezielle Theorien (Gleichheit, Gruppen, . . .)
- **Es gibt verschiedene Typen von Unifikationstheorien**
  - **unitär**: Genau ein allgemeinsten Unifikator (z.B. Standard-Unifikation)
  - **finitär**:endlich viele allgemeinste Unifikatoren (z.B. AC-/Präfix-Unifikation)
  - **infinitäre**: unendlich viele mgu's (z.B. Unifikation modulo Assoziativität)
  - **leer**: keine allgemeinsten Unifikatoren (wenig erwünscht)

Die Theorie der Gleichheit

- **Wichtigste Grundbeziehung zwischen Objekten**
  - Spezialbehandlung sehr lohnenswert
  - Dargestellt als zweistelliges Prädikat zwischen Termen
  - Prädikatszeichen $\doteq$ in Infix-Notation
- **Charakterisiert durch 5 Grundeigenschaften**
  - $x \doteq x$ — Reflexivität
  - $x \doteq y \;\Rightarrow\; y \doteq x$ — Symmetrie
  - $x \doteq y \wedge y \doteq z \;\Rightarrow\; x \doteq z$ — Transitivität
  - $x_i \doteq y \;\Rightarrow\; f(x_1, .., x_i, .., x_n) \doteq f(x_1, .., y, .., x_n)$
    Substitutivität auf Funktionen (Schema)
  - $x_i \doteq y \;\Rightarrow\; [P(x_1, .., x_i, .., x_n) \Leftrightarrow P(x_1, .., y, .., x_n)]$
    Substitutivität auf Prädikaten (Schema)

Symmetrie und Transitivität sind ableitbar

Axiomatische Gleichheitsbehandlung

Erweitere Formel um Axiome der Gleichheit

- **Verwende minimale Axiomenmenge**
  - $x \doteq x$
  - $x_i \doteq y \;\Rightarrow\; f(x_1, .., x_i, .., x_n) \doteq f(x_1, .., y, .., x_n)$
  - $x_i \doteq y \;\Rightarrow\; [P(x_1, .., x_i, .., x_n) \Rightarrow P(x_1, .., y, .., x_n)]$

  Das Schema der Substitutivität muß für jedes vorkommende Funktions- und Prädikatssymbol instantiiert werden
- **Erhebliche Vergrößerung des Suchraums**
  - Unbrauchbar für komplexe Formeln
  - In der Praxis bei kleinen Formeln oft effizienter als Spezialverfahren
- **Alternative Techniken**
  - Paramodulation (nur für resolutionsbasierte Beweiser)
  - Gleichheitskonnektionen für matrixbasierte Verfahren

Axiomatische Gleichheitsbehandlung

Erweitere Formel um Axiome der Gleichheit

- **Verwende minimale Axiomenmenge**
  - $x \doteq x$
  - $x_i \doteq y \;\Rightarrow\; f(x_1,..,x_i,..,x_n) \doteq f(x_1,..,y,..,x_n)$
  - $x_i \doteq y \;\Rightarrow\; [P(x_1,..,x_i,..,x_n) \Rightarrow P(x_1,..,y,..,x_n)]$

  Das Schema der Substitutivität muß für jedes vorkommende Funktions- und Prädikatssymbol instantiiert werden
- **Erhebliche Vergrößerung des Suchraums**
  - Unbrauchbar für komplexe Formeln
  - In der Praxis bei kleinen Formeln oft effizienter als Spezialverfahren
- **Alternative Techniken**
  - Paramodulation (nur für resolutionsbasierte Beweiser)
  - Gleichheitskonnektionen für matrixbasierte Verfahren

Gleichheitskonnektionen

- **Axiomatische Gleichheitsbehandlung ist aufwendig**
  - Einfache Beweise wie $Pf(a,b) \land a \doteq c \;\Rightarrow\; Pf(c,b)$ werden umständlich

$$\left[\begin{array}{ccccc} x\doteq y^F & x\doteq y^F & & & \\ f(x,z)\doteq f(y,z)^F & Px^F & Pf(a,b)^T & a\doteq c^T & Pf(c,b)^F \\ & Py^T & & & \end{array}\right]$$

  - Menschen gehen direkter mit Gleichheiten um
- **Verdichte Beweisführung durch eq-Konnektion**
  - Konnektion verbindet Literalpaar und ein oder mehrere Gleichungen
  - Unifikation darf konnektierte Gleichheiten berücksichtigen
- **Strategische Steuerung wird aufwendiger**
  - Welche Gleichheiten sind geeignet? (i.a. unentscheidbares Problem)
  - Sehr kompliziert, wenn gleichzeitig Substitutionen zu bestimmen sind
  - Einfacher, wenn Gleichheit nur getestet werden muß

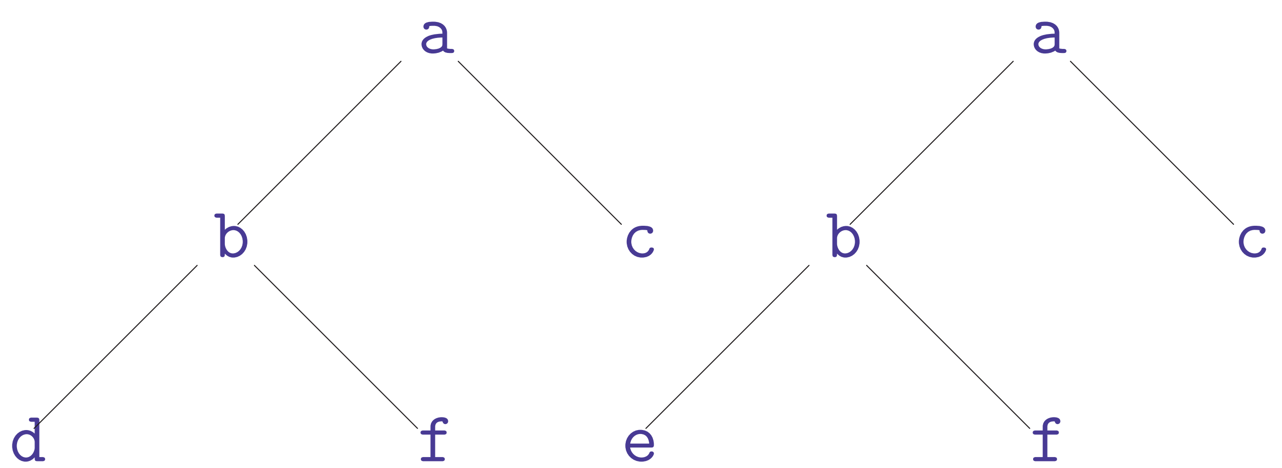
Entscheidungsprozedur für einfache Gleichheit

Folgt eine Gleichheit aus anderen Gleichheiten?

- **Wichtig für praktische Beweisführung**
  - z.B.: $f(f(a,b),b)\doteq a$ folgt aus $f(a,b)\doteq a$
    $g(a)\doteq a$ folgt aus $g(g(g(a)))\doteq a$ und $g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$
  - Intuitiver Beweis (gezieltes Einsetzen) einfach
- **Quantorenfreie Gleichheit ist entscheidbar**
  - Einfache Theorie: Gleichheiten mit uninterpretierten Symbolen
  - Semantik: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität, Substitution
- **Effiziente Verfahren verfügbar**
  - Berechnung der transitiven Hülle einer Äquivalenzrelation
  - Technisch: Kongruenzabschluß des Relationsgraphen
- **Entscheidungsprozedur ist keine Unifikation**
  - Verfahren überprüft Gleichheiten, aber instantiiert keine Variablen

