Inferenzmethoden

Einheit 17

Termersetzungssysteme

1. Motivation und Grundbegriffe
2. Knuth-Bendix Vervollständigung
3. Narrowing
4. Unifikation durch Transformation

TERMERSETZUNG IN DER DEDUKTION

Effiziente Verarbeitung von Gleichheiten

- **Mechanismus zur Lösung des Wortproblems**
  - Wortproblem: Sind s und t gleich aufgrund der Axiome einer Theorie?
  - Methode: Vereinfachung der Ausdrücke bis textliche Identität erreicht
  - Hilfsmittel: Zielgerichtete Anwendung einer Menge von Gleichungen
- **Gleichheiten als Vereinfachung betrachtet**
  - Gleichheiten $a = b$ erhalten Richtung $a{\rightarrow}b$
  - Reduktion: Ersetzung von Teiltermen durch einfachere gleiche Terme
- **Eigenständiges Forschungsgebiet Rewriting**
  - Eigenschaften von Systemen syntaktischer Transformationsregeln
  - Verwendet eigene, z.T. abweichende Notationen
- **Vielfältige Anwendungen**
  - Integration in Theorembeweiser durch erweiterte Unifikationsalgorithmen
  - Mögliche Methode zur Implementierung von Theoriekonnektionen
  - Schlüssel für Unifikationstheorie, Logiksysteme, Berechnungsmodelle

Termersetzung am Beispiel der Gruppentheorie

- **Basisaxiome einer Gruppe mit Verknüpfung $\cdot$**

$$e \cdot x \doteq x \qquad \textit{linksseitiges Einselement}$$

$$x \cdot e \doteq x \qquad \textit{rechtsseitiges Einselement}$$

$$\overline{y} \cdot y \doteq e \qquad \textit{Linksinverses}$$

$$(u \cdot v) \cdot w \doteq u \cdot (v \cdot w) \qquad \textit{Assoziativität}$$

Termersetzung am Beispiel der Gruppentheorie

- **Basisaxiome einer Gruppe mit Verknüpfung ·**

$e \cdot x \doteq x$	*linksseitiges Einselement*
$x \cdot e \doteq x$	*rechtsseitiges Einselement*
$\overline{y} \cdot y \doteq e$	*Linksinverses*
$(u \cdot v) \cdot w \doteq u \cdot (v \cdot w)$	*Assoziativität*

- **Als Reduktionsregeln**

$\mathbf{r}_1$	$e \cdot x \rightarrow x$
$\mathbf{r}_2$	$x \cdot e \rightarrow x$
$\mathbf{r}_3$	$\overline{y} \cdot y \rightarrow e$
$\mathbf{r}_4$	$(u \cdot v) \cdot w \rightarrow u \cdot (v \cdot w)$

Termersetzung am Beispiel der Gruppentheorie

- **Basisaxiome einer Gruppe mit Verknüpfung $\cdot$**

$$e \cdot x \doteq x \qquad \textit{linksseitiges Einselement}$$

$$x \cdot e \doteq x \qquad \textit{rechtsseitiges Einselement}$$

$$\overline{y} \cdot y \doteq e \qquad \textit{Linksinverses}$$

$$(u \cdot v) \cdot w \doteq u \cdot (v \cdot w) \qquad \textit{Assoziativität}$$

- **Als Reduktionsregeln**

$$\mathbf{r_1} \qquad e \cdot x \to x$$

$$\mathbf{r_2} \qquad x \cdot e \to x$$

$$\mathbf{r_3} \qquad \overline{y} \cdot y \to e$$

$$\mathbf{r_4} \qquad (u \cdot v) \cdot w \to u \cdot (v \cdot w)$$

- **Anwendung von Regeln zur Beweisführung**

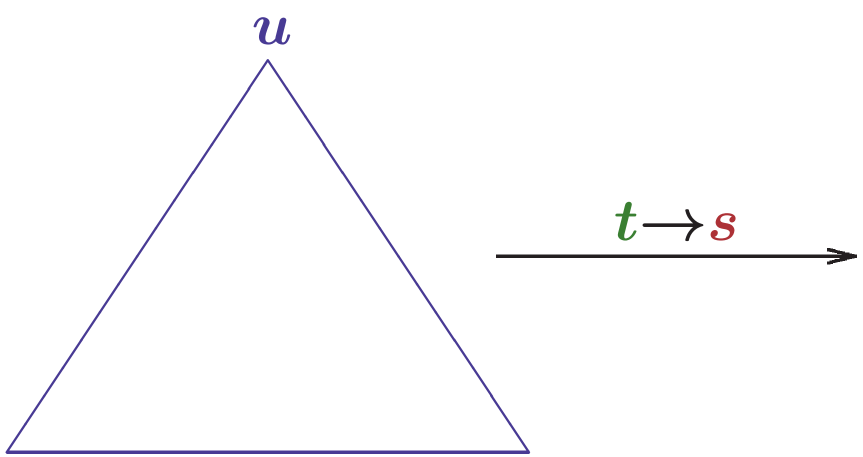
$$(\overline{a} \cdot a) \cdot b \doteq (e \cdot \overline{a}) \cdot (a \cdot b)$$

$$\xrightarrow{r_1} (\overline{a} \cdot a) \cdot b \doteq \overline{a} \cdot (a \cdot b)$$

$$\xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b) \doteq \overline{a} \cdot (a \cdot b)$$

Rewriting: Grundbegriffe

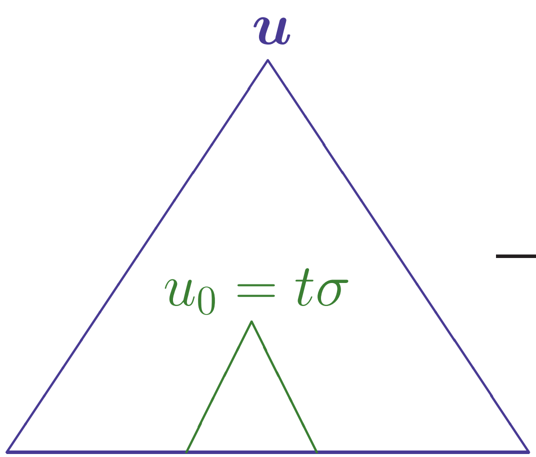
- **Termersetzungssystem $(\mathcal{A},\mathcal{R})$**
  – $\mathcal{A}$ Alphabet, $\mathcal{R}$ Menge von Reduktionsregeln über $\mathcal{A}^*$
- **Reduktionsregel $t{\rightarrow}s$** $\qquad$ (t, s Terme über $\mathcal{A}$)
  – t (Redex) keine Variable
  – Alle Variablen von s (Kontraktum) kommen in t vor
- **$u \xrightarrow{r} v$: Regelanwendung von $r = t{\rightarrow}s$ auf u**



$\boldsymbol{u} = (e\cdot\overline{a})\cdot(a\cdot b)$
$\boldsymbol{r_1} = e\cdot x{\rightarrow}x$
$\boldsymbol{t} = e\cdot x$

