Übung zur Vorlesung

Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2015

Blatt 1 — Abgabetermin: 30. April 2015

Aufgabe 1.1 (Prädikatenlogik: Semantik I)

Es seien:

$\mathcal{V} = \{x, y, z\}$
$\mathcal{F} = \{+, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathcal{P} = \{=\}$

unter folgender (nicht–Standard) Interpretation ι:

$\mathcal{U} = \mathbb{N}_\omega^\Omega$, die Menge der natürlichen Zahlen (mit Null) ergänzt um zwei Elemente Ω und ω
$\iota(x) = \iota(y) = \iota(z) =$ Null
$\iota(0), \iota(1), \ldots =$ Null, Eins,...
$\iota(+) = \oplus$
$\iota(=) =$ Die übliche Gleichheit

Dabei sei die zweistellige Funktion $\oplus$ wie nebenstehend definiert, wobei $i, j \in \mathbb{N} \setminus \{\Omega, \omega\}$ gilt und mit "+" die gewöhnliche Addition auf natürlichen Zahlen gemeint ist:

$\oplus$	j	ω	Ω
i	$i + j$	Ω	ω
ω	ω	Ω	ω
Ω	Ω	Ω	ω

Welche der folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke ist semantisch wahr unter ι:

1.1–a $\forall x \quad \neg(x = x{+}1)$

1.1–b $\forall x, y \quad x{+}1 = y{+}1 \Rightarrow x = y$

1.1–c $\forall x \quad x{+}0 = x$

1.1–d $\forall x \quad 0{+}x = x$

1.1–e $\forall x \quad \neg(0 = x{+}1)$

1.1–f $\forall x \quad \neg(x = 0) \Rightarrow \exists y\ x = y{+}1$

1.1–g $\forall x, y, z \quad x{+}(y{+}z) = (x{+}y){+}z$

1.1–h $\forall x, y \quad x{+}y = y{+}x$

1.1–i $\forall x, y \quad 0{+}x = x \Rightarrow (0{+}x){+}y = x{+}(y{+}0)$

Aufgabe 1.2 (Prädikatenlogik: Semantik II)

Welche der folgenden Formeln sind gültig oder erfüllbar

1.2–a $(\exists x Px \wedge Qx) \Rightarrow (\exists x Px) \wedge (\exists x Qx)$

1.2–b $(\exists x Px) \wedge (\exists x Qx) \Rightarrow (\exists x Px \wedge Qx)$

1.2–c $\neg(\exists x Px \Rightarrow \forall x Px)$

1.2–d $\neg(\exists x Px) \Rightarrow \forall x Px$

Erklären Sie Ihre Antwort mittels Interpretionen

Aufgabe 1.3 (Semantik)

Die Formel $(\forall x \exists y\ P(x,y)) \wedge \neg(\exists x\ P(x,x)) \wedge (\forall xyz\ (P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z))$ ist erfüllbar in der Standardinterpretation der natürlichen Zahlen. Begründen Sie, warum die Formel nicht über einem (nicht leeren) endlichen Universum erfüllbar sein kann.

Aufgabe 1.4 (Formale Beweise)

Beweisen Sie folgende Formeln in Refinement Logic und im Tableaux-Kalkül

1.4–a $A \vee B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

1.4–b $(\exists x \neg Px) \Rightarrow \neg(\forall x Px)$

Lösung 1.1 *Ziel dieser Aufgabe ist es, den Sinn und die Anwendungen von Semantik mit Hilfe von Interpretationen zu illustrieren. Überdies soll gleichzeitig vermittelt werden, wie schnell die syntaktische Erscheinungsform eine Bedeutung suggeriert, die mitunter von der intendierten Interpretation abweicht. Hier die Lösungen im einzelnen:*

1.1–a ι(∀x ¬(x=x+1)) — **nicht** wahr. Gegenbeispiel: $\iota^{\Omega}_{\mathtt{x}}$ oder auch $\iota^{\omega}_{\mathtt{x}}$.

1.1–b ι(∀x,y x+1=y+1 ⇒ x=y) — wahr.

1.1–c ι(∀x x+0=x) — wahr.

1.1–d ι(∀x 0+x=x) — **nicht** wahr. Gegenbeispiel: $\iota^{\Omega}_{\mathtt{x}}$ oder auch $\iota^{\omega}_{\mathtt{x}}$.

1.1–e ι(∀x ¬(0=x+1)) — wahr.

1.1–f ι(∀x ¬(x=0) ⇒ ∃y x=y+1) — wahr.

