Übung zur Vorlesung

Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2015

Blatt 2 — Abgabetermin: 28. Mai 2015

Aufgabe 2.1 (Eigenschaften der Logik erster Stufe)

Beweisen Sie den Satz von Löwenheim: *In der der Logik erster Stufe kann jede erfüllbare Formel in einem abzählbaren Universum erfüllt werden.*

Was bedeutet dieser Satz für die Anwendbarkeit der Logik erster Stufe?

Aufgabe 2.2 (Matrix-Beweise)

Beweisen Sie folgende Formeln im Matrix-Kalkül

Stellen Sie dazu zunächst den annotierten Formelbaum und die zugehörige zweidimensionale Matrixdarstellung auf. Identifizieren Sie alle Konnektionen und alle Pfade durch die Matrix. Zeigen Sie, daß alle Pfade eine solche Konnektion enthalten und geben Sie eine zulässige Substitution an, welche diese Konnektionen komplementär macht.

2.2–a $A \vee B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

2.2–b $(\exists x\, \neg Px) \Rightarrow \neg, (\forall x\, Px)$

2.2–c $(\forall xyz\; Sxy \wedge Syz \Rightarrow Gxz) \wedge (\forall xy\; Gxy \Rightarrow Sxy) \;\Rightarrow\; \forall abcd\; Sab \wedge Scd \wedge Sbd \Rightarrow (\exists u\, Gau)$

2.2–d $(\forall xyz\; Sxy \wedge Syz \Rightarrow Gxz) \wedge (\forall xy\; Gxy \Rightarrow Sxy) \;\Rightarrow\; \forall abcd\; Sab \wedge Scd \wedge Sbd \Rightarrow Gad$

Konstruieren Sie aus dem fertigen Matrixbeweis die induzierte Reduktionsordnung, linearisieren Sie diese und erzeugen Sie daraus einen Tableauxbeweis.

Aufgabe 2.3 (Logik-Puzzle zum Tüfteln)

Lösen Sie das sogenannte “Agatha Murder Puzzle” mithilfe des Matrix-Verfahrens.

1. *Agatha hates Charles*
2. *Agatha hates herself*
3. *If a person is not richer than Agatha then the Butler hates that person*
4. *If Agatha hates somebody then Charles does not hate that person*
5. *If Agatha hates somebody then the Butler hates that person too*
6. *Everyone likes at least one of Agatha, the Butler, or Charles*
7. *Nobody kills a person that is not richer*
8. *If you kill someone, you must hate that person*

Agatha is dead. Show that neither Charles nor the Butler killed her

Versuchen Sie zunächst ein informales, logisches Argument. Formulieren Sie dann obige Aussagen in der Logik erster Stufe und konstruieren Sie daraus schrittweise den Matrixbeweis.

Aufgabe 2.4 (Aussagenlogische Konnektionsmethode)

Prüfen Sie mit Hilfe der Konnektionsmethode, ob die folgenden Matrizen gültig sind. Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

$$\begin{bmatrix} A^T & A^F & A^T \\ B^T & B^F & B^F \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A^T & A^F & C^T & B^F \\ B^T & C^F & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A^T & B^F & C^F & D^T & A^F \\ B^T & C^T & D^F & B^F & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A^T & A^F & A^F & B^F & C^F \\ B^T & B^F & B^T & A^T & A^F \\ C^T & & & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A^F & C^T & A^T & B^F & C^F \\ B^T & D^F & & D^T & \\ & B^T & & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A^T & A^T & A^F & A^F & B^F & C^F \\ B^F & B^T & B^T & B^T & & \\ C^T & C^T & C^T & C^F & & \end{bmatrix}$$

Zur Zeit- / Platzersparnis sollten Sie mehrere Schritte in einer Matrix durchführen. Numerieren Sie dazu die Konnektionen in der verwendeten Reihenfolge durch, und machen Sie die Richtung der Konnektionen deutlich.