Rewriting: Grundbegriffe

- **Termersetzungssystem $(\mathcal{A},\mathcal{R})$**
  – $\mathcal{A}$ Alphabet, $\mathcal{R}$ Menge von Reduktionsregeln über $\mathcal{A}^*$
- **Reduktionsregel $t \rightarrow s$** (t,s Terme über $\mathcal{A}$)
  – t (Redex) keine Variable
  – Alle Variablen von s (Kontraktum) kommen in t vor
- **$u \xrightarrow{r} v$: Regelanwendung von $r = t \rightarrow s$ auf u**
  – Teiltermmatching: Bestimme Substitution σ, so daß $t\sigma$ Teilterm von u



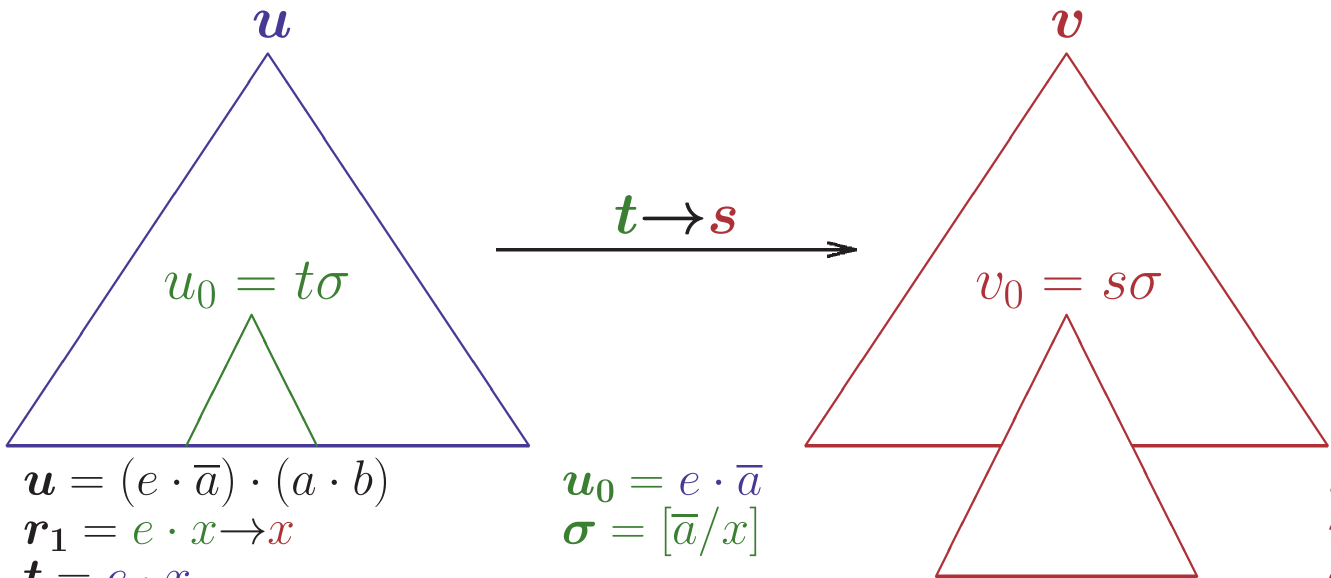
$$\xrightarrow{\quad t\rightarrow s \quad}$$

$\boldsymbol{u} = (e \cdot \overline{a}) \cdot (a \cdot b)$
$\boldsymbol{r_1} = e \cdot x \rightarrow x$
$\boldsymbol{t} = e \cdot x$

$\boldsymbol{u_0} = e \cdot \overline{a}$
$\boldsymbol{\sigma} = [\overline{a}/x]$

Rewriting: Grundbegriffe

- **Termersetzungssystem $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  - $\mathcal{A}$ Alphabet, $\mathcal{R}$ Menge von Reduktionsregeln über $\mathcal{A}^*$
- **Reduktionsregel $t \longrightarrow s$** (t, s Terme über $\mathcal{A}$)
  - t (Redex) keine Variable
  - Alle Variablen von s (Kontraktum) kommen in t vor
- **$u \xrightarrow{r} v$: Regelanwendung von $r = t \longrightarrow s$ auf u**
  - Teiltermmatching: Bestimme Substitution σ, so daß $t\sigma$ Teilterm von u
  - Ersetzung: Ersetze $t\sigma$ durch $s\sigma$



$\boldsymbol{u} = (e \cdot \overline{a}) \cdot (a \cdot b)$
$\boldsymbol{r_1} = e \cdot x \longrightarrow x$
$\boldsymbol{t} = e \cdot x$

$\boldsymbol{u_0} = e \cdot \overline{a}$
$\boldsymbol{\sigma} = [\overline{a}/x]$

$\boldsymbol{s} = x$
$\boldsymbol{v_0} = \overline{a}$
$\boldsymbol{v} = \overline{a} \cdot (a \cdot b)$

Rewriting: Grundbegriffe II

- **$u \xrightarrow{*} w$: Iterierte Anwendung von Regeln**
  - $u \xrightarrow{*} u$ (ohne Anwendung von Regeln)
  - $u \xrightarrow{*} w$, falls es ein $v \in \mathcal{A}^*$ gibt mit $u \xrightarrow{r} v$ und $v \xrightarrow{*} w$
- **Normalform: nichtreduzierbarer Term**
  - Term v, der nicht durch Regelanwendungen "reduziert" werden kann
  - **Wert von u**: Normalform v mit $u \xrightarrow{*} v$
- **Wichtige Anforderungen an Termersetzungssysteme**
  - Ist die Normalform eines Terms eindeutig? $\mapsto$ Konfluenz
  - Hat jeder Term eine Normalform? $\mapsto$ Normalisierbarkeit
  - Wenn ja, führt jede Anwendung von Regeln dorthin? $\mapsto$ Starke Normalisierbarkeit

Konfluenz

Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$(\overline{a} \cdot a) \cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  - $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

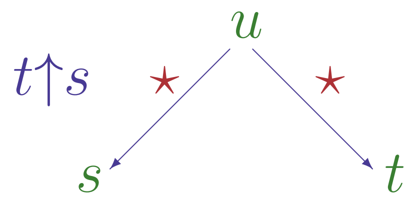
Konfluenz

Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$(\overline{a} \cdot a) \cdot b$ hat zwei Normalformen**
  – $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  – $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b)$
  – Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

- **Konfluenz von $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  – Ketten von Regelanwendungen sind immer zusammenführbar

  Aus $\boldsymbol{t{\uparrow}s}$ ($u \xrightarrow{*} t$ und $u \xrightarrow{*} s$ für ein u)



Konfluenz

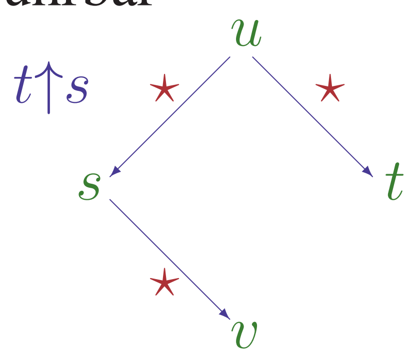
Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$(\overline{a} \cdot a) \cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  - $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

- **Konfluenz von $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  - Ketten von Regelanwendungen sind immer zusammenführbar

    Aus $t{\uparrow}s$ ($u \xrightarrow{*} t$ und $u \xrightarrow{*} s$ für ein u)

    folgt $t{\downarrow}s$ ($t \xrightarrow{*} v$ und $s \xrightarrow{*} v$ für ein v)



Konfluenz

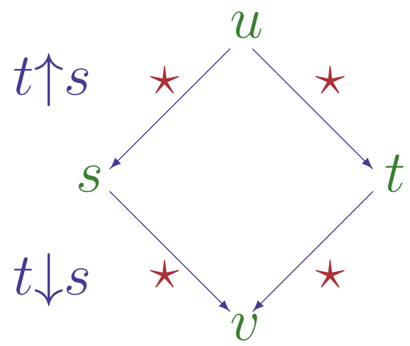
Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$(\overline{a} \cdot a) \cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  - $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

- **Konfluenz von $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  - Ketten von Regelanwendungen sind immer zusammenführbar

    Aus $\boldsymbol{t{\uparrow}s}$ $(u \xrightarrow{*} t$ und $u \xrightarrow{*} s$ für ein $u)$

    folgt $\boldsymbol{t{\downarrow}s}$ $(t \xrightarrow{*} v$ und $s \xrightarrow{*} v$ für ein $v)$



Konfluenz

Ist die Normalform eines Terms eindeutig?