1.1–g ι(∀x,y,z x+(y+z)=(x+y)+z) — **nicht** wahr. Gegenbeispiel: $(\iota^{\Omega}_{\mathtt{y}})^{\omega}_{\mathtt{z}}$

1.1–h ι(∀x,y x+y=y+x) — **nicht** wahr. Gegenbeispiel: $(\iota^{\omega}_{\mathtt{x}})^{\Omega}_{\mathtt{y}}$.

1.1–i ι(∀x,y 0+x=x ⇒ (0+x)+y=x+(y+0)) — wahr.

Wie man sieht, ist semantisches Schließen etwas mühsam.

Lösung 1.2

1.2–a $(\exists x Px \wedge Qx) \Rightarrow (\exists x Px) \wedge (\exists x Qx)$ — gültig

Wenn ι die Formel $\exists x Px \wedge Qx$ wahr macht, dann muß ι^u_x für ein $u \in \mathcal{U}$ die Formel $Px \wedge Qx$ wahr machen. Für dieses u wird dann auch Px und Qx unter ι^u_x wahr, also sind $\exists x Px$ und $\exists x Qx$ wahr unter ι. Da ι in obigem Argument beliebig wahr, ist die Formel $(\exists x Px \wedge Qx) \Rightarrow (\exists x Px) \wedge (\exists x Qx)$ allgemeingültig.

1.2–b $(\exists x Px) \wedge (\exists x Qx) \Rightarrow (\exists x Px \wedge Qx)$ — nicht gültig aber erfüllbar

Die Aussage wird wahr, wenn z.B. P und Q identisch interpretiert werden.

Sie wird falsch wenn z.B. Px mit $x = 4$ und Qx mit $x = 5$ interpretiert wird.

1.2–c $\neg(\exists x Px \Rightarrow \forall x Px)$ — erfüllbar aber nicht gültig

die Formel wird wahr im Universum $\mathbb{N}$ mit $Px \equiv x{=}5$ und nicht wahr im einelementigen Universum oder wenn Px konstant mit $wahr$ interpretiert wird.

1.2–d $\neg(\exists x Px) \Rightarrow \forall x Px$ — erfüllbar aber nicht gültig

die Formel wird wahr im Universum $\mathbb{N}$ wenn Px konstant mit $wahr$ interpretiert wird, oder auch im leeren Universum. Sie ist falsch im im Universum $\mathbb{N}$ wenn Px konstant mit $falsch$ interpretiert wird.

Ursprünglich sollte diese Formel ein Beispiel dafür sein, daß eine Formel *nur* im leeren Universum erfüllbar sein kann Das ist aber für diese Formel nicht der Fall.

Mögliche Formeln sind : $\neg(\exists x\ (Px \Rightarrow Px))$ oder $\forall x.Px \wedge \neg Px$

Lösung 1.3 Zunächst einmal eine grobe Idee:

Die Formel besteht im Endeffekt aus drei Axiomen, die das Prädikat P charakterisieren. $P(x, y)$ könnte man auch lesen als $x<y$ (so die ursprüngliche Formulierung der Aufgabe). Dann sagt Axiom 1, daß es zu jedem Objekt ein größeres gibt und nach Axiom 2 kann dieses nicht das Objekt selbst sein. Axiom 3, die Transitivität, verbietet zusammen mit Axiom 2 die Vergleichbarkeit von Objekten im Kreis. Dies bedeutet, daß nach Axiom 1 zu jedem Objekt ein *neues* Objekt im Universum existieren muß, das größer ist. In endlichen Universen ist dies nicht möglich.

Dieses Argument bezieht sich aber zu sehr auf die konkrete Lesart P als "kleiner" zu interpretieren. Wir müssen zeigen, daß das Argument davon aber gar nicht abhängt und gehen daher zurück auf die Definitionen von Erfüllbarkeit und Interpretationen. Eine Formel F ist erfüllbar, wenn es eine Interpretation $(\iota,\mathcal{U})$ gibt, unter der F wahr ist. Dabei ist die Interpretation der logischen Konnektive festgelegt, aber die Interpretation $\iota(P)$ nicht. Die einzige Bedingung ist, daß $\iota(P)$ eine Funktion auf $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$ ist, die Wahrheitswerte als Ergebnis liefert. Der Einfachheit halber schreibe ich im folgenden $\iota(P)(u, v)$, wenn $\iota(P)(u, v)$=`wahr` gemeint ist.

Beweis: Sei $(\iota,\mathcal{U})$ eine Interpretation, welche die drei Teilaxiome der Formel wahr macht.

