Inferenzmethoden

Einheit 17

Termersetzungssysteme

1. Motivation und Grundbegriffe
2. Knuth-Bendix Vervollständigung
3. Narrowing
4. Unifikation durch Transformation

Termersetzung in der Deduktion

Effiziente Verarbeitung von Gleichheiten

- **Mechanismus zur Lösung des Wortproblems**
  - Wortproblem: Sind s und t gleich aufgrund der Axiome einer Theorie?
  - Methode: Vereinfachung der Ausdrücke bis textliche Identität erreicht
  - Hilfsmittel: Zielgerichtete Anwendung einer Menge von Gleichungen
- **Gleichheiten als Vereinfachung betrachtet**
  - Gleichheiten $a = b$ erhalten Richtung $a \rightarrow b$
  - Reduktion: Ersetzung von Teiltermen durch einfachere gleiche Terme
- **Eigenständiges Forschungsgebiet Rewriting**
  - Eigenschaften von Systemen syntaktischer Transformationsregeln
  - Verwendet eigene, z.T. abweichende Notationen
- **Vielfältige Anwendungen**
  - Integration in Theorembeweiser durch erweiterte Unifikationsalgorithmen
  - Mögliche Methode zur Implementierung von Theoriekonnektionen
  - Schlüssel für Unifikationstheorie, Logiksysteme, Berechnungsmodelle

Termersetzung am Beispiel der Gruppentheorie

- **Basisaxiome einer Gruppe mit Verknüpfung $\cdot$**

$e \cdot x \doteq x$	*linksseitiges Einselement*
$x \cdot e \doteq x$	*rechtsseitiges Einselement*
$\overline{y} \cdot y \doteq e$	*Linksinverses*
$(u \cdot v) \cdot w \doteq u \cdot (v \cdot w)$	*Assoziativität*

- **Als Reduktionsregeln**

$\mathbf{r_1}$	$e \cdot x \rightarrow x$
$\mathbf{r_2}$	$x \cdot e \rightarrow x$
$\mathbf{r_3}$	$\overline{y} \cdot y \rightarrow e$
$\mathbf{r_4}$	$(u \cdot v) \cdot w \rightarrow u \cdot (v \cdot w)$

- **Anwendung von Regeln zur Beweisführung**

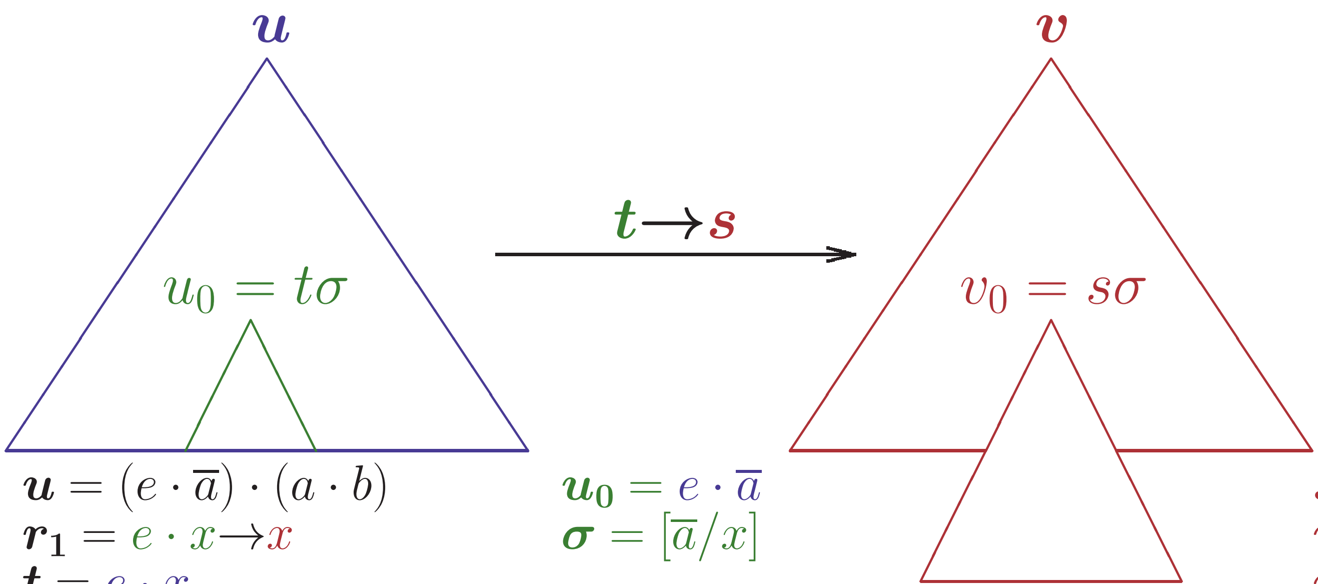
$$(\overline{a} \cdot a) \cdot b \doteq (e \cdot \overline{a}) \cdot (a \cdot b)$$