- **$(\overline{a} \cdot a) \cdot b$ hat zwei Normalformen**
  - $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} b$
  - $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b)$
  - Die Normalformen sind nicht weiter reduzierbar, aber verschieden

- **Konfluenz von $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$**
  - Ketten von Regelanwendungen sind immer zusammenführbar

    Aus $\boldsymbol{t{\uparrow}s}$ ($u \xrightarrow{*} t$ und $u \xrightarrow{*} s$ für ein u)

    folgt $\boldsymbol{t{\downarrow}s}$ ($t \xrightarrow{*} v$ und $s \xrightarrow{*} v$ für ein v)

$$
\begin{tikzcd}
 & u \arrow[dl, "\star"'] \arrow[dr, "\star"] & \\
s \arrow[dr, "\star"'] & & t \arrow[dl, "\star"] \\
 & v &
\end{tikzcd}
$$

$t{\uparrow}s$

$t{\downarrow}s$

  - Regeln entsprechen “echten” Gleichungen

    Gleiche Beweiskraft wie Anwendung der Gleichheiten

Das einfache Regelsystem für die Gruppentheorie ist nicht konfluent

Hat jeder Term eine Normalform?

- **Regeln für Gruppentheorie sind unvollständig**
  - Gleichung der Assoziativität gilt in zwei Richtungen
  - Naive Lösung: Zusatzregel für Rückwärtsanwendung der Assoziativität

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{r_1} & e \cdot x \rightarrow x \\
\mathbf{r_2} & x \cdot e \rightarrow x \\
\mathbf{r_3} & \overline{y} \cdot y \rightarrow e \\
\mathbf{r_4} & (u \cdot v) \cdot w \rightarrow u \cdot (v \cdot w) \\
\mathbf{r_5} & u \cdot (v \cdot w) \rightarrow (u \cdot v) \cdot w
\end{array}
$$

Hat jeder Term eine Normalform?

- **Regeln für Gruppentheorie sind unvollständig**
  – Gleichung der Assoziativität gilt in zwei Richtungen
  – Naive Lösung: Zusatzregel für Rückwärtsanwendung der Assoziativität

$$\begin{array}{ll} \mathbf{r_1} & e \cdot x \to x \\ \mathbf{r_2} & x \cdot e \to x \\ \mathbf{r_3} & \overline{y} \cdot y \to e \\ \mathbf{r_4} & (u \cdot v) \cdot w \to u \cdot (v \cdot w) \\ \mathbf{r_5} & u \cdot (v \cdot w) \to (u \cdot v) \cdot w \end{array}$$

  – Reduktionskette $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b) \xrightarrow{r_5} (\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4}$ .. terminiert nicht
  – Normalform existiert dennoch: $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} \boldsymbol{b}$

Hat jeder Term eine Normalform?

- **Regeln für Gruppentheorie sind unvollständig**
  – Gleichung der Assoziativität gilt in zwei Richtungen
  – Naive Lösung: Zusatzregel für Rückwärtsanwendung der Assoziativität

$$\begin{array}{lrcl}
\mathbf{r_1} & e \cdot x & \rightarrow & x \\
\mathbf{r_2} & x \cdot e & \rightarrow & x \\
\mathbf{r_3} & \overline{y} \cdot y & \rightarrow & e \\
\mathbf{r_4} & (u \cdot v) \cdot w & \rightarrow & u \cdot (v \cdot w) \\
\mathbf{r_5} & u \cdot (v \cdot w) & \rightarrow & (u \cdot v) \cdot w
\end{array}$$

  – Reduktionskette $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b) \xrightarrow{r_5} (\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} ..$ terminiert nicht
  – Normalform existiert dennoch: $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} \boldsymbol{b}$

- **Schwache Normalisierbarkeit**
  – Jeder Term besitzt eine Normalform
  – Der λ-Kalkül ist nicht schwach normalisierbar (z.B. $(\lambda x.x\,x)(\lambda x.x\,x)$)

Hat jeder Term eine Normalform?

- **Regeln für Gruppentheorie sind unvollständig**
  - Gleichung der Assoziativität gilt in zwei Richtungen
  - Naive Lösung: Zusatzregel für Rückwärtsanwendung der Assoziativität

r_1	$e \cdot x \rightarrow x$
r_2	$x \cdot e \rightarrow x$
r_3	$\overline{y} \cdot y \rightarrow e$
r_4	$(u \cdot v) \cdot w \rightarrow u \cdot (v \cdot w)$
r_5	$u \cdot (v \cdot w) \rightarrow (u \cdot v) \cdot w$

  - Reduktionskette $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} \overline{a} \cdot (a \cdot b) \xrightarrow{r_5} (\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_4} ..$ terminiert nicht
  - Normalform existiert dennoch: $(\overline{a} \cdot a) \cdot b \xrightarrow{r_3} e \cdot b \xrightarrow{r_1} \boldsymbol{b}$
- **Schwache Normalisierbarkeit**
  - Jeder Term besitzt eine Normalform
  - Der λ-Kalkül ist nicht schwach normalisierbar (z.B. $(\lambda x.x\, x)(\lambda x.x\, x)$)
- **Starke Normalisierbarkeit ($(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ noethersch)**
  - Jede Kette von Regelanwendungen terminiert

Nachweis starker Normalisierbarkeit

Das System $r_1..r_4$ ist stark normalisierbar

- **Definiere wohlfundierte $\succ$ Ordnung auf $\mathcal{A}^*$**
  - z.B. lexikographische Ordnung: Länge und Ordnung im Alphabet
  - Sinnvolle Ordnung auf $\mathcal{A}$ ist z.B. $(\succ) \succ \cdot \succ z \succ \ldots \succ a$
- **Zeige, daß jede Regel $t \longrightarrow s$ die Ordnung respektiert**
  - $r_1: \ e \cdot x \succ x$
  - $r_2: \ x \cdot e \succ x$
  - $r_3: \ \overline{y} \cdot y \succ e$
  - $r_4: \ (u \cdot v) \cdot w \succ u \cdot (v \cdot w)$
- **Konsequenz: Jede Reduktionsfolge terminiert**
  - Jede Reduktionsfolge liefert eine bzgl. $\succ$ absteigende Kette von Termen
  - Wohlfundiertheit von $\succ$: es gibt keine unendlichen absteigenden Ketten

Steuerung von Termersetzungssystemen

- **Vermeide nicht normalisierbare Regelsysteme**
  - Terme ohne Normalform sind für automatisches Schließen ungeeignet
  - λ-Kalkül ist Logik höherer Stufe und hochgradig unentscheidbar
- **Heuristische Steuerung bei schwacher Normalisierbarkeit**
  - Strategische Steuerung vermeidet nichtterminierende Reduktionsketten
- **Konfluenz ist sehr wichtig**
  - Andernfalls wird Backtracking über Reduktionen erforderlich
    um Gleichheit von Termen nachzuweisen
- **Optimal: vollständige Termersetzungssysteme**
  - $(\mathcal{A},\mathcal{R})$ noethersch und konfluent

  Der Einsatz vollständiger Termersetzungssysteme führt immer zum Ziel!

Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t \rightarrow s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln r_i, r_j**

$\boldsymbol{r_3}$**:** $\overline{x}{\cdot}x \rightarrow e$

$\boldsymbol{r_4}$**:** $(x{\cdot}y){\cdot}z \rightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)$

Erzeugung vollständiger Regelsysteme

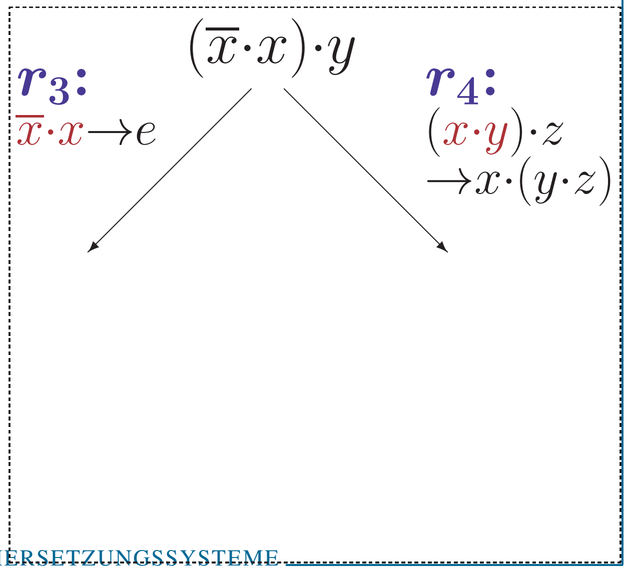
- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t \rightarrow s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln $\boldsymbol{r_i, r_j}$**
  – Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln

$\boldsymbol{r_3}$**:** $\overline{x} \cdot x \rightarrow e$

$\boldsymbol{r_4}$**:** $(x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$

ERZEUGUNG VOLLSTÄNDIGER REGELSYSTEME

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t \to s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln r_i, r_j**
  – Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln
  – Bilde kritischen Term t aus instantiierten Teiltermen



Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t{\rightarrow}s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln r_i, r_j**
  – Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln
  – Bilde kritischen Term t aus instantiierten Teiltermen
  – Bilde Termpaar s, s' mit $t \xrightarrow{r} s$ und $t \xrightarrow{r'} s'$:

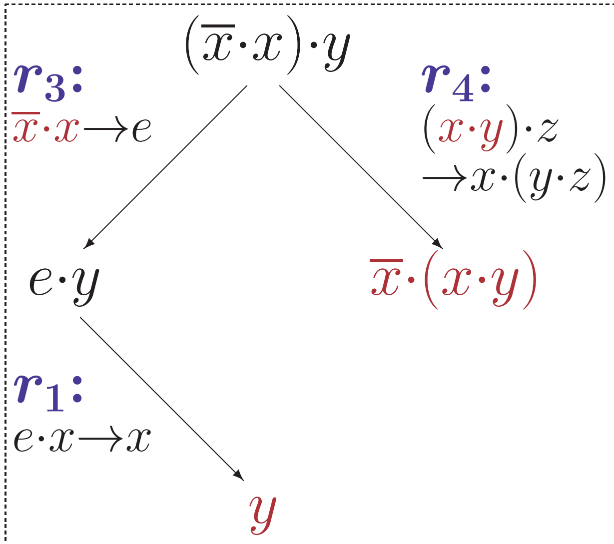
r_3: $\overline{x}{\cdot}x{\rightarrow}e$

r_4: $(x{\cdot}y){\cdot}z \rightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)$

$$\begin{tikzcd}
 & (\overline{x}{\cdot}x){\cdot}y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
e{\cdot}y & & \overline{x}{\cdot}(x{\cdot}y)
\end{tikzcd}$$

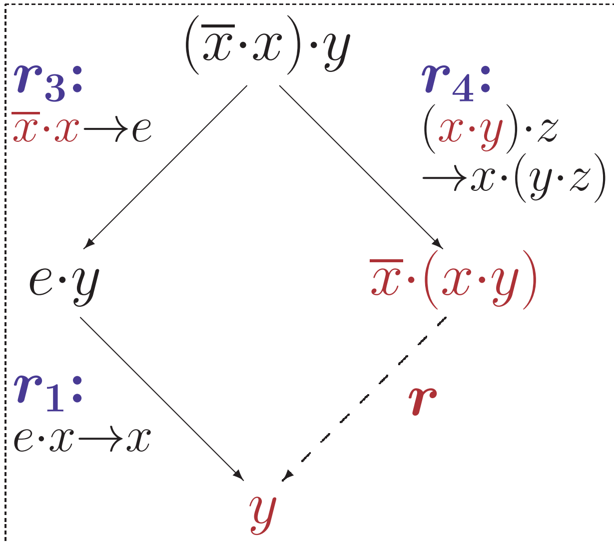
Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  – Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  – Regel $t \rightarrow s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  – Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  – Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  – Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  – Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln r_i, r_j**
  – Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln
  – Bilde kritischen Term t aus instantiierten Teiltermen
  – Bilde Termpaar s, s' mit $t \xrightarrow{r} s$ und $t \xrightarrow{r'} s'$:
  – Normalisiere s, s' zu kritischem Termpaar u, v



Erzeugung vollständiger Regelsysteme

- **Ausgangspunkt: System von Gleichungen**
  - Axiomatische Beschreibung der Bedeutung von Termen einer Theorie
- **Transformiere Gleichungen in gerichtete Regeln**
  - Regel $t \rightarrow s$ ersetzt Gleichung $t = s$
  - Regel ist gerichtet: Anwendung in Gegenrichtung nicht möglich
- **Regeln sollen Gleichungen vollständig ersetzen**
  - Konfluenz kann durch Ausrichtung verloren gehen
  - Zusatzregel für Gegenrichtung würde starke Normalisierbarkeit zerstören
  - Verfahren zur Vervollständigung von Reduktionssystemen nötig
- **Superposition von Regeln r_i, r_j**
  - Unifiziere Teilterme der linken Seiten beider Regeln
  - Bilde kritischen Term t aus instantiierten Teiltermen
  - Bilde Termpaar s, s' mit $t \xrightarrow{r} s$ und $t \xrightarrow{r'} s'$:
  - Normalisiere s, s' zu kritischem Termpaar u, v
  - Falls $u \neq v$ bilde neue Regel $u \rightarrow v$ ($v \rightarrow u$, falls $v \succ u$)