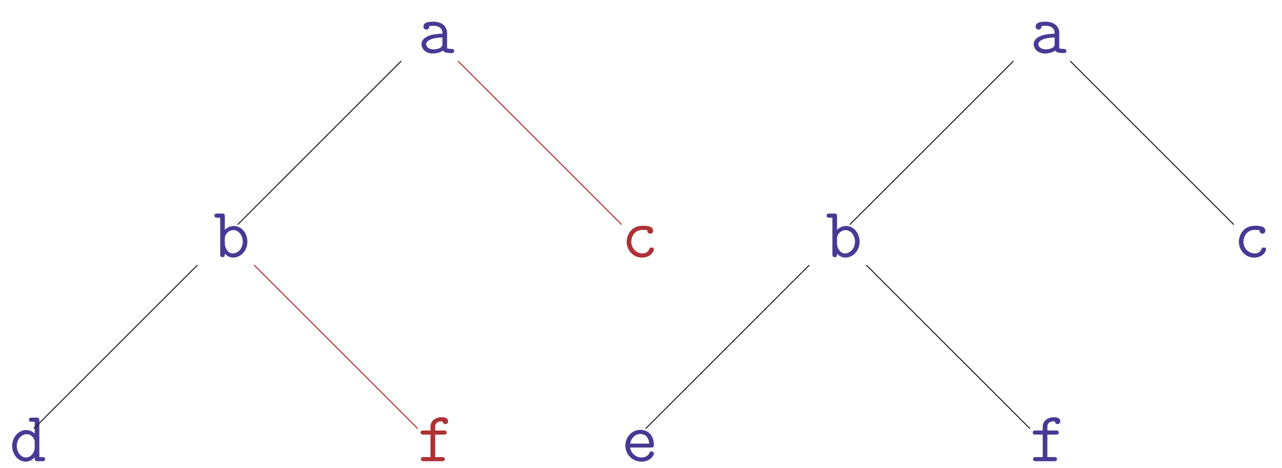
Gleichheitsschliessen durch Kongruenzabschluss

Zeige : `a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)` **folgt aus** `d=e`



Gleichheitsschliessen durch Kongruenzabschluss

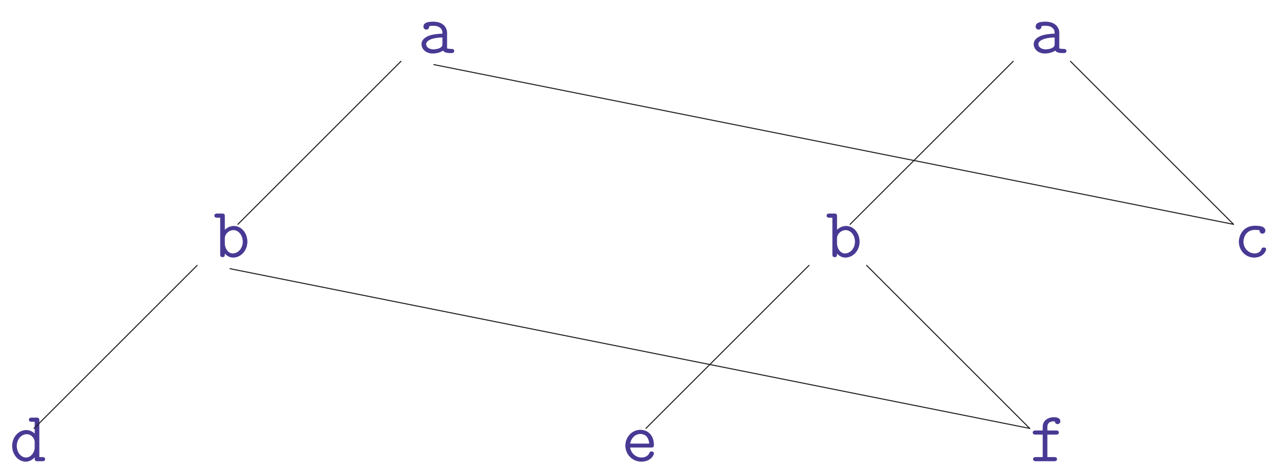
Zeige : `a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)` **folgt aus** `d=e`



1. Verschmelze identische Knoten

Gleichheitsschliessen durch Kongruenzabschluss

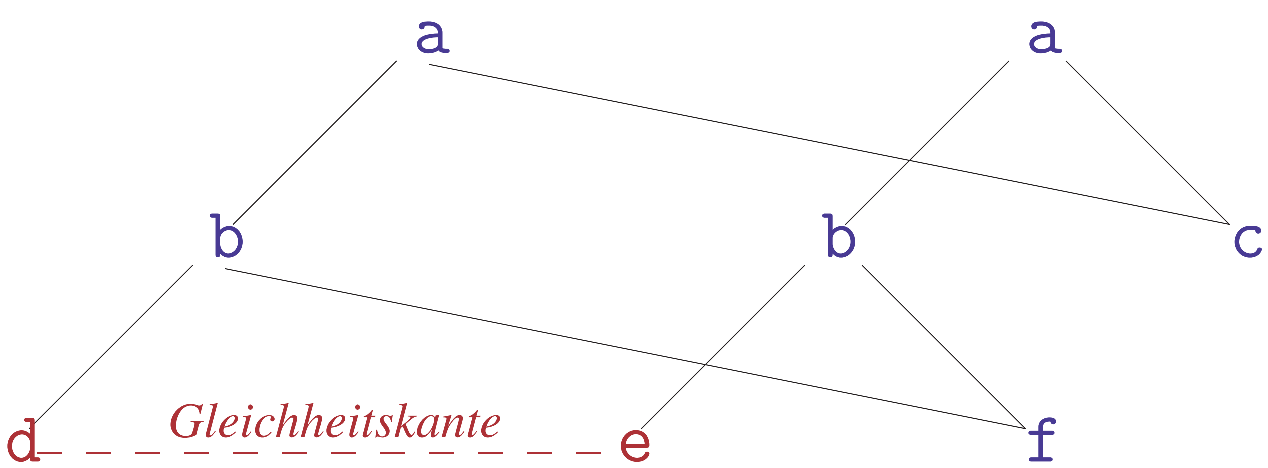
Zeige : `a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)` **folgt aus** `d=e`



1. Verschmelze identische Knoten

Gleichheitsschliessen durch Kongruenzabschluss

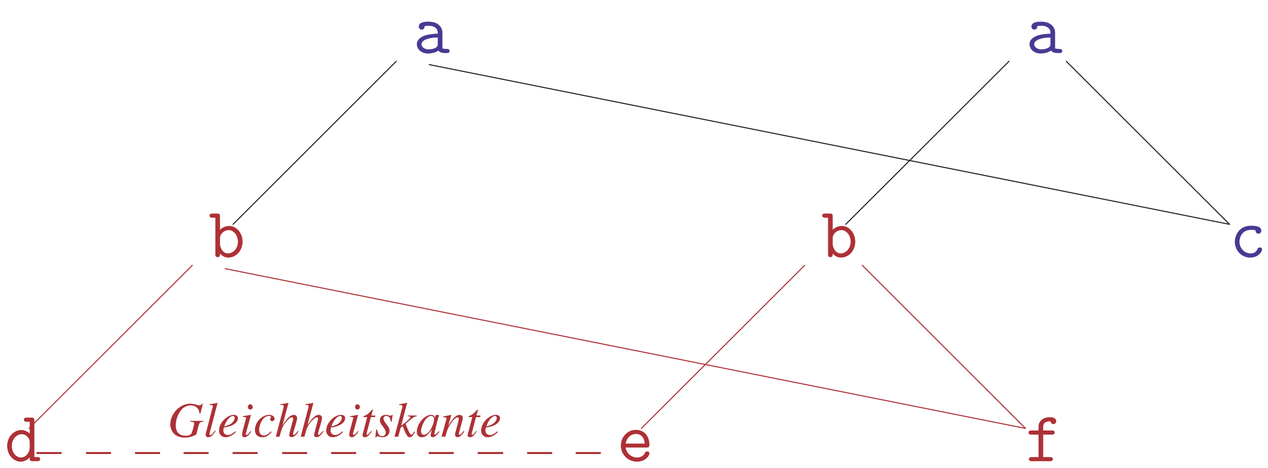
Zeige : `a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)` **folgt aus** `d=e`