Aufgabe 2.5 (Prädikatenlogisches Extensionsverfahren)

Beweisen Sie die folgenden Matrizen mit Hilfe des allgemeinen Extensionsverfahrens.

$$\begin{bmatrix} Px^F & Py^T & Pffz^T \\ & Pfy^F & Pfa^T \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Qabcd^T & Qxyzv^F & Qcdab^F & Qbcda^F \\ & Qvxyz^T & & \\ & Qzvxy^T & & \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2.6 (Komplexität des Extensionsverfahrens)

2.6–a Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, daß das (aussagenlogische) Extensionsverfahren im schlimmsten Fall exponentiellen Zeitaufwand (gemessen an der Anzahl der Variablen und Klauseln) benötigt.

2.6–b Wie ist die Komplexität des Verfahrens, wenn man sich auf Matrizen mit maximal 2 Literalen pro Klausel beschränkt?
Welche Konsequenz hat dieses Ergebnis für die Komplexität des 2SAT Problems?

Lösung 2.1

Zum Beweis des Satzes von Löwenheim verwenden wir Teile des Vollständigkeitsbeweises für analytische Tableaux.

Es sei X eine erfüllbare Formel. Dann können wir für X ein vollständiges Tableau $\mathcal{T}$ mit der systematischen Beweismethode konstruieren. Da X erfüllbar ist, kann $\mathcal{T}$ nicht geschlossen sein, besitzt also mindestens einen Zweig ϑ, der eine Hintikka Folge ist. Wie im Vollständigkeitsbeweis gezeigt, ist ϑ damit erfüllbar durch eine Interpretation über dem Universum der Terme, also über einem abzählbaren Universum. Da X zum Zweig ϑ gehört, ist X über demselben Universum erfüllbar.

Bedeutung: Logik erster Stufe kann überabzählbare Universen nicht von abzählbaren trennen. Für alle (logischen) Aussagen, die über den reellen Zahlen nicht gelten, gibt es bereits ein abzählbares Gegenmodell (z.B. über den rationalen Zahlen).

Anmerkungen:

1. Das Argument hier ignoriert die Tatsache, daß wir Tableaux bisher nur mit signierten Formeln diskutiert haben und die Beweise nur über die Formel X^F geführt haben. Man kann aber die Vorzeichen fallen lassen (eines dabei durch Negation ersetzen) ohne daß sich das Argument des Beweises ändert.

2. Ich habe die Aussage eines Teilbeweises im Vollständigkeitsbeweis verallgemeinert. Statt

   X gültig $\Rightarrow$ X^F hat vollständiges Tableau

   benötigen wir

   für jede Formel X hat X^F hat vollständiges Tableau.

   Ein Blick auf die systematische Methode zeigt, daß die Gültigkeit für die Konstruktion des vollständiges Tableaus nicht benötigt wird.

Lösung 2.2

2.2–a $A \vee B \Rightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

Matrix-Beweis

Die Matrix wird aus dem Formelbaum aufgebaut. Dabei werden α-Submatrizen nebeneinander geschrieben, β-Submatrizen übereinander und dann werden überflüssige Klammern gestrichen. Es bleibt die folgende Matrix mit zwei Konnektionen.

$$\begin{bmatrix} A^T & A^F & B^T \\ B^T & & \end{bmatrix}$$

In der Matrix gibt es nur zwei Pfade (von links nach rechts!), die jeweils eine Konnektion enthalten. Damit ist die Formel gültig.

Tableaux-Beweis (Skizze, ohne Baumstruktur)

$A \vee B \;\Rightarrow\; \neg(\neg A \wedge \neg B)^F$	α
$\neg(\neg A \wedge \neg B)^F$	α
$A \vee B^T$	β
$\neg A \wedge \neg B^T$	α
$\neg A^T$	α
$\neg B^T$	α
A^F	
B^F	
B^T $\qquad$ B^T	
$\times$ $\qquad$ $\times$	

2.2–b $(\exists x\, \neg Px) \Rightarrow \neg(\forall x\, Px)$

Matrix-Beweis

$$\begin{bmatrix} P\ a^F & P\ x^T \end{bmatrix}$$

a ist δ-Variable, $\sigma = [a/x]$

Tableaux-Beweis

$\exists x\, \neg Px \;\Rightarrow\; \neg(\forall x\, Px)^F$	α
$\exists x\, \neg Px^T$	$\delta(a)$
$\neg(\forall x\, Px)^F$	α
$(\forall x\, Px)^T$	$\gamma(a)$
$\neg Pa^T$	α
Pa^F	
Pa^T	
$\times$	