Knuth Bendix Vervollständigung

Vervollständigung durch Superposition

- **Ausgangspunkt: noethersches Regelsystem**
  - i.a. einfache Umwandlung eines Gleichungssystems
- **Ziel: vollständiges Regelsystem**
- **Methode: schrittweise Superposition aller Regeln**
  - unter Verwendung einer wohlfundierten Termordnung $\succ$
- **Abbruchkriterium: lokale Konfluenz**
  - Je zwei Regelanwendungen sind zusammenführbar

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "r'"] & \\ s \arrow[dr, "\star"'] & & t \arrow[dl, "\star"] \\ & v & \end{tikzcd}$$

- **Korrektheit:**
  - Starke Normalisierbarkeit: neue Regeln erhalten die Termordnung $\succ$
  - Konfluenz folgt aus lokaler Konfluenz und starker Normalisierbarkeit

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ stark normalisierbar, lokal konfluent $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ konfluent

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  – Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  – Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl

DAS DIAMOND LEMMA

$\xrightarrow{r}$ stark normalisierbar, lokal konfluent $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ konfluent

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  – Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  – Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  n=0: Es folgt v=t=s, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ stark normalisierbar, lokal konfluent $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ konfluent

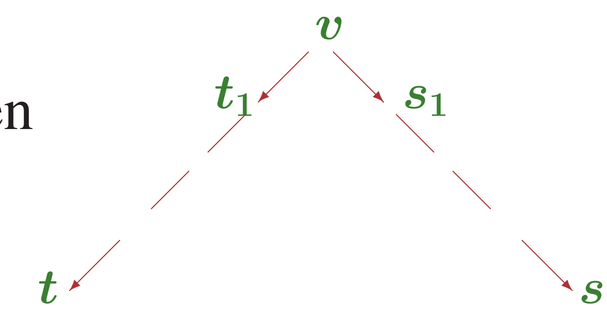
- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  $n=0$: Es folgt $v=t=s$, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

  $n+1$: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann $v=t$ oder $v=s$

  Ansonsten $v \xrightarrow{r} t_1 \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{r} s_1 \xrightarrow{*} s$



Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ **stark normalisierbar, lokal konfluent** $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ **konfluent**

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

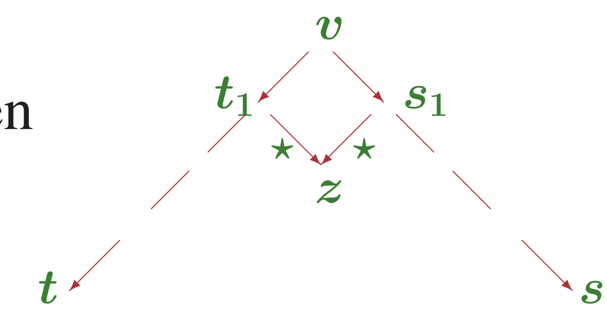
  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  n=0: Es folgt v=t=s, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

  n+1: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann v=t oder v=s

  Ansonsten $v \xrightarrow{r} t_1 \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{r} s_1 \xrightarrow{*} s$

  Lokale Konfluenz: $t_1{\downarrow}s_1$ mit einem Term z



Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ stark normalisierbar, lokal konfluent $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ konfluent

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

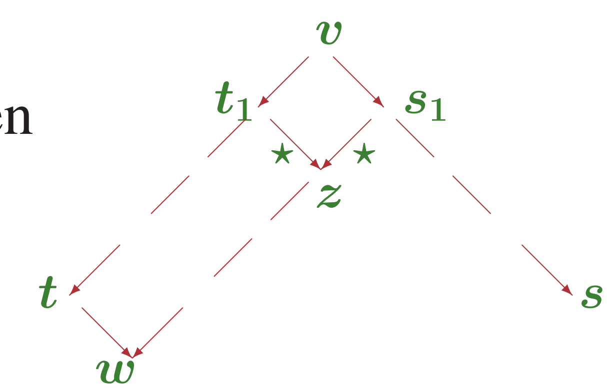
  $n{=}0$: Es folgt $v{=}t{=}s$, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

  $n{+}1$: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann $v{=}t$ oder $v{=}s$

  Ansonsten $v \xrightarrow{r} t_1 \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{r} s_1 \xrightarrow{*} s$

  Lokale Konfluenz: $t_1{\downarrow}s_1$ mit einem Term z

  Induktionsannahme für t_1: $t_1 \xrightarrow{*} t$, $t_1 \xrightarrow{*} z$ also $t{\downarrow}z$ mit w



Das Diamond Lemma

$\xrightarrow{r}$ **stark normalisierbar, lokal konfluent** $\Rightarrow$ $\xrightarrow{r}$ **konfluent**

- **Für jeden Term v gibt es ein n, so daß jede in v beginnende Reduktionsfolge in maximal n Schritten terminiert**
  - Stark normalisierbar: jede Reduktionsfolge von v terminiert
  - Endliche Verzweigung von $\xrightarrow{r}$: es gibt eine maximale Schrittzahl
- **Für alle v folgt $t{\downarrow}s$ aus $v \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{*} s$**

  Induktion über maximale Länge n aller Reduktionsketten

  $n{=}0$: Es folgt $v{=}t{=}s$, also $t{\downarrow}s$ trivialerweise

  $n{+}1$: Falls $v \xrightarrow{0} t$ oder $v \xrightarrow{0} s$, dann $v{=}t$ oder $v{=}s$

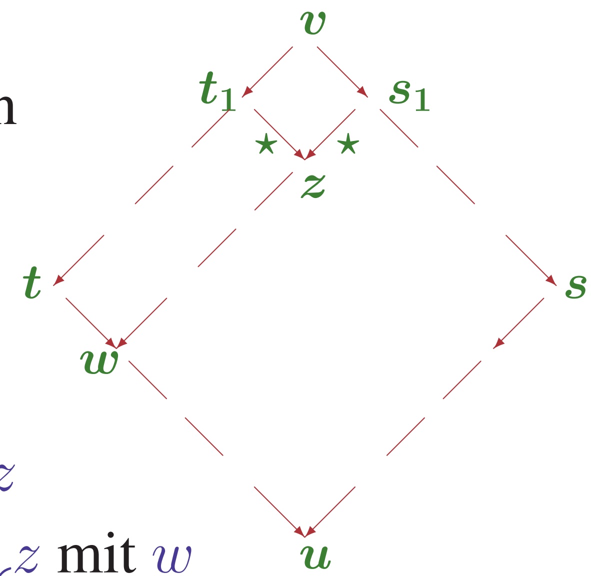
  Ansonsten $v \xrightarrow{r} t_1 \xrightarrow{*} t$ und $v \xrightarrow{r} s_1 \xrightarrow{*} s$

  Lokale Konfluenz: $t_1{\downarrow}s_1$ mit einem Term z

  Induktionsannahme für t_1: $t_1 \xrightarrow{*} t$, $t_1 \xrightarrow{*} z$ also $t{\downarrow}z$ mit w

  Induktionsannahme für s_1: $s_1 \xrightarrow{*} z \xrightarrow{*} w$, $s_1 \xrightarrow{*} s$ also $w{\downarrow}s$ mit u

  Insgesamt $t \xrightarrow{*} w \xrightarrow{*} u$ und $s \xrightarrow{*} u$, also $t{\downarrow}s$