1. Verschmelze identische Knoten
2. Verbinde gleiche Knoten durch Gleichheitskante

Gleichheitsschliessen durch Kongruenzabschluss

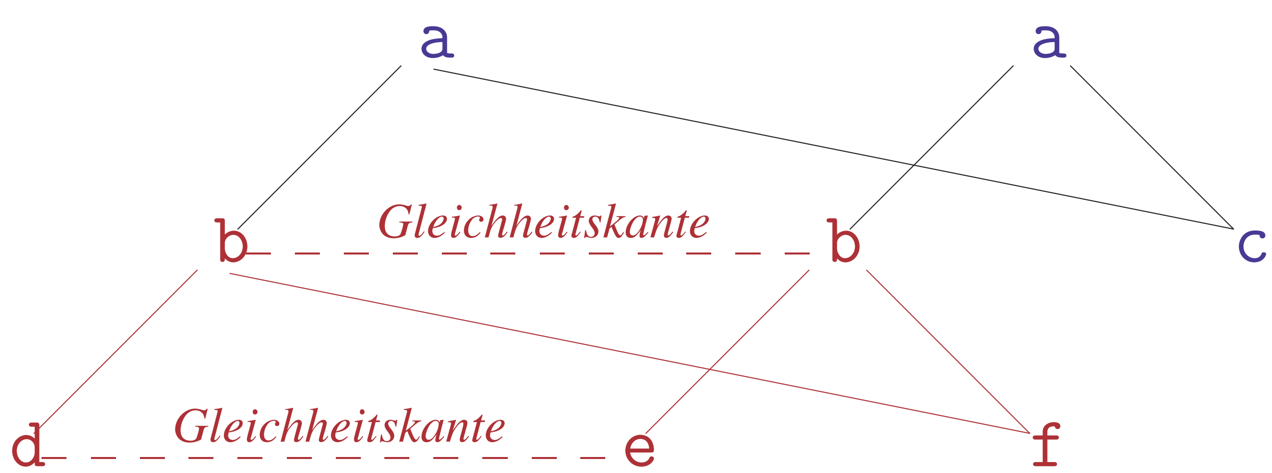
Zeige : `a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)` **folgt aus** `d=e`



1. Verschmelze identische Knoten
2. Verbinde gleiche Knoten durch Gleichheitskante
3. Verbinde Wurzeln von Teilbäumen, die in allen Knoten gleich sind

GLEICHEITSSCHLIESSEN DURCH KONGRUENZABSCHLUSS

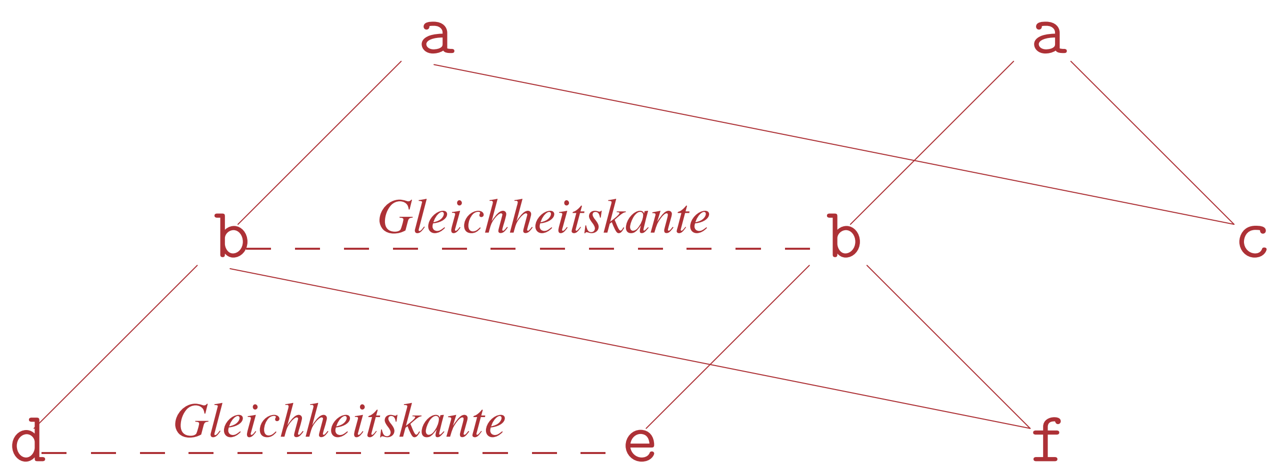
Zeige : `a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)` **folgt aus** `d=e`



1. Verschmelze identische Knoten
2. Verbinde gleiche Knoten durch Gleichheitskante
3. Verbinde Wurzeln von Teilbäumen, die in allen Knoten gleich sind

GLEICHHEITSSCHLIESSEN DURCH KONGRUENZABSCHLUSS

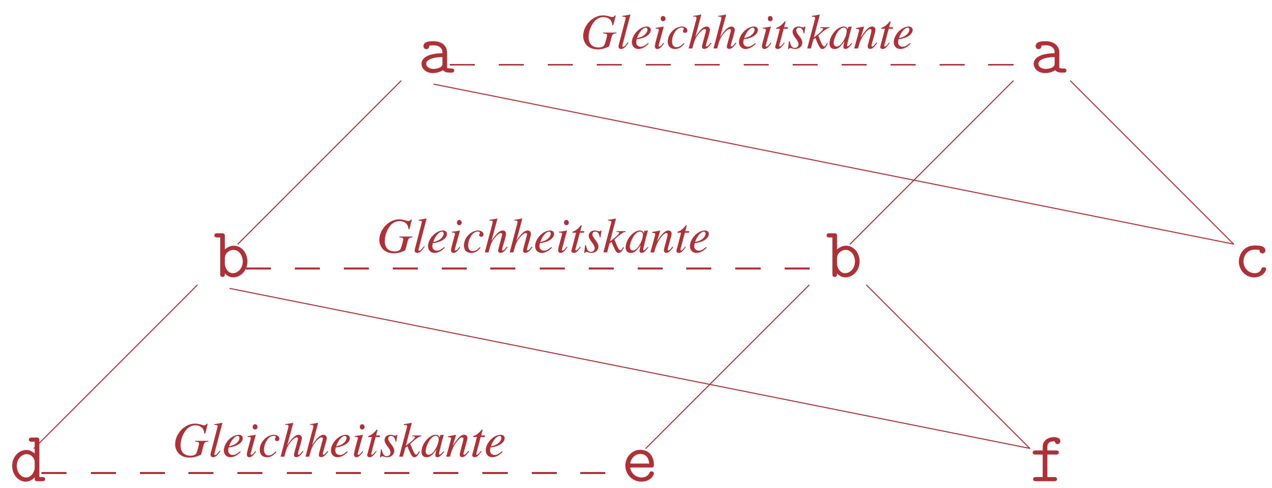
Zeige : `a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)` **folgt aus** `d=e`



1. Verschmelze identische Knoten
2. Verbinde gleiche Knoten durch Gleichheitskante
3. Verbinde Wurzeln von Teilbäumen, die in allen Knoten gleich sind

GLEICHEITSSCHLIESSEN DURCH KONGRUENZABSCHLUSS

Zeige : `a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)` **folgt aus** `d=e`



1. Verschmelze identische Knoten
2. Verbinde gleiche Knoten durch Gleichheitskante
3. Verbinde Wurzeln von Teilbäumen, die in allen Knoten gleich sind

Gleichheit $\hat{=}$ Wurzeln der Termbäume sind verbunden

Eq: Graphentheoretische Konzepte

- **Notationen für gerichteter Graphen $G = (V, E)$**
  - $l(v)$: Markierung des Knoten v in G
  - $\delta(v)$: Anzahl der von v ausgehenden Kanten
  - $v[i]$: i-ter Nachfolgerknoten von v
  - u **Vorgänger** von v, wenn $v = u[i]$ für ein i
- **Begriffe für Äquivalenzrelationen R auf V**
  - **u und v kongruent unter R** ($u \sim_R v$):
    $l(u) = l(v)$, $\delta(u) = \delta(v)$ und für alle i $(u[i], v[i]) \in R$
  - **R abgeschlossen unter Kongruenzen**: $u \sim_R v \Rightarrow (u, v) \in R$
  - **Kongruenzabschluß R^***: eindeutige minimale Erweiterung von R, die abgeschlossen unter Kongruenzen und Äquivalenzrelation ist

  $\hat{=}$ **Menge aller Äquivalenzen, die logisch aus R folgen**

Gleichheitsschliessen als Kongruenzabschluss

Folgt $s = t$ aus $s_1{=}t_1,\ldots,s_n{=}t_n$?