$$\xrightarrow{r_1} (\overline{a} \cdot a) \cdot b \doteq \overline{a} \cdot (a \cdot b)$$

$$\xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b) \doteq \overline{a} \cdot (a \cdot b)$$

REWRITING: GRUNDBEGRIFFE

- **Termersetzungssystem $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  - $\mathcal{A}$ Alphabet, $\mathcal{R}$ Menge von Reduktionsregeln über $\mathcal{A}^*$
- **Reduktionsregel $t \rightarrow s$** (t, s Terme über $\mathcal{A}$)
  - t (Redex) keine Variable
  - Alle Variablen von s (Kontraktum) kommen in t vor
- **$u \xrightarrow{r} v$: Regelanwendung von $r = t \rightarrow s$ auf u**
  - Teiltermmatching: Bestimme Substitution σ, so daß $t\sigma$ Teilterm von u
  - Ersetzung: Ersetze $t\sigma$ durch $s\sigma$



$\boldsymbol{u} = (e \cdot \overline{a}) \cdot (a \cdot b)$
$\boldsymbol{r_1} = e \cdot x \rightarrow x$
$\boldsymbol{t} = e \cdot x$

$\boldsymbol{u_0} = e \cdot \overline{a}$
$\boldsymbol{\sigma} = [\overline{a}/x]$

$\boldsymbol{s} = x$
$\boldsymbol{v_0} = \overline{a}$
$\boldsymbol{v} = \overline{a} \cdot (a \cdot b)$

Rewriting: Grundbegriffe II

- **$u \xrightarrow{*} w$: Iterierte Anwendung von Regeln**
  - $u \xrightarrow{*} u$ (ohne Anwendung von Regeln)
  - $u \xrightarrow{*} w$, falls es ein $v \in \mathcal{A}^*$ gibt mit $u \xrightarrow{r} v$ und $v \xrightarrow{*} w$
- **Normalform: nichtreduzierbarer Term**
  - Term v, der nicht durch Regelanwendungen “reduziert” werden kann
  - **Wert von u**: Normalform v mit $u \xrightarrow{*} v$
- **Wichtige Anforderungen an Termersetzungssysteme**
  - Ist die Normalform eines Terms eindeutig? $\mapsto$ Konfluenz
  - Hat jeder Term eine Normalform? $\mapsto$ Normalisierbarkeit
  - Wenn ja, führt jede Anwendung von Regeln dorthin? $\mapsto$ Starke Normalisierbarkeit

Konfluenz

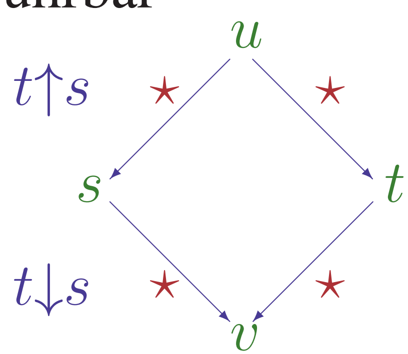
Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$(\overline{a} \cdot a) \cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \;\overset{r_3}{\to}\; e \cdot b \;\overset{r_1}{\to}\; b$
  - $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \;\overset{r_4}{\to}\; \overline{a} \cdot (a \cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