2.2–c $(\forall xyz\; Sxy \wedge Syz \Rightarrow Gxz) \wedge (\forall xy\; Gxy \Rightarrow Sxy) \;\Rightarrow\; \forall abcd\; Sab \wedge Scd \wedge Sbd \Rightarrow (\exists u\, Gau))$

Matrix-Beweis

$$\left[\begin{array}{cccccc} \mathtt{S}xy^F & \mathtt{G}x'y'^F & \mathtt{Sab}^T & \mathtt{Scd}^T & \mathtt{Sbc}^T & \mathtt{Ga}u^F \\ \mathtt{S}yz^F & \mathtt{S}x'y'^T & & & & \\ \mathtt{G}xz^T & & & & & \end{array}\right]$$

`a,b,c,d` sind δ-Variablen, $\sigma = [\mathtt{a}/x, \mathtt{b}/y, \mathtt{c}/z, \mathtt{c}/u]$

Es gibt 6 Pfade, die durch die drei angegebenen Konnektionen komplementär gemacht werden. Dabei spielt die zweite Klausel keine Rolle, denn alle drei Literale der ersten Klausel sind mit dem Literal einer “Einerklausel” konnektiert.

P.S. in einem “sieht man direkt”-Matrixbeweis gibt man nur die Konnektionen an, die tatsächlich benötigt werden. Dann kann man die Komplementarität unter σ leicht prüfen und sieht anhand des Bildes, dass alle Pfade abgedeckt sind.

2.2–d $(\forall xyz\; Sxy \wedge Syz \Rightarrow Gxz) \wedge (\forall xy\; Gxy \Rightarrow Sxy) \;\Rightarrow\; \forall abcd\; Sab \wedge Scd \wedge Sbd \Rightarrow Gad$

Matrix-Beweis: Hier ist eine Klauselkopie erforderlich

$$\left[\begin{array}{ccccccc} \mathtt{S}x^1y^{1F} & \mathtt{S}x^2y^{2F} & \mathtt{G}x'y'^F & \mathtt{Sab}^T & \mathtt{Scd}^T & \mathtt{Sbc}^T & \mathtt{Gad}^F \\ \mathtt{S}y^1z^{1F} & \mathtt{S}y^2z^{2F} & \mathtt{S}x'y'^T & & & & \\ \mathtt{G}x^1z^{1T} & \mathtt{G}x^2z^{2T} & & & & & \end{array}\right]$$

`a,b,c,d` sind δ-Variablen, $\sigma = [\mathtt{a}/x^1, \mathtt{c}/y^1, \mathtt{d}/z^1, \mathtt{a}/x', \mathtt{c}/y'\mathtt{a}/x^2, \mathtt{b}/y^2, \mathtt{c}/z^2]$

Mit diesen Konnektionen sind alle Pfade abgedeckt

Lösung 2.3

Informal: Wenn Charles der Mörder wäre, müsste er Agatha hassen (8). Da Agatha sich selbst haßt (2) kann Charles sie nicht hassen (4).

Wenn der Butler der Mörder wäre, dann wäre Agatha reicher als er (7). Damit müsste der Buter sich selbst hassen (3). Außerdem haßt er Agatha und Charles, weil Agatha diese beiden haßt (1,2) und der Butler loyal ist (5). Damit ist Voraussetzung (6) verletzt ... der Butler mag weder Agatha, noch Charles, noch sich selbst.