- **Konstruiere Graph G von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$**
  - G besteht aus Termbäumen von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$
  - Identische Teilausdrücke werden durch denselben Teilbaum dargestellt
- **Bestimme Kongruenzabschluß aller $s_i{=}t_i$ iterativ**
  - Start: R ist Identitätsrelation auf den Knoten von G $(R^* = R)$
  - Im Schritt i bestimme Kongruenzabschluß von $R^* \cup \{(\tau(s_i), \tau(t_i))\}$

    ($\tau(u)$: Wurzelknoten des Termbaums von u)
  - Repräsentiere R^* als Menge von Äquivalenzklassen $\{\, [u]_R \mid u \in V \,\}$

    ($[u]_R \equiv \{x \in V \mid (x,u) \in R\}$)
- **Teste Äquivalenz von s und t**
  - $s = t$ gilt genau dann, wenn $(\tau(s), \tau(t)) \in R^*$

Gleichheitsschliessen als Kongruenzabschluss

Folgt $s = t$ aus $s_1{=}t_1,\ldots,s_n{=}t_n$?

- **Konstruiere Graph G von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$**
  - G besteht aus Termbäumen von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$
  - Identische Teilausdrücke werden durch denselben Teilbaum dargestellt
- **Bestimme Kongruenzabschluß aller $s_i{=}t_i$ iterativ**
  - Start: R ist Identitätsrelation auf den Knoten von G $(R^* = R)$
  - Im Schritt i bestimme Kongruenzabschluß von $R^* \cup \{(\tau(s_i), \tau(t_i))\}$

    ($\tau(u)$: Wurzelknoten des Termbaums von u)
  - Repräsentiere R^* als Menge von Äquivalenzklassen $\{\,[u]_R \mid u \in V\,\}$

    ($[u]_R \equiv \{x \in V \mid (x,u) \in R\}$)
- **Teste Äquivalenz von s und t**
  - $s = t$ gilt genau dann, wenn $(\tau(s), \tau(t)) \in R^*$

Gleichheitsschliessen als Kongruenzabschluss

Folgt $s = t$ aus $s_1{=}t_1,\ldots,s_n{=}t_n$?

- **Konstruiere Graph G von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$**
  – G besteht aus Termbäumen von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$
  – Identische Teilausdrücke werden durch denselben Teilbaum dargestellt
- **Bestimme Kongruenzabschluß aller $s_i{=}t_i$ iterativ**
  – Start: R ist Identitätsrelation auf den Knoten von G $(R^* = R)$
  – Im Schritt i bestimme Kongruenzabschluß von $R^* \cup \{(\tau(s_i), \tau(t_i))\}$
  ($\tau(u)$: Wurzelknoten des Termbaums von u)
  – Repräsentiere R^* als Menge von Äquivalenzklassen $\{\, [u]_R \mid u \in V \,\}$
  ($[u]_R \equiv \{x \in V \mid (x, u) \in R\}$)
- **Teste Äquivalenz von s und t**
  – $s = t$ gilt genau dann, wenn $(\tau(s), \tau(t)) \in R^*$

Gleichheitsschliessen als Kongruenzabschluss

Folgt $s = t$ aus $s_1{=}t_1, \ldots, s_n{=}t_n$?

- **Konstruiere Graph G von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$**
  - G besteht aus Termbäumen von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$
  - Identische Teilausdrücke werden durch denselben Teilbaum dargestellt
- **Bestimme Kongruenzabschluß aller $s_i{=}t_i$ iterativ**
  - Start: R ist Identitätsrelation auf den Knoten von G $(R^* = R)$
  - Im Schritt i bestimme Kongruenzabschluß von $R^* \cup \{(\tau(s_i), \tau(t_i))\}$

    ($\tau(u)$: Wurzelknoten des Termbaums von u)
  - Repräsentiere R^* als Menge von Äquivalenzklassen $\{\, [u]_R \mid u \in V \,\}$

    ($[u]_R \equiv \{x \in V \mid (x, u) \in R\}$)
- **Teste Äquivalenz von s und t**
  - $s = t$ gilt genau dann, wenn $(\tau(s), \tau(t)) \in R^*$

Gleichheitsschliessen als Kongruenzabschluss

Folgt $s = t$ aus $s_1{=}t_1,\ldots,s_n{=}t_n$?

- **Konstruiere Graph G von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$**
  - G besteht aus Termbäumen von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$
  - Identische Teilausdrücke werden durch denselben Teilbaum dargestellt
- **Bestimme Kongruenzabschluß aller $s_i{=}t_i$ iterativ**
  - Start: R ist Identitätsrelation auf den Knoten von G ($R^* = R$)
  - Im Schritt i bestimme Kongruenzabschluß von $R^* \cup \{(\tau(s_i), \tau(t_i))\}$

    ($\tau(u)$: Wurzelknoten des Termbaums von u)
  - Repräsentiere R^* als Menge von Äquivalenzklassen $\{\, [u]_R \mid u \in V \,\}$

    ($[u]_R \equiv \{x \in V \mid (x, u) \in R\}$)
- **Teste Äquivalenz von s und t**
  - $s = t$ gilt genau dann, wenn $(\tau(s), \tau(t)) \in R^*$

Gleichheitsschliessen als Kongruenzabschluss

Folgt $s = t$ aus $s_1{=}t_1,\ldots,s_n{=}t_n$?

- **Konstruiere Graph G von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$**
  - G besteht aus Termbäumen von $s, s_1, .., s_n,\ t, t_1, .., t_n$
  - Identische Teilausdrücke werden durch denselben Teilbaum dargestellt
- **Bestimme Kongruenzabschluß aller $s_i{=}t_i$ iterativ**
  - Start: R ist Identitätsrelation auf den Knoten von G $(R^* = R)$
  - Im Schritt i bestimme Kongruenzabschluß von $R^* \cup \{(\tau(s_i), \tau(t_i))\}$

    ($\tau(u)$: Wurzelknoten des Termbaums von u)
  - Repräsentiere R^* als Menge von Äquivalenzklassen $\{\, [u]_R \mid u \in V \,\}$

    ($[u]_R \equiv \{x \in V \mid (x, u) \in R\}$)
- **Teste Äquivalenz von s und t**
  - $s = t$ gilt genau dann, wenn $(\tau(s), \tau(t)) \in R^*$

Berechne Kongruenzabschluss von $R \cup \{(u,v)\}$

- **Algorithmus MERGE(R,u,v)**
  - Eingabe: gerichteter Graph $G = (V, E)$, u, $v \in V$

    Äquivalenzrelation R (abgeschlossen unter Kongruenzen)

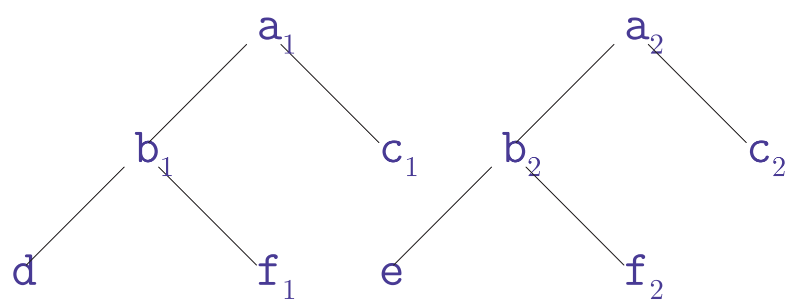
- **Falls $u \sim_R v$, dann halte mit Ergebnis R**
  - Es gilt $(R \cup \{(u,v)\})^* = R$

- **Andernfalls modifiziere R durch Verschmelzung**
  - Setze $P_u := \{x \in V \mid \exists w \in [u]_R.\ x \text{ Vorgänger von } w\}$
  - Setze $P_v := \{x \in V \mid \exists w \in [v]_R.\ x \text{ Vorgänger von } w\}$
  - Vereinige Äquivalenzklassen $[u]_R$ und $[v]_R$ in R
  - Wiederhole für $x \in P_u$ und $y \in P_v$