- **Konfluenz von $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  - Ketten von Regelanwendungen sind immer zusammenführbar

    Aus $\boldsymbol{t{\uparrow}s}$ ($u \xrightarrow{*} t$ und $u \xrightarrow{*} s$ für ein u)

    folgt $\boldsymbol{t{\downarrow}s}$ ($t \xrightarrow{*} v$ und $s \xrightarrow{*} v$ für ein v)



  - Regeln entsprechen “echten” Gleichungen

    Gleiche Beweiskraft wie Anwendung der Gleichheiten

Das einfache Regelsystem für die Gruppentheorie ist nicht konfluent

Normalisierbarkeit

Hat jeder Term eine Normalform?

- **Regeln für Gruppentheorie sind unvollständig**
  - Gleichung der Assoziativität gilt in zwei Richtungen
  - Naive Lösung: Zusatzregel für Rückwärtsanwendung der Assoziativität

$\mathbf{r}_1$	$e \cdot x \rightarrow x$
$\mathbf{r}_2$	$x \cdot e \rightarrow x$
$\mathbf{r}_3$	$\overline{y} \cdot y \rightarrow e$
$\mathbf{r}_4$	$(u \cdot v) \cdot w \rightarrow u \cdot (v \cdot w)$
$\mathbf{r}_5$	$u \cdot (v \cdot w) \rightarrow (u \cdot v) \cdot w$

  - Reduktionskette $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b) \xrightarrow{r_5} (\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} ..$ terminiert nicht
  - Normalform existiert dennoch: $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} \boldsymbol{b}$
- **Schwache Normalisierbarkeit**
  - Jeder Term besitzt eine Normalform
  - Der λ-Kalkül ist nicht schwach normalisierbar (z.B. $(\lambda x.x\, x)(\lambda x.x\, x)$)
- **Starke Normalisierbarkeit ($(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ noethersch)**
  - Jede Kette von Regelanwendungen terminiert

Nachweis starker Normalisierbarkeit

Das System $r_1..r_4$ ist stark normalisierbar

- **Definiere wohlfundierte $\succ$ Ordnung auf $\mathcal{A}^*$**
  - z.B. lexikographische Ordnung: Länge und Ordnung im Alphabet
  - Sinnvolle Ordnung auf $\mathcal{A}$ ist z.B. $(\succ) \succ \cdot \succ z \succ \ldots \succ a$
- **Zeige, daß jede Regel $t \longrightarrow s$ die Ordnung respektiert**
  - $r_1 :\ e \cdot x \succ x$
  - $r_2 :\ x \cdot e \succ x$
  - $r_3 :\ \overline{y} \cdot y \succ e$
  - $r_4 :\ (u \cdot v) \cdot w \succ u \cdot (v \cdot w)$
- **Konsequenz: Jede Reduktionsfolge terminiert**
  - Jede Reduktionsfolge liefert eine bzgl. $\succ$ absteigende Kette von Termen
  - Wohlfundiertheit von $\succ$: es gibt keine unendlichen absteigenden Ketten