Ausformuliert:

```
  Agatha hates Charles
∧ Agatha hates Agatha
∧ ∀p ¬(p is richer than Agatha) ⇒ The Butler hates p
∧ ∀p Agatha hates p ⇒ ¬(Charles hates p)
∧ ∀p Agatha hates p ⇒ The Butler hates p
∧ ∀p p likes Agatha ∨ p likes The Butler ∨ p likes Charles
∧ ∀p,q  p kills q ⇒ ¬(p is richer than q)
∧ ∀p,q  p kills q ⇒ p hates q
∧ ∀p,q  p likes q ⇔ ¬(p hates q)
⇒ ¬(The Butler kills Agatha) ∧ ¬(Charles kills Agatha)
```

Vereinfacht

```
  H(a,c)
∧ H(a,a)
∧ ∀p ¬R(p,a) ⇒ H(b,p)
∧ ∀p H(a,p)  ⇒ ¬H(c,p)
∧ ∀p H(a,p)  ⇒ H(b,p)
∧ ∀p ¬H(p,a) ∨ ¬H(p,b) ∨ ¬H(p,c)
∧ ∀p,q  K(p,q) ⇒ ¬R(p,q)
∧ ∀p,q  K(p,q) ⇒ H,p,q)
⇒ ¬K(b,a) ∧ ¬K(c,a)
```

Im Matrixbeweis muß eine Klauselkopie eingesetzt werden

$$\left[\begin{array}{cccccccccc}
\mathsf{Hac}^T & \mathsf{Haa}^T & \mathsf{R}p\mathsf{a}^T & \mathsf{Ha}p_1{}^F & \mathsf{Ha}p_2^1{}^F & \mathsf{Ha}p_2^2{}^F & \mathsf{H}p_3\mathsf{a}^F & \mathsf{K}p_4q^F & \mathsf{K}p_5q_1{}^F & \mathsf{Kba}^T \\
 & & \mathsf{Hb}p^T & \mathsf{Hc}p_1{}^F & \mathsf{Hb}p_2^1{}^T & \mathsf{Hb}p_2^2{}^T & \mathsf{H}p_3\mathsf{b}^F & \mathsf{R}p_4q^F & \mathsf{H}p_5q_1{}^T & \mathsf{Kca}^T \\
 & & & & & & \mathsf{H}p_3\mathsf{c}^F & & &
\end{array}\right]$$

Es gibt nur γ-Variablen und Konstanten, $\sigma = [\mathsf{c}/p_5, \mathsf{a}/q_1, \mathsf{a}/p_1, \mathsf{b}/p_4, \mathsf{a}/q, \mathsf{b}/p, \mathsf{b}/p_3, \mathsf{a}/p_2^1, \mathsf{c}/p_2^2]$

Lösung 2.4

Das Verfahren wird jeweils bis zum nächsten Bereinigungs- oder Rücksetzungsschritt innerhalb einer Matrix beschrieben. Indizes an den Konnektionen numerieren die Reihenfolge ihrer Anwendung.

2.4–a

$$\begin{bmatrix} \boxed{A^T} & A^F. & \boxed{A^T} \\ B^T & \boxed{B^F} & B^F. \end{bmatrix}$$

Keine weitere Extension, Bereinigung oder Rücksetzung möglich.
Nicht gültig, Gegenbeispiel $\neg A \wedge B$

2.4–b

$$\begin{bmatrix} \boxed{A^T} & A^F. & C^T. & B^F \\ B^T & \boxed{C^F} & & \end{bmatrix} \sim^2 \begin{bmatrix} A^T & A^F & C^T & B^F. \\ \boxed{B^T} & C^F & & \end{bmatrix}$$

Gültig

2.4–c

$$\begin{bmatrix} \boxed{A^T} & B^F & C^F & D^T & A^F. \\ B^T & C^T & D^F & B^F & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} A^T & B^F. & C^F. & D^T. & A^F \\ \boxed{B^T} & \boxed{C^T} & \boxed{D^F} & B^F. & \end{bmatrix}$$

Gültig

2.4–d

$$\begin{bmatrix} \boxed{A^T} & A^F. & A^F. & B^F & C^F \\ B^T & \boxed{B^F} & B^T. & A^T & A^F \\ C^T & & & & \end{bmatrix} \sim^2 \begin{bmatrix} A^T & \boxed{A^F} & A^F & B^F. & C^F \\ \boxed{B^T} & B^F. & B^T & A^T. & A^F \\ C^T & & & & \end{bmatrix} \sim^2$$

$$\begin{bmatrix} A^T & A^F & \boxed{A^F} & \boxed{B^F} & C^F \\ B^T & B^F & B^T. & A^T. & \boxed{A^F}. \\ \boxed{C^T} & & & & \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{A^F} \\ B^F \\ \end{bmatrix}$$

Keine Extension, Bereinigung oder Rücksetzung möglich.
Nicht gültig, Gegenbeispiel $A \wedge B \wedge \neg D$
Die Matrix wäre gültig, wenn in Klausel 3 ein A^T statt dem A^F stehen würde.