    Falls $x \sim_R y$ und $[x]_R \neq [y]_R$ dann setze R:=MERGE(R,x,y)

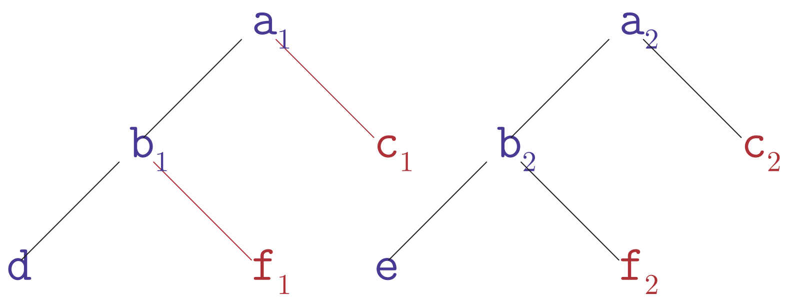
  Halte mit der modifizierten Relation R als Ergebnis

KONGRUENZABSCHLUSS: $d = e \vdash a(b(d, f), c) = a(b(e, f), c)$



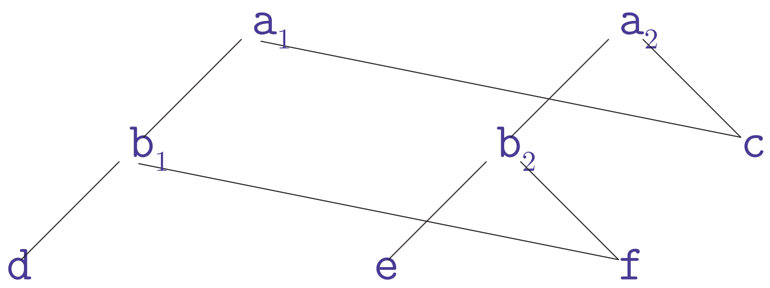
- **Graph ist Termbaum von $a(b(d, f), c)$ und $a(b(e, f), c)$**

KONGRUENZABSCHLUSS: $d = e \vdash a(b(d, f), c) = a(b(e, f), c)$



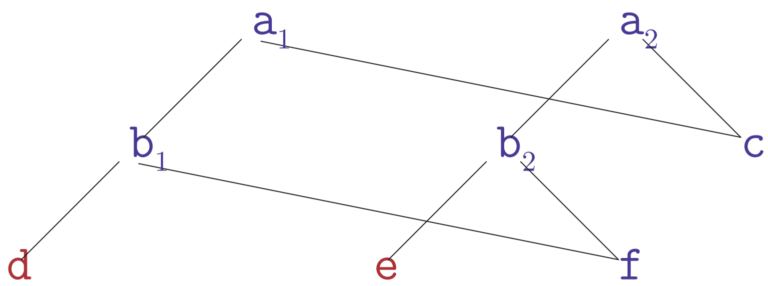
- **Graph ist Termbaum von $a(b(d, f), c)$ und $a(b(e, f), c)$**
  – Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum

KONGRUENZABSCHLUSS: $d = e \vdash a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)$



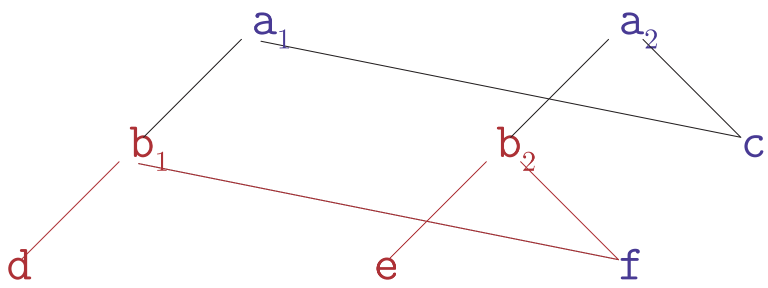
- **Graph ist Termbaum von $a(b(d,f),c)$ und $a(b(e,f),c)$**
  - Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum
  - Initiale Relation: $R := \{\,\{a_1\},\{a_2\},\{b_1\},\{b_2\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\,\}$

Kongruenzabschluss: $d = e \vdash a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)$



- **Graph ist Termbaum von $a(b(d,f),c)$ und $a(b(e,f),c)$**
  - Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum
  - Initiale Relation: $R := \{\, \{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\, \}$
- **Hinzunahme von $d = e$**

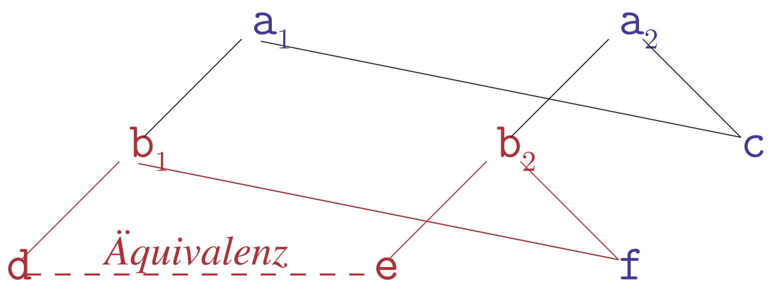
Kongruenzabschluss: $d = e \vdash a(b(d, f), c) = a(b(e, f), c)$



- **Graph ist Termbaum von $a(b(d, f), c)$ und $a(b(e, f), c)$**
  - Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum
  - Initiale Relation: $R := \{ \{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\} \}$
- **Hinzunahme von $d = e$**

  Bestimme Vorgänger von $[d]_R$ ($\{b_1\}$) und $[e]_R$ ($\{b_2\}$)

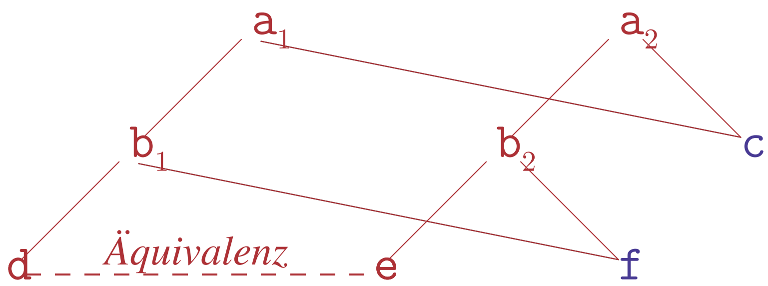
KONGRUENZABSCHLUSS: $d = e \vdash a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)$



- **Graph ist Termbaum von $a(b(d,f),c)$ und $a(b(e,f),c)$**
  - Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum
  - Initiale Relation: $R := \{\, \{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\, \}$
- **Hinzunahme von $d = e$**

  Bestimme Vorgänger von $[d]_R$ ($\{b_1\}$) und $[e]_R$ ($\{b_2\}$)
  - Vereinige $[d]_R$ und $[e]_R$: $R := \{\, \{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d,e\}, \{f\}\, \}$

Kongruenzabschluss: $d = e \vdash a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)$

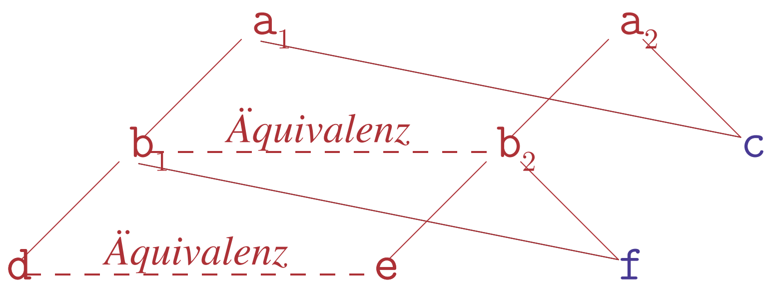


- **Graph ist Termbaum von $a(b(d,f),c)$ und $a(b(e,f),c)$**
  - Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum
  - Initiale Relation: $R := \{\ \{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\ \}$
- **Hinzunahme von $d = e$**