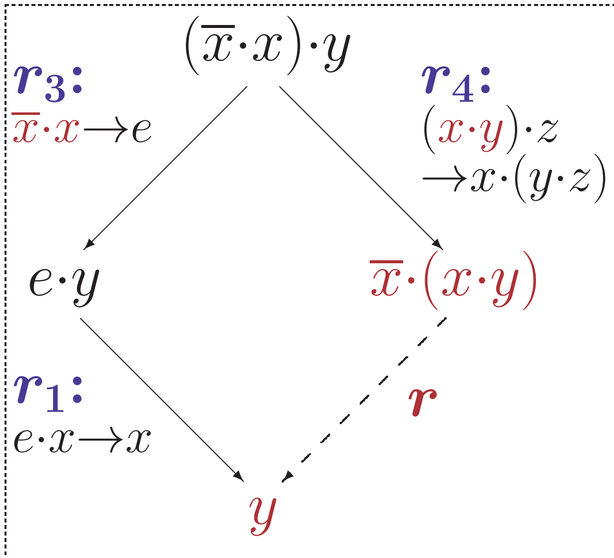
Steuerung von Termersetzungssystemen

- **Vermeide nicht normalisierbare Regelsysteme**
  - Terme ohne Normalform sind für automatisches Schließen ungeeignet
  - λ-Kalkül ist Logik höherer Stufe und hochgradig unentscheidbar
- **Heuristische Steuerung bei schwacher Normalisierbarkeit**
  - Strategische Steuerung vermeidet nichtterminierende Reduktionsketten
- **Konfluenz ist sehr wichtig**
  - Andernfalls wird Backtracking über Reduktionen erforderlich
    um Gleichheit von Termen nachzuweisen
- **Optimal: vollständige Termersetzungssysteme**
  - $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ noethersch und konfluent

  Der Einsatz vollständiger Termersetzungssysteme führt immer zum Ziel!

ERZEUGUNG VOLLSTÄNDIGER REGELSYSTEME

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t{\rightarrow}s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln r_i, r_j**
  – Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln
  – Bilde kritischen Term t aus instantiierten Teiltermen
  – Bilde Termpaar s, s' mit $t \xrightarrow{r} s$ und $t \xrightarrow{r'} s'$:
  – Normalisiere s, s' zu kritischem Termpaar u, v
  – Falls $u{\neq}v$ bilde neue Regel $u{\rightarrow}v$ ($v{\rightarrow}u$, falls $v \succ u$)



Vervollständigung durch Superposition

- **Ausgangspunkt: noethersches Regelsystem**
  - i.a. einfache Umwandlung eines Gleichungssystems
- **Ziel: vollständiges Regelsystem**
- **Methode: schrittweise Superposition aller Regeln**
  - unter Verwendung einer wohlfundierten Termordnung $\succ$
- **Abbruchkriterium: lokale Konfluenz**
  - Je zwei Regelanwendungen sind zusammenführbar

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "r'"] & \\ s \arrow[dr, "\star"'] & & t \arrow[dl, "\star"] \\ & v & \end{tikzcd}$$

- **Korrektheit:**
  - Starke Normalisierbarkeit: neue Regeln erhalten die Termordnung $\succ$
  - Konfluenz folgt aus lokaler Konfluenz und starker Normalisierbarkeit

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ **stark normalisierbar, lokal konfluent** $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ **konfluent**

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl

- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  $n{=}0$: Es folgt $v{=}t{=}s$, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

  $n{+}1$: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann $v{=}t$ oder $v{=}s$

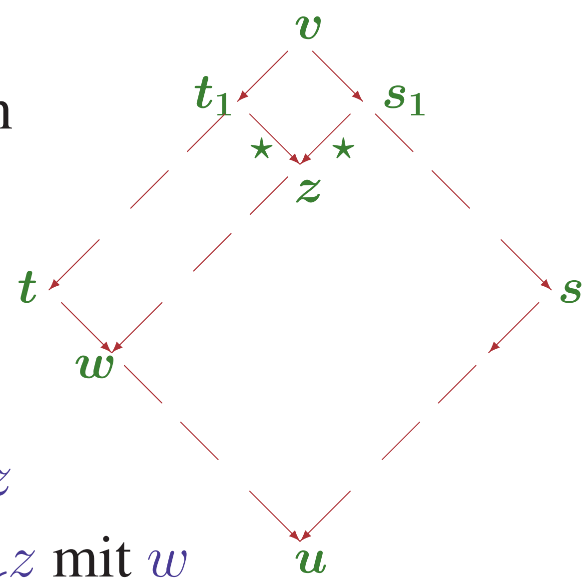
  Ansonsten $v \xrightarrow{r} t_1 \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{r} s_1 \xrightarrow{*} s$

  Lokale Konfluenz: $t_1{\downarrow}s_1$ mit einem Term z

  Induktionsannahme für t_1: $t_1 \xrightarrow{*} t$, $t_1 \xrightarrow{*} z$ also $t{\downarrow}z$ mit w