Knuth–Bendix Verfahren

Eingabe: Endliche Menge $\mathcal{G}$ von Axiomgleichungen, Termordnung $\succ$.
Ausgabe: Bei Terminierung vollständiges Termersetzungssystem
oder Fehlermeldung

Initialisiere Regelmenge $\mathcal{R} := \emptyset$
Solange $\mathcal{G}$ nicht leer
Wähle Gleichung aus $\mathcal{G}$ und reduziere sie mit Regeln aus $\mathcal{R}$
Falls reduzierte Gleichung nicht von der Form $x \doteq x$
Dann Falls reduzierte Gleichung läßt sich nicht mit $\succ$ zu neuer Regel richten
Dann Abbruch *'Termordnung nicht ausreichend'*
Sonst Bilde neue Regel und füge sie zu $\mathcal{R}$ hinzu;
Reduziere alle Regeln aus $\mathcal{R}$ untereinander;
Falls eine der reduzierten Regeln die Termordnung $\succ$ verletzt
Dann entferne sie aus $\mathcal{R}$ und
nehme sie in $\mathcal{G}$ auf, sofern sie nicht von der Gestalt $x \doteq x$ ist;
Bilde alle kritischen Paare zwischen der neuen Regel
und den übrigen Regeln und füge sie als Gleichungen zu $\mathcal{G}$ hinzu
Ergebnis $\mathcal{R}$

Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$\mathbf{r_1}$	$e{\cdot}x \rightarrow x$
$\mathbf{r_2}$	$x{\cdot}e \rightarrow x$
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}{\cdot}x \rightarrow e$
$\mathbf{r_4}$	$(x{\cdot}y){\cdot}z \rightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)$

Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

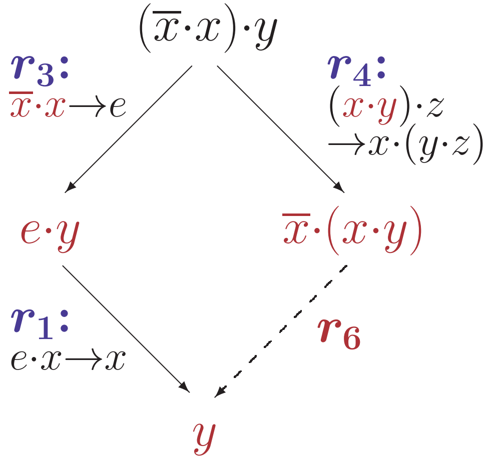
$$\begin{tikzcd} & \overline{e}\cdot e \arrow[dl, "\boldsymbol{r_2}\text{:}\ x\cdot e\to x"'] \arrow[dr, "\boldsymbol{r_3}\text{:}\ \overline{x}\cdot x\to e"] & \\ \overline{e} \arrow[rr, dashed, "\boldsymbol{r_5}"'] & & e \end{tikzcd}$$

$\mathbf{r_1}$	$e\cdot x \rightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x\cdot e \rightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}\cdot x \rightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x\cdot y)\cdot z \rightarrow x\cdot(y\cdot z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \rightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3

Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$\mathbf{r_1}$	$e{\cdot}x \rightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x{\cdot}e \rightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}{\cdot}x \rightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x{\cdot}y){\cdot}z \rightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \rightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}{\cdot}(x{\cdot}y) \rightarrow y$	Superposition von r_3 und r_4



Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$\mathbf{r_1}$	$e\cdot x \rightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x\cdot e \rightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}\cdot x \rightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x\cdot y)\cdot z \rightarrow x\cdot(y\cdot z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \rightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}\cdot(x\cdot y) \rightarrow y$	Superposition von r_3 und r_4
$\mathbf{r_7}$	$\overline{\overline{x}} \rightarrow x$	Superposition von r_3 und r_6

$$\begin{tikzcd}
& \overline{\overline{x}}\cdot(\overline{x}\cdot x) \arrow[dl, "r_3:\ \overline{x}\cdot x\to e"'] \arrow[dr, "r_6:\ \overline{x}\cdot(x\cdot y)\to y"] & \\
\overline{\overline{x}}\cdot e \arrow[dr, "r_2:\ x\cdot e\to x"'] & & x \\
& \overline{\overline{x}} \arrow[ur, dashed, "r_7"'] &
\end{tikzcd}$$

Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{\overline{x}}\cdot\overline{x} \arrow[dl, "\boldsymbol{r_7}\text{:}\ \overline{\overline{x}}\to x"'] \arrow[dr, "\boldsymbol{r_3}\text{:}\ \overline{x}\cdot x\to e"] & \\
x\cdot\overline{x} \arrow[rr, dashed, "\boldsymbol{r_8}"'] & & e
\end{tikzcd}
$$

$\mathbf{r_1}$	$e\cdot x \to x$	
$\mathbf{r_2}$	$x\cdot e \to x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}\cdot x \to e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x\cdot y)\cdot z \to x\cdot(y\cdot z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \to e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}\cdot(x\cdot y) \to y$	Superposition von r_3 und r_4
$\mathbf{r_7}$	$\overline{\overline{x}} \to x$	Superposition von r_3 und r_6
$\mathbf{r_8}$	$x\cdot\overline{x} \to e$	Superposition von r_3 und r_7

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

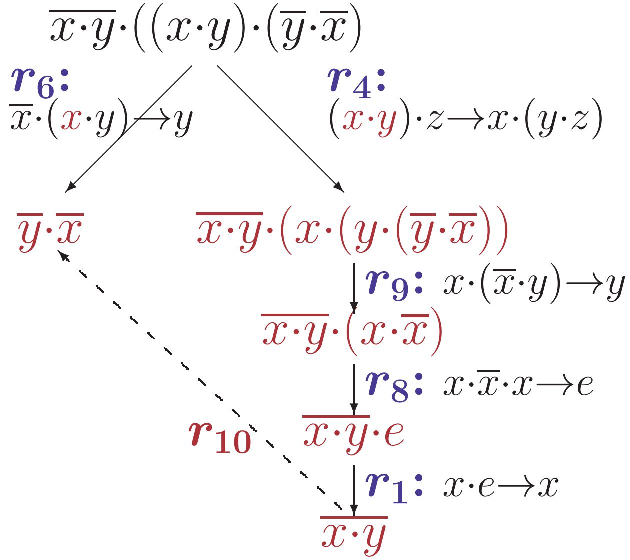
$\mathbf{r_1}$	$e\cdot x \to x$	
$\mathbf{r_2}$	$x\cdot e \to x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}\cdot x \to e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x\cdot y)\cdot z \to x\cdot(y\cdot z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \to e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}\cdot(x\cdot y) \to y$	Superposition von r_3 und r_4
$\mathbf{r_7}$	$\overline{\overline{x}} \to x$	Superposition von r_3 und r_6
$\mathbf{r_8}$	$x\cdot\overline{x} \to e$	Superposition von r_3 und r_7
$\mathbf{r_9}$	$x\cdot(\overline{x}\cdot y) \to y$	Superposition von r_6 und r_7

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{\overline{x}}\cdot(\overline{x}\cdot y) \arrow[dl, "\boldsymbol{r_7}:\ \overline{\overline{x}}\to x"'] \arrow[dr, "\boldsymbol{r_6}:\ \overline{x}\cdot(x\cdot y)\to y"] & \\
x\cdot(\overline{x}\cdot y) \arrow[rr, dashed, "\boldsymbol{r_9}"'] & & y
\end{tikzcd}$$

