Übung zur Vorlesung

Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2015

Blatt 3 — Abgabetermin: 12. Juni 2015

Aufgabe 3.1 (Unifikation)

Seien f,g,h Funktionszeichen, a,c Konstanten und x,y,z Variablen.

Versuchen Sie, die folgenden Termpaare mit Hilfe des Herbrand-Robinson-Algorithmus zu unifizieren. Stellen Sie diesen Vorgang tabellarisch dar.

3.1–a $g(fx,a,x)$ und $g(y,z,z)$

3.1–b $g(y,hx,ha)$ und $g(c,hhy,x)$

3.1–c $g(g(hx,y),z)$ und $g(z,g(y,ha))$

3.1–d $g(g(g(z,a),z),z)$ und $g(g(x,y),x)$

Versuchen Sie, die folgenden Termpaare mit Hilfe des Martelli-Montanari-Algorithmus zu unifizieren. Stellen Sie den Vorgang schrittweise unter Angabe der verwendeten Umformungsregeln dar.

3.1–e $g(ha,hhy)$ und $g(x,hx)$

3.1–f $f(hy,gya,hx)$ und $f(x,gza,hz)$

3.1–g $f(gxy,ha,z)$ und $f(z,y,gca)$

Aufgabe 3.2 (Komplexität von Beweisverfahren)

Wie stark würde ein Beweisverfahren beschleunigt werden, wenn man anstelle des im schlimmsten Fall exponentiellen Robinson Unifikationsalgorithmus ein Unifikationsverfahren programmieren könnte, das in jeder Situation in genau einem Schritt den allgemeinsten Unifikator bestimmt oder Nichtunifizierbarkeit feststellt?

Aufgabe 3.3 (Reduktionen)

Wenden Sie die Reduktionen MULT, PURE, TAUT, SUBS, UNIT, ISOL auf die folgende Matrix solange an, bis diese nicht weiter reduziert werden kann.

$$\begin{bmatrix} C^T & C^F & C^F & A^F & D^F & D^T & F^F & H^F & D^T & H^F & C^F \\ A^T & D^T & F^T & H^F & C^F & E^F & A^T & A^T & C^T & C^F & D^T \\ & H^F & & & A^T & & & & & E^T & \\ & & & & H^T & & & & & & \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.4 (Davis-Putnam Verfahren)

Zeigen Sie mit dem Davis-Putnam-Verfahren, daß die folgende Matrix allgemeingültig ist.

$$\begin{bmatrix} A^F & A^T & A^T & A^F & A^T & A^F \\ B^F & B^T & B^F & B^T & B^T & B^T \\ & C^T & & C^T & C^F & C^F \end{bmatrix}$$

Lösung 3.1

3.1–a

Nr.	$DIFF(s\sigma, t\sigma)$	σ
0	$\{\{f(x), y\},\ \{a, z\},\ \{x, z\}\}$	$[]$
1	$\{\{a, z\},\ \{x, z\}\}$	$[f(x)/y]$
2	$\{\{x, a\}\}$	$[f(x)/y, a/z]$
3	$\{\}$	$[f(a)/y, a/z, a/x]$

Erfolg: als Unifikator ergibt sich: $[f(a)/y, a/z, a/x]$.

3.1–b

Nr.	$DIFF(s\sigma, t\sigma)$	σ
0	$\{\{x, h(y)\},\ \{y, c\},\ \{h(a), x\}\}$	$[]$
1	$\{\{y, c\},\ \{a, y\}\}$	$[h(y)/x]$
2	$\{\{a, c\}\}$	$[h(c)/x, c/y]$

Die vorhandene Differenz ist nicht verhandelbar (2 Konstanten).

3.1–c

Nr.	$DIFF(s\sigma, t\sigma)$	σ
0	$\{\{g(h(x), y), z\},\ \{z, g(y, h(a))\}\}$	$[]$
1	$\{\{h(x), y\},\ \{y, h(a)\}\}$	$[g(h(x), y)/z]\}$
2	$\{\{x, a\}\}$	$[g(h(x), h(x))/z, h(x)/y]$
3	$\{\}$	$[g(h(a), h(a))/z, h(a)/y, a/x]$

Erfolg: als Unifikator ergibt sich: $[[g(h(a), h(a))/z, h(a)/y, a/x]$.

3.1–d

Nr.	$DIFF(s\sigma, t\sigma)$	σ
0	$\{\{g(z, a), x\},\ \{z, y\},\ \{z, x\}\}$	$[]$
1	$\{\{z, y\},\ \{z, g(z, a)\}\}$	$[g(z, a)/x]$
2	$\{\{y, g(y, a)\}\}$	$[g(y, a)/x, y/z]$

Die vorhandene Differenz ist nicht verhandelbar (Occurs check).

3.1–e

	$g(ha, hhy)$ und $g(x, hx)$	
	$\{g(h(a), h(h(y))) \doteq g(x, h(x))\}$,	ϵ
TD	$\{h(a) \doteq x,\ h(h(y)) \doteq h(x)\}$	ϵ
VE$_u$	$\{h(h(y)) \doteq h(h(a))\}$	$[h(a)/x]$
TD	$\{h(y) \doteq h(a)\}$	$[h(a)/x]$
TD	$\{y \doteq a\}$	$[h(a)/x]$
VE	$\{\}$	$[h(a)/x,\ a/y]$

Ziel ist erreicht (Gleichungsmenge ist leer). Als Unifikator ergibt sich: $[h(a)/x, a/y]$.