  Induktionsannahme für s_1: $s_1 \xrightarrow{*} z \xrightarrow{*} w$, $s_1 \xrightarrow{*} s$ also $w{\downarrow}s$ mit u

  Insgesamt $t \xrightarrow{*} w \xrightarrow{*} u$ und $s \xrightarrow{*} u$, also $t{\downarrow}s$



Knuth–Bendix Verfahren

Eingabe: Endliche Menge $\mathcal{G}$ von Axiomgleichungen, Termordnung $\succ$.
Ausgabe: Bei Terminierung vollständiges Termersetzungssystem
oder Fehlermeldung

Initialisiere Regelmenge $\mathcal{R} := \emptyset$
Solange $\mathcal{G}$ nicht leer
Wähle Gleichung aus $\mathcal{G}$ und reduziere sie mit Regeln aus $\mathcal{R}$
Falls reduzierte Gleichung nicht von der Form $x \doteq x$
Dann Falls reduzierte Gleichung läßt sich nicht mit $\succ$ zu neuer Regel richten
Dann Abbruch *'Termordnung nicht ausreichend'*
Sonst Bilde neue Regel und füge sie zu $\mathcal{R}$ hinzu;
Reduziere alle Regeln aus $\mathcal{R}$ untereinander;
Falls eine der reduzierten Regeln die Termordnung $\succ$ verletzt
Dann entferne sie aus $\mathcal{R}$ und
nehme sie in $\mathcal{G}$ auf, sofern sie nicht von der Gestalt $x \doteq x$ ist;
Bilde alle kritischen Paare zwischen der neuen Regel
und den übrigen Regeln und füge sie als Gleichungen zu $\mathcal{G}$ hinzu
Ergebnis $\mathcal{R}$

Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$\mathbf{r_1}$	$e{\cdot}x \rightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x{\cdot}e \rightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}{\cdot}x \rightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x{\cdot}y){\cdot}z \rightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \rightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}{\cdot}(x{\cdot}y) \rightarrow y$	Superposition von r_3 und r_4
$\mathbf{r_7}$	$\overline{\overline{x}} \rightarrow x$	Superposition von r_3 und r_6
$\mathbf{r_8}$	$x{\cdot}\overline{x} \rightarrow e$	Superposition von r_3 und r_7
$\mathbf{r_9}$	$x{\cdot}(\overline{x}{\cdot}y) \rightarrow y$	Superposition von r_6 und r_7
$\mathbf{r_{10}}$	$\overline{(x{\cdot}y)} \rightarrow \overline{y}{\cdot}\overline{x}$	Superposition von r_4, r_6, r_8, r_9 (aufwendig)

Theorieunifikation mit Termersetzung

- **Komplementarität von Theoriekonnektionen**

$$\left[\quad R(c,b)^T \qquad R(z\cdot(\overline{c}\cdot c),\, z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F \quad\right] \quad \sigma{=}[c/z]$$

Group

  – Konnektion benutzt Theorieunifikation für Gruppentheorie

- **Unifikation von $R(z\cdot(\overline{c}\cdot c),\, z\cdot(\overline{z}\cdot b))^F$ und $R(c,b)^T$**

$$\begin{aligned}
& R(z\cdot(\overline{c}\cdot c),\, z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b) \\
\xrightarrow{r_3}\ & R(z\cdot e,\, z\cdot(\overline{z}\cdot b)) = R(c,b) \\
\xrightarrow{r_9}\ & R(z\cdot e,\, b) = R(c,b) \\
\xrightarrow{r_2}\ & R(z,b) = R(c,b) \\
\xrightarrow{unif}\ & R(c,b) = R(c,b) \qquad \sigma{=}[c/z]
\end{aligned}$$