  Bestimme Vorgänger von $[d]_R$ ($\{b_1\}$) und $[e]_R$ ($\{b_2\}$)
  - Vereinige $[d]_R$ und $[e]_R$: $R := \{\ \{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d,e\}, \{f\}\ \}$

  Bestimme Vorgänger von $[b_1]_R$ ($\{a_1\}$) und $[b_2]_R$ ($\{a_2\}$)

KONGRUENZABSCHLUSS: $d = e \vdash a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)$

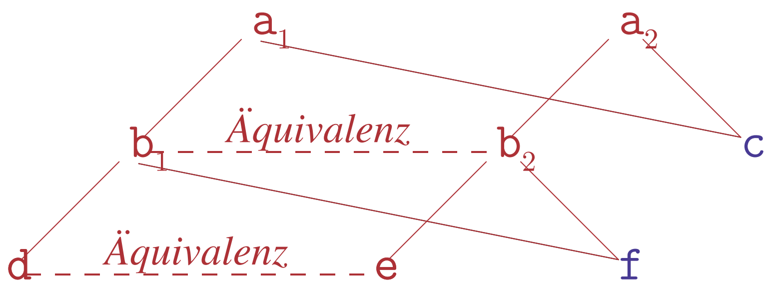


- **Graph ist Termbaum von $a(b(d,f),c)$ und $a(b(e,f),c)$**
  - Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum
  - Initiale Relation: $R := \{\,\{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\,\}$
- **Hinzunahme von $d = e$**

  Bestimme Vorgänger von $[d]_R$ ($\{b_1\}$) und $[e]_R$ ($\{b_2\}$)
  - Vereinige $[d]_R$ und $[e]_R$: $R := \{\,\{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d,e\}, \{f\}\,\}$

  Bestimme Vorgänger von $[b_1]_R$ ($\{a_1\}$) und $[b_2]_R$ ($\{a_2\}$)
  - Vereinige $[b_1]_R$ und $[b_2]_R$: $R := \{\,\{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1,b_2\}, \{c\}, \{d,e\}, \{f\}\,\}$

KONGRUENZABSCHLUSS: $d = e \vdash a(b(d,f),c) = a(b(e,f),c)$



- **Graph ist Termbaum von $a(b(d,f),c)$ und $a(b(e,f),c)$**
  - Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum
  - Initiale Relation: $R := \{\,\{a_1\},\{a_2\},\{b_1\},\{b_2\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}\,\}$

- **Hinzunahme von $d = e$**

  Bestimme Vorgänger von $[d]_R$ ($\{b_1\}$) und $[e]_R$ ($\{b_2\}$)

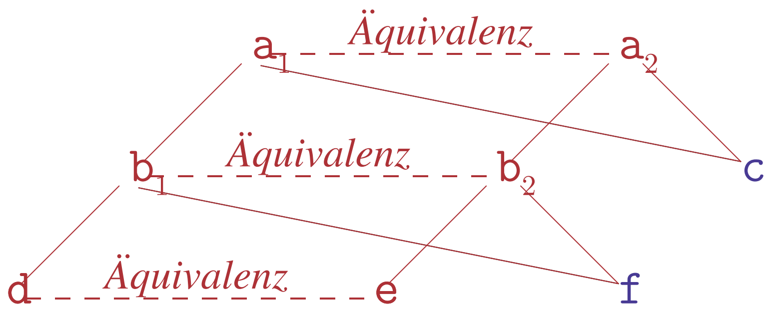
  – Vereinige $[d]_R$ und $[e]_R$: $R := \{\,\{a_1\},\{a_2\},\{b_1\},\{b_2\},\{c\},\{d,e\},\{f\}\,\}$

  Bestimme Vorgänger von $[b_1]_R$ ($\{a_1\}$) und $[b_2]_R$ ($\{a_2\}$)

  – Vereinige $[b_1]_R$ und $[b_2]_R$: $R := \{\,\{a_1\},\{a_2\},\{b_1,b_2\},\{c\},\{d,e\},\{f\}\,\}$

  Bestimme Vorgänger von $[a_1]_R$ ($\emptyset$) und $[a_2]_R$ ($\emptyset$)

KONGRUENZABSCHLUSS: $d = e \vdash a(b(d, f), c) = a(b(e, f), c)$



- **Graph ist Termbaum von $a(b(d, f), c)$ und $a(b(e, f), c)$**
  - Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum
  - Initiale Relation: $R := \{ \{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\} \}$

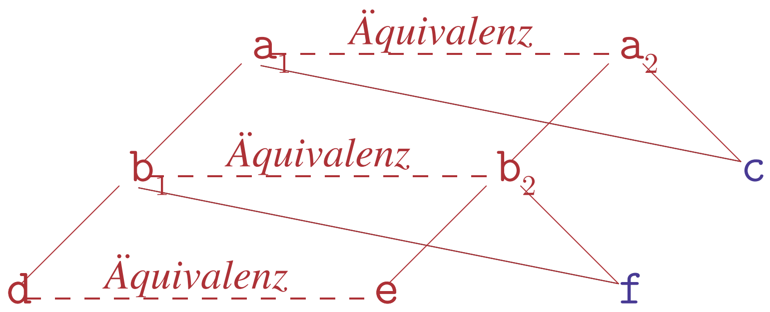
- **Hinzunahme von $d = e$**

  Bestimme Vorgänger von $[d]_R$ ($\{b_1\}$) und $[e]_R$ ($\{b_2\}$)
  - Vereinige $[d]_R$ und $[e]_R$: $R := \{ \{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d, e\}, \{f\} \}$

  Bestimme Vorgänger von $[b_1]_R$ ($\{a_1\}$) und $[b_2]_R$ ($\{a_2\}$)
  - Vereinige $[b_1]_R$ und $[b_2]_R$: $R := \{ \{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c\}, \{d, e\}, \{f\} \}$

  Bestimme Vorgänger von $[a_1]_R$ ($\emptyset$) und $[a_2]_R$ ($\emptyset$)
  - Vereinige $[a_1]_R$ und $[a_2]_R$: $R := \{ \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c\}, \{d, e\}, \{f\} \}$

KONGRUENZABSCHLUSS: $d = e \vdash a(b(d, f), c) = a(b(e, f), c)$



- **Graph ist Termbaum von $a(b(d, f), c)$ und $a(b(e, f), c)$**
  - Identische Teilausdrücke benutzen denselben Teilbaum
  - Initiale Relation: $R := \{\,\{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}\,\}$
- **Hinzunahme von $d = e$**

  Bestimme Vorgänger von $[d]_R$ ($\{b_1\}$) und $[e]_R$ ($\{b_2\}$)

  – Vereinige $[d]_R$ und $[e]_R$: $R := \{\,\{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{c\}, \{d, e\}, \{f\}\,\}$

  Bestimme Vorgänger von $[b_1]_R$ ($\{a_1\}$) und $[b_2]_R$ ($\{a_2\}$)

  – Vereinige $[b_1]_R$ und $[b_2]_R$: $R := \{\,\{a_1\}, \{a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c\}, \{d, e\}, \{f\}\,\}$

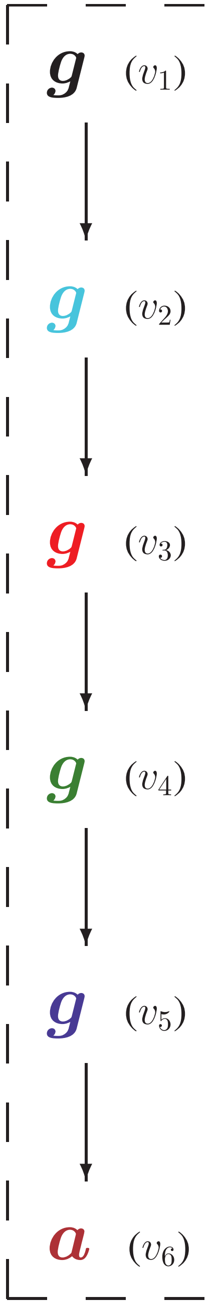
  Bestimme Vorgänger von $[a_1]_R$ ($\emptyset$) und $[a_2]_R$ ($\emptyset$)

  – Vereinige $[a_1]_R$ und $[a_2]_R$: $R := \{\,\{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c\}, \{d, e\}, \{f\}\,\}$