Knuth Bendix Vervollständigung am Beispiel

- **Vollständiges Regelsystem für die Gruppentheorie**

$\mathbf{r_1}$	$e{\cdot}x \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_2}$	$x{\cdot}e \longrightarrow x$	
$\mathbf{r_3}$	$\overline{x}{\cdot}x \longrightarrow e$	
$\mathbf{r_4}$	$(x{\cdot}y){\cdot}z \longrightarrow x{\cdot}(y{\cdot}z)$	
$\mathbf{r_5}$	$\overline{e} \longrightarrow e$	Superposition von r_2 und r_3
$\mathbf{r_6}$	$\overline{x}{\cdot}(x{\cdot}y) \longrightarrow y$	Superposition von r_3 und r_4
$\mathbf{r_7}$	$\overline{\overline{x}} \longrightarrow x$	Superposition von r_3 und r_6
$\mathbf{r_8}$	$x{\cdot}\overline{x} \longrightarrow e$	Superposition von r_3 und r_7
$\mathbf{r_9}$	$x{\cdot}(\overline{x}{\cdot}y) \longrightarrow y$	Superposition von r_6 und r_7
$\mathbf{r_{10}}$	$\overline{(x{\cdot}y)} \longrightarrow \overline{y}{\cdot}\overline{x}$	Superposition von r_4, r_6, r_8, r_9 (aufwendig)



Theorieunifikation mit Termersetzung

- **Komplementarität von Theoriekonnektionen**

$$\left[\begin{array}{cc} & R(z{\cdot}(\overline{c}{\cdot}c), z{\cdot}(\overline{z}{\cdot}b))^F \\ R(c,b)^T & \end{array}\right] \quad \sigma{=}[c/z]$$

Group

  – Konnektion benutzt Theorieunifikation für Gruppentheorie

- **Unifikation von $R(z{\cdot}(\overline{c}{\cdot}c), z{\cdot}(\overline{z}{\cdot}b))^F$ und $R(c,b)^T$**

$$\begin{array}{ll} & R(z{\cdot}(\overline{c}{\cdot}c), z{\cdot}(\overline{z}{\cdot}b)) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_3} & R(z{\cdot}e, z{\cdot}(\overline{z}{\cdot}b)) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_9} & R(z{\cdot}e, b) = R(c,b) \\ \xrightarrow{r_2} & R(z,b) = R(c,b) \\ \xrightarrow{unif} & R(c,b) = R(c,b) \qquad \sigma{=}[c/z] \end{array}$$

- **Integriere Unifikation und Termersetzung**

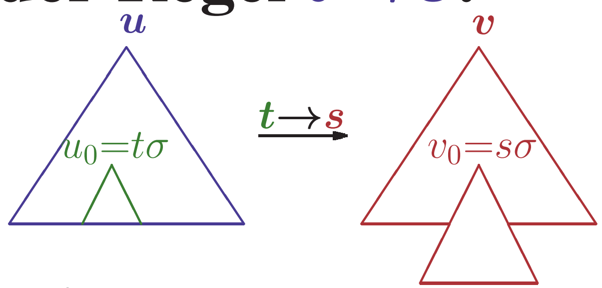
  – Bestimme Substitution während der Ersetzung

Verallgemeinerte Anwendung von Rewrite-Regeln

- **Rewriting einer Gleichung $u{=}w$ mit der Regel $t{\to}s$:**

  $u{=}w \;\to\; v{=}w$

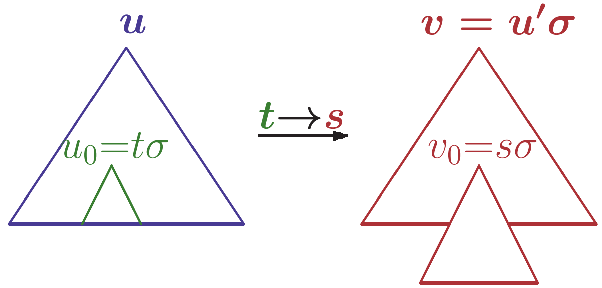
  v entsteht aus u durch Ersetzung eines Teilterms $t\sigma$ durch $s\sigma$



- **Einfaches Verengen mit der Regel $t{\to}s$:**

  $\{u{=}w\}{\cup}E \;\to\; \{v{=}w\}{\cup}E$

  v entsteht aus u durch Ersetzung eines Teilterms $t\sigma$ durch $s\sigma$ und anschließender Anwendung von σ auf den ganzen Term



- **Lässiges Verengen mit der Regel $f\,t_1 \ldots t_n \to s$:**

  $\{u{=}w\}{\cup}E \;\to\; \{v{=}w,\, t_1{=}u_1, \ldots, y_n{=}u_n\}{\cup}E$

  v entsteht aus u durch Ersetzung des Auftretens von $f u_1 \ldots u_n$ durch s.

  Bestimmung der Substitution wird in Gleichungssystem verschoben

Verengen + Martelli–Montanari–Regeln liefern vollständiges (Unifikations-) Verfahren für Lösung einer Menge von Gleichungen unter einer Theorie

Arithmetische Rewrite-Regeln für ganze Zahlen

$\mathbf{r_1}$	$v(n(x)) \to x$	Vorgänger/Nachfolger
$\mathbf{r_2}$	$0 + x \to x$	Null als Linksidentität
$\mathbf{r_3}$	$x + 0 \to x$	Null als Rechtsidentität
$\mathbf{r_4}$	$n(x) + y \to n(x + y)$	Addition links
$\mathbf{r_5}$	$x + n(y) \to n(x + y)$	Addition rechts
$\mathbf{r_6}$	$x + v(y) \to v(x + y)$	Subtraktion

Termersetzungssystem für einfache Arithmetik

Arithmetische Rewrite-Regeln für ganze Zahlen

$\mathbf{r_1}$	$v(n(x)) \rightarrow x$	Vorgänger/Nachfolger
$\mathbf{r_2}$	$0 + x \rightarrow x$	Null als Linksidentität
$\mathbf{r_3}$	$x + 0 \rightarrow x$	Null als Rechtsidentität
$\mathbf{r_4}$	$n(x) + y \rightarrow n(x + y)$	Addition links
$\mathbf{r_5}$	$x + n(y) \rightarrow n(x + y)$	Addition rechts
$\mathbf{r_6}$	$x + v(y) \rightarrow v(x + y)$	Subtraktion

Als Arithmetische Regeln für Lässiges Verengen

$$\boldsymbol{r_1}\ \{u[v(t)]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma \ \leadsto\ \{u[x]{=}w,\ n(x){=}t\}{\cup}E,\ \sigma$$

$$\boldsymbol{r_2}\ \{u[t_1{+}t_2]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma \leadsto \{u[x]{=}w,\ 0{=}t_1,\ x{=}t_2\}{\cup}E,\ \sigma$$

$$\boldsymbol{r_3}\ \{u[t_1{+}t_2]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma \leadsto \{u[x]{=}w,\ x{=}t_1,\ 0{=}t_2\}{\cup}E,\ \sigma$$

$$\boldsymbol{r_4}\ \{u[t_1{+}t_2]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma \leadsto \{u[n(x{+}y)]{=}w,\ n(x){=}t_1,\ y{=}t_2\}{\cup}E,\ \sigma$$

$$\boldsymbol{r_5}\ \{u[t_1{+}t_2]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma \leadsto \{u[n(x{+}y)]{=}w,\ x{=}t_1,\ n(y){=}t_2\}{\cup}E,\ \sigma$$

$$\boldsymbol{r_6}\ \{u[t_1{+}t_2]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma \leadsto \{u[v(x{+}y)]{=}w,\ x{=}t_1,\ v(y){=}t_2\}{\cup}E,\ \sigma$$