- **Integriere Unifikation und Termersetzung**

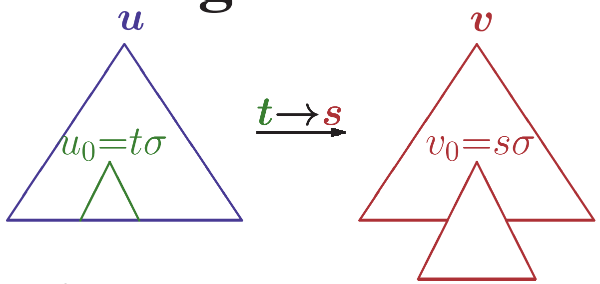
  – Bestimme Substitution während der Ersetzung

Verallgemeinerte Anwendung von Rewrite-Regeln

- **Rewriting einer Gleichung $u{=}w$ mit der Regel $t{\to}s$:**

  $u{=}w \;\;\to\;\; v{=}w$

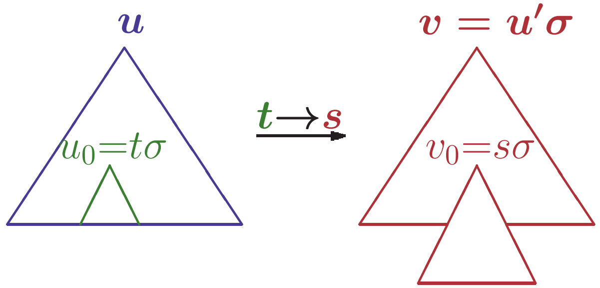
  v entsteht aus u durch Ersetzung eines Teilterms $t\sigma$ durch $s\sigma$



- **Einfaches Verengen mit der Regel $t{\to}s$:**

  $\{u{=}w\}{\cup}E \;\;\to\;\; \{v{=}w\}{\cup}E$

  v entsteht aus u durch Ersetzung eines Teilterms $t\sigma$ durch $s\sigma$ und anschließender Anwendung von σ auf den ganzen Term



- **Lässiges Verengen mit der Regel $f\,t_1 \ldots t_n \to s$:**

  $\{u{=}w\}{\cup}E \;\;\to\;\; \{v{=}w,\; t_1{=}u_1, \ldots, y_n{=}u_n\}{\cup}E$

  v entsteht aus u durch Ersetzung des Auftretens von $f u_1 \ldots u_n$ durch s.

  Bestimmung der Substitution wird in Gleichungssystem verschoben

Verengen + Martelli–Montanari–Regeln liefern vollständiges (Unifikations-) Verfahren für Lösung einer Menge von Gleichungen unter einer Theorie

Termersetzungssystem für einfache Arithmetik

Arithmetische Regeln für Lässiges Verengen

$\boldsymbol{r}_1$	$\{u[v(t)]{=}w\}\cup E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[x]{=}w,\ n(x){=}t\}\cup E,\ \sigma$
$\boldsymbol{r}_2$	$\{u[t_1{+}t_2]{=}w\}\cup E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[x]{=}w,\ 0{=}t_1,\ x{=}t_2\}\cup E,\ \sigma$
$\boldsymbol{r}_3$	$\{u[t_1{+}t_2]{=}w\}\cup E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[x]{=}w,\ x{=}t_1,\ 0{=}t_2\}\cup E,\ \sigma$
$\boldsymbol{r}_4$	$\{u[t_1{+}t_2]{=}w\}\cup E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[n(x{+}y)]{=}w,\ n(x){=}t_1,\ y{=}t_2\}\cup E,\ \sigma$
$\boldsymbol{r}_5$	$\{u[t_1{+}t_2]{=}w\}\cup E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[n(x{+}y)]{=}w,\ x{=}t_1,\ n(y){=}t_2\}\cup E,\ \sigma$
$\boldsymbol{r}_6$	$\{u[t_1{+}t_2]{=}w\}\cup E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[v(x{+}y)]{=}w,\ x{=}t_1,\ v(y){=}t_2\}\cup E,\ \sigma$