1. Axiom 1 ($\forall x\exists y\ P(x, y)$) besagt, daß für jedes Objekt $u\in\mathcal{U}$ ein anderes Objekt $v\in\mathcal{U}$ existieren muß, so daß $\iota(P)(u, v)$ gilt.
2. Axiom 2 ($\neg(\exists x\ P(x, x))$) besagt, daß dieses v nicht identisch zu u sein kann, denn es gibt kein $u\in\mathcal{U}$ für das $\iota(P)(u, u)$ gilt.
3. Axiom 3 ($\forall xyz\ \ (P(x, y)\wedge P(y, z))\Rightarrow P(x, z)$) besagt, daß $\iota(P)$ transitiv ist, also daß aus $\iota(P)(u, v)$ und $\iota(P)(v, w)$ immer $\iota(P)(u, w)$ folgt – für jede Wahl der $u, v, w\in\mathcal{U}$.

Wir wählen nun ein Objekt $u_1\in\mathcal{U}$. Dann gibt es nach Axiom ein Objekt u_2 für das $\iota(P)(u_1, u_2)$ gilt, ein Objekt u_3, für das $\iota(P)(u_2, u_3)$ gilt, usw. Nach Axiom 3 gilt dann $\iota(P)(u_i, u_j)$ für alle $i<j$.

Wenn nun $\mathcal{U}$ endlich wäre, also n Elemente hätte, dann müsste das oben konstruierte Objekt u_{n+1} identisch mit einem der u_i für ein $i\leq n$ sein. Da aber wegen der Transitivität $\iota(P)(u_i, u_{n+1)}$ gilt, hätten wir $\iota(P)(u_i, u_i)$, was wegen Axiom 2 aber nicht möglich ist. Also kann $\mathcal{U}$ nicht endlich sein.

P.S. Wenn $\mathcal{U}$ leer ist, dann sind alle drei Axiome trivialerweise wahr. In dem Sinne gibt es ein endliches Universum, über dem die Formel erfüllbar ist. Auf solche pathologischen Fälle muß man achten!

Lösung 1.4

1.4–a $A \vee B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

Refinement Logic Der Beweis folgt den äußersten Konnektiven und versucht, Formeln so weit wie möglich zu zerlegen. Dabei ist die Reihenfolge in der Aussagenlogik fast beliebig, aber es empfiehlt sich, Regeln, die zwei Unterziele erzeugen, so spät wir möglich auszuführen.

```
⊢ A∨B  ⇒  ¬(¬A∧¬B)                         BY impliesR
1.    A∨B ⊢ ¬(¬A∧¬B)                         BY notR
1.1.    A∨B, ¬A∧¬B ⊢ ff                      BY andL 2
1.1.1.    A∨B, ¬A,¬B ⊢ ff                    BY orL 1
1.1.1.1.    A, ¬A,¬B ⊢ ff                    BY notL 2
1.1.1.1.1.    A, ¬A,¬B ⊢ A                   BY axiom 1
1.1.1.2.    B, ¬A,¬B ⊢                       BY notL 3
1.1.1.1.1.    A, ¬A,¬B ⊢ B                   BY axiom 1
```

Tableaux-Beweis

$A \vee B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)^F$		α
$\neg(\neg A \wedge \neg B)^F$		α
$A \vee B^T$		β
$\neg A \wedge \neg B^T$		α
$\neg A^T$		α
$\neg B^T$		α
A^F		
B^F		
B^T	B^T	
$\times$	$\times$	

1.4–b $(\exists x \neg Px) \Rightarrow \neg(\forall x Px)$

Refinement Logic

```
⊢ ∃x ¬Px  ⇒  ¬(∀x Px)                        BY impliesR
1.    ∃x ¬Px ⊢ ¬(∀x Px)                        BY notR
1.1.    ∃x ¬Px, (∀x Px) ⊢ ff                   BY exL 1
1.1.1.    ¬Pa, (∀x Px) ⊢ ff                    BY notL 1
1.1.1.1.    ¬Pa, (∀x Px) ⊢ Pa                  BY allL 2 a
1.1.1.1.1.   ¬Pa, (∀x Px), Pa ⊢ Pa             BY axiom 1
```

Tableaux-Beweis

$\exists x \neg Px \Rightarrow \neg(\forall x Px)^F$	α
$\exists x \neg Px^T$	$\delta(a)$
$\neg(\forall x Px)^F$	α
$(\forall x Px)^T$	$\gamma(a)$
$\neg Pa^T$	α
Pa^F	
Pa^T	
$\times$	