  Wurzelknoten der beiden Terme sind äquivalent

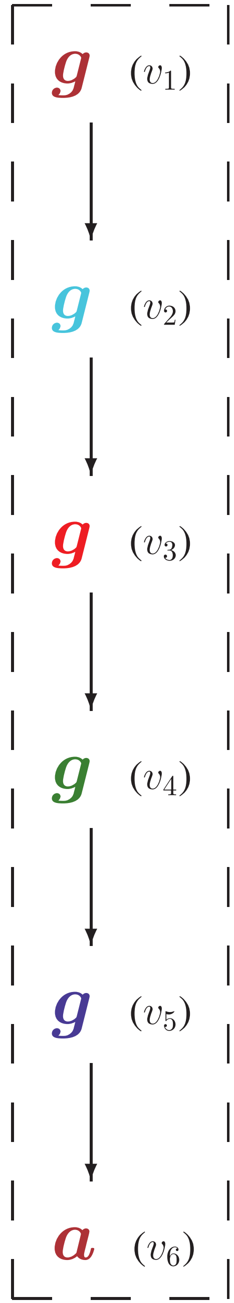
Kongruenzabschluss: $g(g(g(a)))\doteq a,\quad g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$

- **Graph ist Termbaum von $\boldsymbol{g(g(g(g(g(a)))))}$**
  - Initiale Relation: $R := \{\,\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}\,\}$



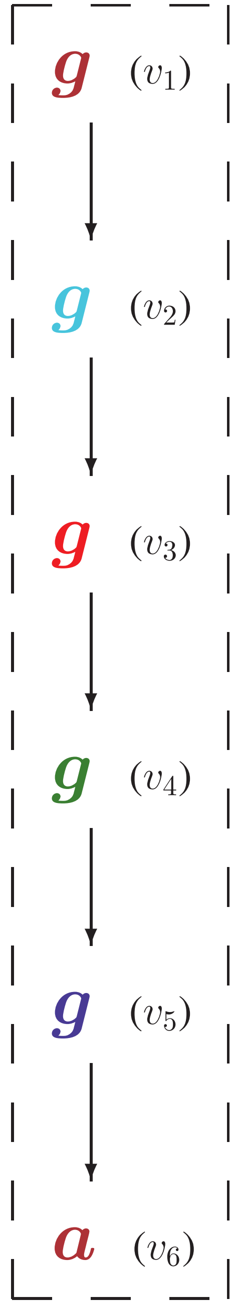
KONGRUENZABSCHLUSS: $g(g(g(a)))\doteq a,\quad g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$

- **Graph ist Termbaum von $g(g(g(g(g(a)))))$**
  - Initiale Relation: $R := \{\, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\} \,\}$
- **Hinzunahme von $g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$**
  - $R := \{\, \{v_1, v_6\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\} \,\}$ ist abgeschlossen



KONGRUENZABSCHLUSS: $g(g(g(a)))\doteq a, \quad g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$

- **Graph ist Termbaum von $g(g(g(g(g(a)))))$**
  - Initiale Relation: $R := \{\, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\} \,\}$
- **Hinzunahme von $g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$**
  - $R := \{\, \{v_1, v_6\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\} \,\}$ ist abgeschlossen
- **Hinzunahme von $g(g(g(a)))\doteq a$**



Kongruenzabschluss: $g(g(g(a)))\doteq a,\quad g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$

- **Graph ist Termbaum von $g(g(g(g(g(a)))))$**
  – Initiale Relation: $R := \{\,\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}\,\}$
- **Hinzunahme von $g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$**
  – $R := \{\,\{v_1, v_6\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}\,\}$ ist abgeschlossen
- **Hinzunahme von $g(g(g(a)))\doteq a$**

  MERGE(R,v_3,v_6):

  – $P_{v_3} := \{v_2\},\ \ P_{v_6} := \{v_5\},\ \ R := \{\,\{v_1, v_6, v_3\}, \{v_2\}, \{v_4\}, \{v_5\}\,\}$
  – Wegen $(v_3, v_6)\in R$ gilt $v_2 \sim_R v_5$ aber $[v_2]_R \neq [v_5]_R$

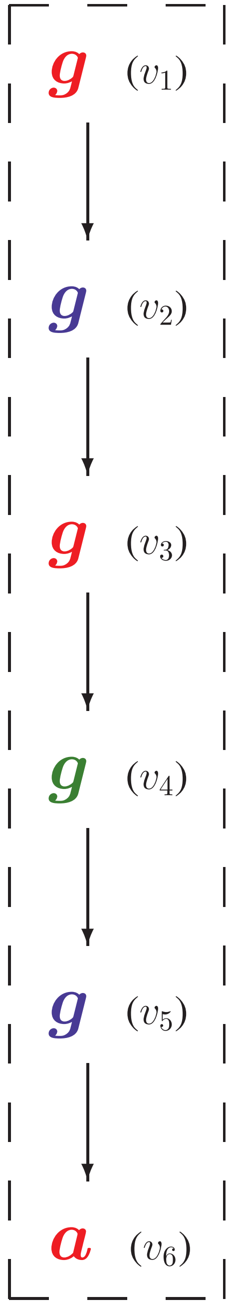
$$\begin{tikzcd}
g\ (v_1) \arrow[d] \\
g\ (v_2) \arrow[d] \\
g\ (v_3) \arrow[d] \\
g\ (v_4) \arrow[d] \\
g\ (v_5) \arrow[d] \\
a\ (v_6)
\end{tikzcd}$$

Kongruenzabschluss: $g(g(g(a)))\doteq a,\quad g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$

- **Graph ist Termbaum von $g(g(g(g(g(a)))))$**
  - Initiale Relation: $R := \{\ \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}\ \}$
- **Hinzunahme von $g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$**
  - $R := \{\ \{v_1, v_6\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}\ \}$ ist abgeschlossen
- **Hinzunahme von $g(g(g(a)))\doteq a$**

  MERGE(R,v_3,v_6):
  - $P_{v_3} := \{v_2\},\ \ P_{v_6} := \{v_5\},\ \ R := \{\ \{v_1, v_6, v_3\}, \{v_2\}, \{v_4\}, \{v_5\}\ \}$
  - Wegen $(v_3, v_6) \in R$ gilt $v_2 \sim_R v_5$ aber $[v_2]_R \neq [v_5]_R$

  MERGE(R,v_2,v_5):
  - $P_{v_2} := \{v_1\},\ \ P_{v_5} := \{v_4\},\ \ R := \{\ \{v_1, v_6, v_3\}, \{v_4\}, \{v_2, v_5\}\ \}$
  - Wegen $(v_2, v_5) \in R$ gilt $v_1 \sim_R v_4$ aber $[v_1]_R \neq [v_4]_R$



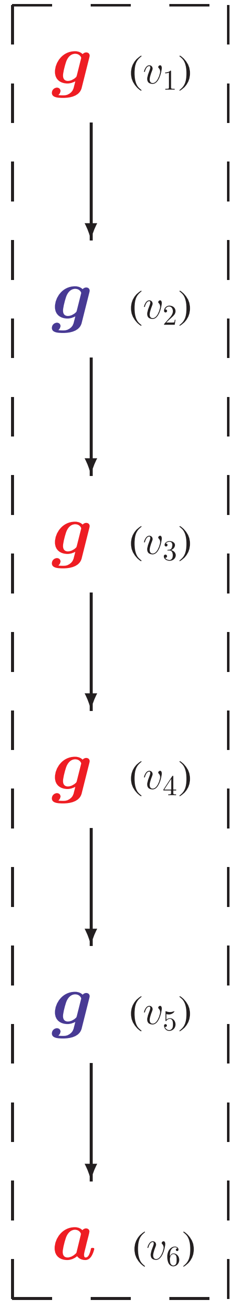
Kongruenzabschluss: $g(g(g(a))) \doteq a, \quad g(g(g(g(g(a))))) \doteq a$