2.4–e

$$\begin{bmatrix} \boxed{A^F} & C^T & A^T. & B^F & C^F \\ B^T & D^F & & D^T & \\ & B^T & & & \end{bmatrix} \sim^2 \begin{bmatrix} A^F & \boxed{C^T} & A^T & B^F. & C^F. \\ \boxed{B^T} & D^F. & & \boxed{D^T} & \\ & B^T & & & \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} A^F & C^T. & A^T & B^F. & C^F \\ \boxed{B^T} & D^F. & & \boxed{D^T} & \\ & \boxed{B^T} & & & \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{A^T} & C^F \\ & \\ & \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{C^F} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Keine Extension, Bereinigung oder Rücksetzung möglich.
Nicht gültig, Gegenbeispiel $\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$
Die Matrix wäre gültig, wenn in Klausel 2 ein B^F statt dem B^T stehen würde.

2.4–f $\left[\begin{array}{cccccc} A^T & A^T . & \boxed{A^F} & A^F & B^F . & \boxed{C^F} \\ B^F & \boxed{B^T} & B^T & B^T & & \\ C^T & C^T . & C^T . & C^F & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} A^T & A^T & A^F . & A^F & B^F . & \boxed{C^F} \\ B^F & B^T & \boxed{B^T} & B^T & & \\ C^T & C^T & C^T . & C^F & & \end{array}\right]$

Gültig – 5 Schritte, wenn man richtig anfängt

Lösung 2.5

Bei der Lösung dieser Aufgabe ist zu berücksichtigen, daß Bezeichner $a, b, c, d, e..$ für Konstanten (δ-Variablen) stehen und $x, y, z, u, v, w, ..$ für (γ-)Variablen.

2.5–a $\left[\begin{array}{ccc} \boxed{Px^F} & Py^T & Pffz^T . \\ & \boxed{Pfy^F} & Pfa^T . \end{array}\right]$

Entwicklung der Substitutionen während der Beweisführung
(1) $[y/x]$
(2) $[fz/y, y/x]$ bzw. nach Einsetzen $[fz/y, fz/x]$
(3) $[fa/x, fz/y, fz/x]$ bzw. nach Auflösen $[a/z, fa/y, fa/x]$

2.5–b Erster Versuch

$$\left[\begin{array}{cccc} \boxed{Qabcd^T} & Qxyzv^F . & Qcdab^F & Qbcda^F \\ & \boxed{Qvxyz^T} & & \\ & Qzvxy^T & & \end{array}\right]$$

Der erste Schritt führt zur Substitutionen $[a/x, b/y, c/z, d/v]$. Im zweiten Schritt ist keine Extension möglich für das Literal $Qvxyz^T$, da die Anwendung der Substitution dieses in $Qdabc^T$ transformiert

Ein Kopie der zweiten Klausel mit den γ-Variablen ist erforderlich. (Alle anderen Klauseln haben nur δ-Variablen)

$$\left[\begin{array}{ccccc} \boxed{Qabcd^T} & Qxyzv^F . & Qx'y'z'v'^F & Qcdab^F & Qbcda^F \\ & Qvxyz^T & Qv'x'y'z'^T & & \\ & Qzvxy^T & Qz'v'x'y'^T & & \end{array}\right]$$

Wieder führt der erste Schritt führt zur Substitutionen $\sigma = [a/x, b/y, c/z, d/v]$, was wir der Übersicht halber direkt einsetzen.

$$\left[\begin{array}{ccccc} \boxed{Qabcd^T} & Qxyzv^F & Qx'y'z'v'^F & Qcdab^F & Qbcda^F \\ & \boxed{Qdabc^T} & Qv'x'y'z'^T & & \\ & Qcdab^T & Qz'v'x'y'^T & & \end{array}\right]$$