Termersetzungssystem für einfache Arithmetik

Arithmetische Regeln für Lässiges Verengen

r_1	$\{u[v(t)]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[x]{=}w,\ n(x){=}t\}{\cup}E,\ \sigma$
r_2	$\{u[t_1{+}t_2]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[x]{=}w,\ 0{=}t_1,\ x{=}t_2\}{\cup}E,\ \sigma$
r_3	$\{u[t_1{+}t_2]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[x]{=}w,\ x{=}t_1,\ 0{=}t_2\}{\cup}E,\ \sigma$
r_4	$\{u[t_1{+}t_2]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[n(x{+}y)]{=}w,\ n(x){=}t_1,\ y{=}t_2\}{\cup}E,\ \sigma$
r_5	$\{u[t_1{+}t_2]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[n(x{+}y)]{=}w,\ x{=}t_1,\ n(y){=}t_2\}{\cup}E,\ \sigma$
r_6	$\{u[t_1{+}t_2]{=}w\}{\cup}E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{u[v(x{+}y)]{=}w,\ x{=}t_1,\ v(y){=}t_2\}{\cup}E,\ \sigma$

Martelli–Montanari–Regeln für Unifikation

TD	$\{f(s_1,..,s_n){=}f(t_1,..,t_n)\}{\cup}E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$\{s_1{=}t_1,..,s_n{=}t_n\}{\cup}E,\ \sigma$	
ET	$\{x{=}x\}{\cup}E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$E,\ \sigma$	
VE	$\{x{=}t\}{\cup}E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$E[t/x],\ \sigma[t/x]$	$(x\not\in t)$
VE$_u$	$\{t{=}x\}{\cup}E,\ \sigma$	$\rightsquigarrow$	$E[t/x],\ \sigma[t/x]$	$(x\not\in t,\ t\not\in\mathcal{V})$

Theorie-Unifikation durch Transformation

Gleichungen	σ (nur relevantes)	angewandte Regeln
$\{(x+x)+v(0) = n(0)\}$	$[\,]$	r_6: $x+v(y)\mapsto v(x+y)$
$\{v(x_1+y_1) = n(0),\ x_1 = x+x,\ v(y_1) = v(0)\}$	$[\,]$	TD
$\{v(x_1+y_1) = n(0),\ x_1 = x+x,\ y_1 = 0\}$	$[\,]$	VE
$\{v(x_1+0) = n(0),\ x_1 = x+x\}$	$[0/y_1]$	VE
$\{v((x+x)+0) = n(0)\}$	$[x+x/x_1]$	r_1: $v(n(x))\mapsto x$
$\{x_2 = n(0),\ n(x_2) = (x+x)+0\}$	$[\,]$	VE
$\{n(n(0)) = (x+x)+0\}$	$[n(0)/x_2]$	r_3: $x+0\mapsto x$
$\{n(n(0)) = x_3,\ x_3 = x+x,\ 0 = 0\}$	$[\,]$	TD
$\{n(n(0)) = x_3,\ x_3 = x+x\}$	$[\,]$	VE
$\{n(n(0)) = x+x\}$	$[x+x/x_3]$	r_4: $n(x)+y\mapsto n(x+y)$
$\{n(n(0)) = n(x_4+y_4),\ x = n(x_4),\ x = y_4\}$	$[\,]$	TD
$\{n(0) = x_4+y_4,\ n(x_4) = x,\ y_4 = x\}$	$[\,]$	VE
$\{n(0) = x_4+x,\ n(x_4) = x\}$	$[x/y_4]$	VE
$\{n(0) = x_4+n(x_4)\}$	$[n(x_4)/x]$	r_5: $x+n(y)\mapsto n(x+y)$
$\{n(0) = n(x_5+y_5),\ x_5 = x_4,\ n(y_5) = n(x_4)\}$	$[n(x_4)/x]$	TD
$\{0 = x_5+y_5,\ x_5 = x_4,\ n(y_5) = n(x_4)\}$	$[n(x_4)/x]$	VE
$\{0 = x_4+y_5,\ n(y_5) = n(x_4)\}$	$[n(x_4)/x,\ x_4/x_5]$	TD
$\{0 = x_4+y_5,\ y_5 = x_4\}$	$[n(x_4)/x]$	VE
$\{0 = x_4+x_4\}$	$[n(x_4)/x,\ x_4/y_5]$	r_2: $0+x\mapsto x$
$\{0 = x_6,\ 0 = x_4,\ x_6 = x_4\}$	$[n(x_4)/x]$	VE_u
$\{0 = x_4\}$	$[n(x_4)/x,\ 0/x_6]$	VE_u
$\{\}$	$[n(0)/x,\ 0/x_4]$	

$\boxed{\text{Ergebnis: } \boldsymbol{\sigma(x) = n(0)}}$

Anwendung von Termersetzung in der Deduktion

- **Unifikationsalgorithmus für Theoriekonnektionen**
  - Nur bei vollständigen Regelsystemen möglich
    z.B. Einfache Arithmetik, Gruppentheorie, Gleichheitstheorien
  - Nicht jede Theorie kann als vollstandiges Regelsystem formuliert werden
  - Heuristische Steuerung für unvollständige Systeme praktisch erfolgreich
- **Deduktion als Termersetzungssystem formulierbar**
  - In beschränkten Bereichen sinnvoll einsetzbar
  - Niedriges Niveau, kein Ersatz für verdichtete logische Verfahren

Effiziente Einbettung in Konnektionsmethode noch offen

Anwendung von Termersetzung in der Deduktion

- **Unifikationsalgorithmus für Theoriekonnektionen**
  - Nur bei vollständigen Regelsystemen möglich

    z.B. Einfache Arithmetik, Gruppentheorie, Gleichheitstheorien
  - Nicht jede Theorie kann als vollstandiges Regelsystem formuliert werden
  - Heuristische Steuerung für unvollständige Systeme praktisch erfolgreich
- **Deduktion als Termersetzungssystem formulierbar**
  - In beschränkten Bereichen sinnvoll einsetzbar
  - Niedriges Niveau, kein Ersatz für verdichtete logische Verfahren

Effiziente Einbettung in Konnektionsmethode noch offen

Anwendung von Termersetzung in der Deduktion

- **Unifikationsalgorithmus für Theoriekonnektionen**
  - Nur bei vollständigen Regelsystemen möglich

    z.B. Einfache Arithmetik, Gruppentheorie, Gleichheitstheorien
  - Nicht jede Theorie kann als vollstandiges Regelsystem formuliert werden
  - Heuristische Steuerung für unvollständige Systeme praktisch erfolgreich
- **Deduktion als Termersetzungssystem formulierbar**
  - In beschränkten Bereichen sinnvoll einsetzbar
  - Niedriges Niveau, kein Ersatz für verdichtete logische Verfahren

Effiziente Einbettung in Konnektionsmethode noch offen