Martelli–Montanari–Regeln für Unifikation

TD	$\{f(s_1,..,s_n){=}f(t_1,..,t_n)\}\cup E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{s_1{=}t_1,..,s_n{=}t_n\}\cup E,\ \sigma$	
ET	$\{x{=}x\}\cup E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$E,\ \sigma$	
VE	$\{x{=}t\}\cup E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$E[t/x],\ \sigma[t/x]$	$(x \notin t)$
VE_u	$\{t{=}x\}\cup E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$E[t/x],\ \sigma[t/x]$	$(x \notin t,\ t \notin \mathcal{V})$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	σ (nur relevantes)	angewandte Regeln
$\{(x+x)+v(0) = n(0)\}$	$[\,]$	r_6: $x+v(y)\mapsto v(x+y)$
$\{v(x_1+y_1) = n(0),\ x_1 = x+x,\ v(y_1) = v(0)\}$	$[\,]$	TD
$\{v(x_1+y_1) = n(0),\ x_1 = x+x,\ y_1 = 0\}$	$[\,]$	VE
$\{v(x_1+0) = n(0),\ x_1 = x+x\}$	$[0/y_1]$	VE
$\{v((x+x)+0) = n(0)\}$	$[x+x/x_1]$	r_1: $v(n(x))\mapsto x$
$\{x_2 = n(0),\ n(x_2) = (x+x)+0\}$	$[\,]$	VE
$\{n(n(0)) = (x+x)+0\}$	$[n(0)/x_2]$	r_3: $x+0\mapsto x$
$\{n(n(0)) = x_3,\ x_3 = x+x,\ 0 = 0\}$	$[\,]$	TD
$\{n(n(0)) = x_3,\ x_3 = x+x\}$	$[\,]$	VE
$\{n(n(0)) = x+x\}$	$[x+x/x_3]$	r_4: $n(x)+y\mapsto n(x+y)$
$\{n(n(0)) = n(x_4+y_4),\ x = n(x_4),\ x = y_4\}$	$[\,]$	TD
$\{n(0) = x_4+y_4,\ n(x_4) = x,\ y_4 = x\}$	$[\,]$	VE
$\{n(0) = x_4+x,\ n(x_4) = x\}$	$[x/y_4]$	VE
$\{n(0) = x_4+n(x_4)\}$	$[n(x_4)/x]$	r_5: $x+n(y)\mapsto n(x+y)$
$\{n(0) = n(x_5+y_5),\ x_5 = x_4,\ n(y_5) = n(x_4)\}$	$[n(x_4)/x]$	TD
$\{0 = x_5+y_5,\ x_5 = x_4,\ n(y_5) = n(x_4)\}$	$[n(x_4)/x]$	VE
$\{0 = x_4+y_5,\ n(y_5) = n(x_4)\}$	$[n(x_4)/x,\ x_4/x_5]$	TD
$\{0 = x_4+y_5,\ y_5 = x_4\}$	$[n(x_4)/x]$	VE
$\{0 = x_4+x_4\}$	$[n(x_4)/x,\ x_4/y_5]$	r_2: $0+x\mapsto x$
$\{0 = x_6,\ 0 = x_4,\ x_6 = x_4\}$	$[n(x_4)/x]$	VE_u
$\{0 = x_4\}$	$[n(x_4)/x,\ 0/x_6]$	VE_u
$\{\}$	$[n(0)/x,\ 0/x_4]$	

$\boxed{\text{Ergebnis: } \boldsymbol{\sigma(x) = n(0)}}$

Anwendung von Termersetzung in der Deduktion

- **Unifikationsalgorithmus für Theoriekonnektionen**
  - Nur bei vollständigen Regelsystemen möglich

    z.B. Einfache Arithmetik, Gruppentheorie, Gleichheitstheorien
  - Nicht jede Theorie kann als vollstandiges Regelsystem formuliert werden
  - Heuristische Steuerung für unvollständige Systeme praktisch erfolgreich
- **Deduktion als Termersetzungssystem formulierbar**
  - In beschränkten Bereichen sinnvoll einsetzbar
  - Niedriges Niveau, kein Ersatz für verdichtete logische Verfahren

Effiziente Einbettung in Konnektionsmethode noch offen