Im zweiten Schritt erweitert σ zu $[a/x, b/y, c/z, d/v, d/x', a/y', b/z', c/v']$, was wieder eingesetzt wird.

$$\left[\begin{array}{ccccc} \boxed{Qabcd^T} & Qabcd^F & Qdabc^F & Qcdab^F & Qbcda^F \\ & \boxed{Qdabc^T} & \boxed{Qcdab^T} & & \\ & Qcdab^T & Qbcda^T & & \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} \boxed{Qabcd^T} & Qabcd^F & Qdabc^F & Qcdab^F & Qbcda^F \\ & \boxed{Qdabc^T} & Qcdab^T & & \\ & Qcdab^T & \boxed{Qbcda^T} & & \end{array}\right] \sim^2$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} \boxed{Qabcd^T} & Qabcd^F & Qdabc^F & Qcdab^F & Qbcda^F \\ & Qdabc^T & Qcdab^T & & \\ & \boxed{Qcdab^T} & Qbcda^T & & \end{array}\right]$$

Im Verlauf der weiteren Schritte hat sich die Substitution nicht mehr verändert, so daß wir insgesamt 5 Konnektionen haben, die mit $\sigma = [a/x, b/y, c/z, d/v, d/x', a/y', b/z', c/v']$ komplementär werden.

Lösung 2.6

2.6–a Als erstes Beispiel, das gerne benutzt wurde um zu zeigen, daß Resolution schneller als die Konnektionsmethode ist, nehmen wir folgende prädikatenlogische Formel

$$\left[\begin{array}{ccc} & Px^F & Pf^8a^F \\ Pa^T & Pfx^T & \end{array}\right]$$

Das Extensionsverfahren (ohne Reduktionstechniken) würde von der mittleren Klausel insgesamt 8 Kopien ziehen müssen um den Beweis zu führen

$$\left[\begin{array}{cccccccccc} & Px^F & Px^F & Px^F & Px^F & Px^F & Px^F & Px^F & Px^F & Pf^8a^F \\ Pa^T & Pfx^T & Pfx^T & Pfx^T & Pfx^T & Pfx^T & Pfx^T & Pfx^T & Pfx^T & \end{array}\right]$$

Ersetzt man 8 durch 2^n, dann sieht man schnell, daß 2^n Kopien gezogen werden müssen, währen der Resolutionsbeweis zuerst Pf^2a^T, dann Pf^4a^T, …und schließlich $Pf^{2^n}a^T$ ableitet und hieraus die leere Klausel erzeugt.

Dies ist aber kein echtes Beispiel, da auch der Text des letzten Literals $Pf^{2^n}a^F$ exponentiell wächst und somit die Laufzeit linear bleibt. Ein echtes Beispiel muß rein aussagenlogisch sein und bis auf wenige Ausnahmen mindestens 3 Literale pro Klausel verwenden

Eine aussagenlogische Matrix, die exponentielle Laufzeit erzeugt, müsste dafür sorgen, daß in n Klauseln mindestens 2^n Pfade durchlaufen werden müssen. Wenn man pro Klausel mindestens 3 Literale verwendet, dann gibt es in jedem Extensionsschritt mindestens 2 Alternative für die weitere Verarbeitung. Durch die Gestaltung der Matrix muß nun sichergestellt werden, daß keine dieser Alternativen vor Erreichen der vollen Pfadlänge n terminiert.

Auch wenn die Grundidee relativ klar ist, ist es nicht leicht eine konkrete Matrix dieser Art zu gestalten. Es wird ziemlich schnell ersichtlich, daß man neben den n “Hauptklauseln” eine Reihe von Zwischenklauseln benötigt, die dafür sorgen, daß Pfade nicht frühzeitig abgeschlossen werden können. Wenn die Anzahl dieser Klauseln polynomiell in n ist, bleibt die Laufzeit dann insgesamt exponentiell in der Größe der Matrix.