- **Graph ist Termbaum von $g(g(g(g(g(a)))))$**
  - Initiale Relation: $R := \{\, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\} \,\}$
- **Hinzunahme von $g(g(g(g(g(a))))) \doteq a$**
  - $R := \{\, \{v_1, v_6\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\} \,\}$ ist abgeschlossen
- **Hinzunahme von $g(g(g(a))) \doteq a$**

  MERGE(R,v_3,v_6):
  - $P_{v_3} := \{v_2\}, \;\; P_{v_6} := \{v_5\}, \;\; R := \{\, \{v_1, v_6, v_3\}, \{v_2\}, \{v_4\}, \{v_5\} \,\}$
  - Wegen $(v_3, v_6) \in R$ gilt $v_2 \sim_R v_5$ aber $[v_2]_R \neq [v_5]_R$

  MERGE(R,v_2,v_5):
  - $P_{v_2} := \{v_1\}, \;\; P_{v_5} := \{v_4\}, \;\; R := \{\, \{v_1, v_6, v_3\}, \{v_4\}, \{v_2, v_5\} \,\}$
  - Wegen $(v_2, v_5) \in R$ gilt $v_1 \sim_R v_4$ aber $[v_1]_R \neq [v_4]_R$

  MERGE(R,v_1,v_4):
  - $P_{v_1} := \{v_2, v_5\}, \;\; P_{v_4} := \{v_3\}, \;\; R := \{\, \{v_1, v_6, v_3, v_4\}, \{v_2, v_5\} \,\}$
  - Wegen $(v_6, v_4) \in R$ gilt $v_5 \sim_R v_3$ aber $[v_5]_R \neq [v_3]_R$



Kongruenzabschluss: $g(g(g(a)))\doteq a, \quad g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$

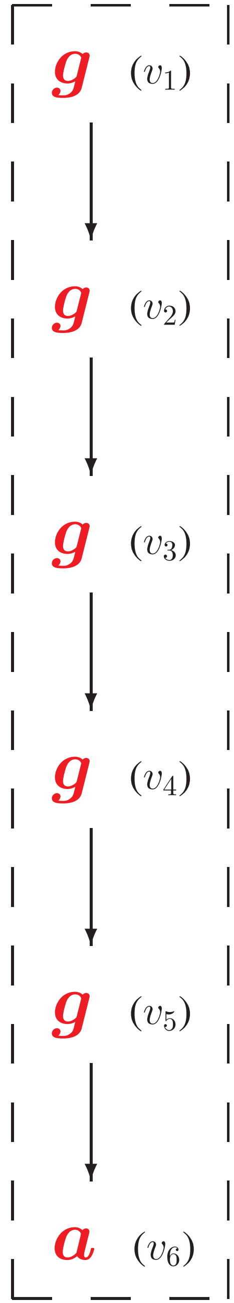
- **Graph ist Termbaum von $g(g(g(g(g(a)))))$**
  – Initiale Relation: $R := \{\, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\} \,\}$
- **Hinzunahme von $g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$**
  – $R := \{\, \{v_1, v_6\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\} \,\}$ ist abgeschlossen
- **Hinzunahme von $g(g(g(a)))\doteq a$**

  MERGE(R,v_3,v_6):
  – $P_{v_3} := \{v_2\},\ \ P_{v_6} := \{v_5\},\ \ R := \{\, \{v_1, v_6, v_3\}, \{v_2\}, \{v_4\}, \{v_5\} \,\}$
  – Wegen $(v_3, v_6) \in R$ gilt $v_2 \sim_R v_5$ aber $[v_2]_R \neq [v_5]_R$

  MERGE(R,v_2,v_5):
  – $P_{v_2} := \{v_1\},\ \ P_{v_5} := \{v_4\},\ \ R := \{\, \{v_1, v_6, v_3\}, \{v_4\}, \{v_2, v_5\} \,\}$
  – Wegen $(v_2, v_5) \in R$ gilt $v_1 \sim_R v_4$ aber $[v_1]_R \neq [v_4]_R$

  MERGE(R,v_1,v_4):
  – $P_{v_1} := \{v_2, v_5\},\ \ P_{v_4} := \{v_3\},\ \ R := \{\, \{v_1, v_6, v_3, v_4\}, \{v_2, v_5\} \,\}$
  – Wegen $(v_6, v_4) \in R$ gilt $v_5 \sim_R v_3$ aber $[v_5]_R \neq [v_3]_R$

  MERGE(R,v_5,v_3):
  – $P_{v_5} := \{v_1, v_4\},\ \ P_{v_3} := \{v_2, v_5, v_3\},\ \ R := \{\, \{v_1, v_6, v_3, v_4, v_2, v_5\} \,\}$



Kongruenzabschluss: $g(g(g(a)))\doteq a,\quad g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$

- **Graph ist Termbaum von $g(g(g(g(g(a)))))$**
  – Initiale Relation: $R := \{\,\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}\,\}$
- **Hinzunahme von $g(g(g(g(g(a)))))\doteq a$**
  – $R := \{\,\{v_1, v_6\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}\,\}$ ist abgeschlossen
- **Hinzunahme von $g(g(g(a)))\doteq a$**

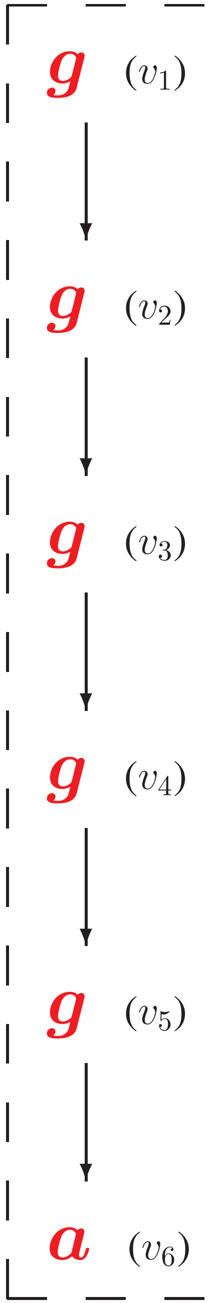
  MERGE(R,v_3,v_6):
  – $P_{v_3} := \{v_2\},\ P_{v_6} := \{v_5\},\ R := \{\,\{v_1, v_6, v_3\}, \{v_2\}, \{v_4\}, \{v_5\}\,\}$
  – Wegen $(v_3, v_6) \in R$ gilt $v_2 \sim_R v_5$ aber $[v_2]_R \neq [v_5]_R$

  MERGE(R,v_2,v_5):
  – $P_{v_2} := \{v_1\},\ P_{v_5} := \{v_4\},\ R := \{\,\{v_1, v_6, v_3\}, \{v_4\}, \{v_2, v_5\}\,\}$
  – Wegen $(v_2, v_5) \in R$ gilt $v_1 \sim_R v_4$ aber $[v_1]_R \neq [v_4]_R$

  MERGE(R,v_1,v_4):
  – $P_{v_1} := \{v_2, v_5\},\ P_{v_4} := \{v_3\},\ R := \{\,\{v_1, v_6, v_3, v_4\}, \{v_2, v_5\}\,\}$
  – Wegen $(v_6, v_4) \in R$ gilt $v_5 \sim_R v_3$ aber $[v_5]_R \neq [v_3]_R$

  MERGE(R,v_5,v_3):
  – $P_{v_5} := \{v_1, v_4\},\ P_{v_3} := \{v_2, v_5, v_3\},\ R := \{\,\{v_1, v_6, v_3, v_4, v_2, v_5\}\,\}$

  Alle Knoten sind äquivalent: R=R^*



Integration von Gleichheitsentscheidungen

- **Entscheidungsprozedur ist sehr effizient**
- **Kein Unifikationsverfahren**
  - Variablen werden nicht instantiiert
- **Direkt verwendbar für binäre Konnektionen**
  - Erweitert Unifikation um direkte Gleichheitsschlüsse
- **Unäre, ternäre etc. Schlüsse schwer zu integrieren**
  - Beweissuchverfahren müsste Multi-Konnektionen untersuchen anstelle der viel einfacheren Binärkonnektionen
  - Strategische Steuerung wird aufwendiger
    - Welche Literale sind relevant?
  - Analyse kann Suchverfahren massiv verlangsamen

Immer noch offenes Forschungsthema