In der Literatur gelten die sogenannten Pigeonhole Formeln als Standardbeispiel für ein schweres aussagenlogisches Beweisproblem. Sie sagen aus, daß man $n+1$ Tauben nicht in n Taubenschlägen unterbringen kann, weil ansonsten 2 Tauben im gleichen Taubenschlag sein müssen. Im der deutschen Literatur spricht man auch vom “Schubfachprinzip”.

In Logik erster Stufe mit Zahlen ist dies ein sehr einfach zu lösendes Problem. Der Beweis wird mittels Induktion geführt und ist sehr schnell durchzuführen. In der Aussagenlogik ist es jedoch ein komplexes Problem und führt zu einer Schar von Formeln $P_n, n \in \mathbb{N}$, die für ein konkretes n besagen:

> *Wenn Taube 1 sich im Taubenschlag 1 befindet oder ... Taube 1 sich im Taubenschlag n befindet, und wenn Taube 2 sich im Taubenschlag 1 befindet oder ... Taube $n+1$ sich im Taubenschlag n befindet,*
> *dann ist Taube 1 im Taubenschlag 1 und Taube 2 im Taubenschlag 1,*
> *oder Taube 1 im Taubenschlag 1 und Taube 3 im Taubenschlag 1,*
> *... oder Taube n im Taubenschlag n und Taube $n+1$ im Taubenschlag n.*

Mit $x_{i,j}$ drücken wir aus "Taubenschlag i ist durch Taube j belegt". Nach Normalisieren der obigen Aussage ergibt sich dann die folgende Matrix

$$\begin{bmatrix}
x_{1,1}{}^T & x_{1,2}{}^T & \cdots x_{1,n+1}{}^T & & & & & & & & & & \\
x_{2,1}{}^T & x_{2,2}{}^T & & x_{1,1}{}^F & x_{1,1}{}^F & \cdots & x_{1,2}{}^F & x_{1,2}{}^F & \cdots & x_{1,n}{}^F & x_{2,1}{}^F & \cdots & \cdots & x_{n,n}{}^F \\
\vdots & \vdots & \vdots & x_{1,2}{}^F & x_{1,3}{}^F & \cdots & x_{1,3}{}^F & x_{1,4}{}^F & \cdots & x_{1,n+1}{}^F & x_{2,2}{}^F & \cdots & \cdots & x_{n,n+1}{}^F \\
x_{n,1}{}^T & x_{n,2}{}^T & \cdots x_{n,n+1}{}^T & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}$$

Die Matrix hat $n(n+1)$ Variablen und $n+1+\frac{n^3+n^2}{2}$ Klauseln.

Um den in $x_{1,1}{}^T$ beginnenden Pfad zu schließen, müssen in jedem Schritt eine der Zweierklauseln und aus diesem eine neue (!) n-Klausel angesteuert werden. In der Zweierklausel gibt es genau eine Möglichkeit, aber in der konnektierten n-Klausel fallen jeweils $n-1$ Alternativen an. Da alle mit T markierten Klauseln durchlaufen werden müssen, fallen insgesamt $\mathcal{O}(n^n)$ Konnektionen an, die das Extensionsverfahren untersucht. Damit ist die Laufzeit insgesamt exponentiell.

2.6–b Wenn die Matrix maximal 2 Literalen pro Klausel besitzt, dann wird das Extensionsverfahren in jedem Schritt (mindestens) ein Literal einer neuen Klausel konnektieren und das ggf. verbleibende Literal zum aktuellen Pfad hinzufügen. Weitere Alternativen gibt es nicht. Der erste Bereinigungsschritt wird somit (iterativ) den gesamten aktuellen Pfad bis zur Startklausel zurückbauen.

Bei insgesamt n Klauseln wird das Verfahren in maximal n Schritten den im Startliteral beginnenden Pfad abgeschlossen oder ein Gegenbeispiel gefunden haben. Bei maximal 2 Startliteralen fallen also (einschließlich Bereinigungsschritten) maximal $4n$ Schritte an, d.h. die Gültigkeit von M kann in linearer Zeit (relativ zur Anzahl der Klauseln) bewiesen werden.

Im Gegensatz zum $\mathcal{NP}$-vollständigen 3SAT liegt 2SAT in $\mathcal{P}$ oder genauer in $\mathcal{O}(n)$.