3.1–f

	$f(hy, gya, hx)$ und $f(x, gza, hz)$	
	$\{f(h(y), g(y, a), h(x)) \doteq f(x, g(z, a), h(z))\}$,	ϵ
TD	$\{h(y) \doteq x,\ g(y, a) \doteq g(z, a),\ h(x) \doteq h(z)\}$,	ϵ
VE$_u$	$\{g(y, a) \doteq g(z, a),\ h(h(y)) \doteq h(z)\}$,	$[h(y)/x]$
TD	$\{y \doteq z,\ a \doteq a,\ h(h(y)) \doteq h(z)\}$,	$[h(y)/x]$
VE	$\{a \doteq a,\ h(h(z)) \doteq h(z)\}$,	$[h(z)/x, z/y]$
TD	$\{h(h(z)) \doteq h(z)\}$,	$[h(z)/x, z/y]$
TD	$\{h(z) \doteq z\}$,	$[h(z)/x, z/y]$

VE$_u$ ist nicht anwendbar wegen $z \in h(z)$. Verfahren endet, weil keine der vier Regeln anwendbar ist. Gleichungsmenge ist nicht leer. Die beiden Terme sind nicht unifizierbar.

3.1–g

$f(gxy, ha, z)$ und $f(z, y, gca)$		
	$\{f(g(x,y),h(a),z)\dot{=}f(z,y,g(c,a))\}$,	ϵ
TD	$\{g(x,y)\dot{=}z,\ h(a)\dot{=}y,\ z\dot{=}g(c,a)\}$	ϵ
VE$_u$	$\{h(a)\dot{=}y,\ g(x,y)\dot{=}g(c,a)\}$	$[g(x,y)/z]$
VE$_u$	$\{g(x,h(a))\dot{=}g(c,a)\}$	$[g(x,h(a))/z,\ h(a)/y]$
TD	$\{(x\dot{=}c,\ h(a)\dot{=}a\}$	$[g(x,h(a))/z,\ h(a)/y]$
VE	$\{(h(a)\dot{=}a\}$	$[g(c,h(a))/z,\ h(a)/y,\ c/x]$

Keine der ier Regeln ist anwendbar (a ist Konstante, also nullstellige Funktion). Verfahren endet ohne Erfolg. Die beiden Terme sind nicht unifizierbar.

Lösung 3.2

Ein Beweisverfahren führt in nahezu jedem Schritt Unifikationen durch und dabei sind die konnektierten Literale unter der bisherigen Substitution entwerder identisch oder nicht unifizierbar. Beides stellt der Robinson Unifikationsalgorithmus in wenigen Schritten fest und deshalb hat er im Mittelwert über alle Unifikationsversuche des Beweisverfahrens konstante Laufzeit.

Eine Reduktion auf genau einen Schritt wird also nur eine Beschleunigung des Verfahrens um einen (kleinen) konstanten Faktor mit sich bringen. Im Verhältnis zu Reduktionsverfahren und guten Suchstrategien, die Beschleunigungen um Faktoren wie 10^{10} erzielen (durch frühzeitige Begrenzung des Suchraums) ist dieser Effekt vernachlässigbar.

Lösung 3.3

$$\left[\begin{array}{ccccccccccc}
C^F & C^T & A^F & C^F & D^F & F^F & D^T & H^F & D^T & H^F & C^F \\
D^T & A^T & H^F & F^T & C^F & A^T & E^F & A^T & C^T & C^F & D^T \\
H^F & & & & A^T & & & & & E^T & \\
 & & & & H^T & & & & & &
\end{array}\right] \vdash_{ISOL(F),ISOL(E)}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc}
C^F & C^T & A^F & C^F & D^F & D^T & H^F & D^T & C^F \\
D^T & A^T & H^F & A^T & C^F & H^F & A^T & C^T & D^T \\
H^F & & & & A^T & C^F & & & \\
 & & & & H^T & & & &
\end{array}\right] \vdash_{SUBS,SUBS}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
C^F & C^T & A^F & C^F & H^F & D^T & C^F \\
D^T & A^T & H^F & A^T & A^T & C^T & D^T \\
H^F & & & & & &
\end{array}\right] \vdash_{PURE(\neg D)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc}
C^T & A^F & C^F & H^F \\
A^T & H^F & A^T & A^T
\end{array}\right] \vdash_{ISOL(C),MULT}$$

$$\left[\begin{array}{ccc}
A^T & A^F & H^F \\
 & H^F & A^T
\end{array}\right] \vdash_{PURE(H)} \qquad \left[\begin{array}{c} A^T \end{array}\right] \vdash_{PURE(A)} \qquad \left[\quad\right]$$

Das Endergebnis "leere Matrix" bedeutet, daß die Formel nicht gültig ist.

Lösung 3.4

$$\begin{bmatrix} A^F & A^T & A^T & A^F & A^T & A^F \\ B^F & B^T & B^F & B^T & B^T & B^T \\ & C^T & & C^T & C^F & C^F \end{bmatrix} \vdash_{SPLIT(A)}$$

Fall 1:

$$\begin{bmatrix} B^T & B^F & B^T \\ C^T & & C^F \end{bmatrix} \vdash_{UNIT(B),UNIT(C)} \begin{bmatrix} \Box & B^F & C^F \end{bmatrix}$$

Fall 2:

$$\begin{bmatrix} B^F & B^T & B^T \\ & C^T & C^F \end{bmatrix} \vdash_{UNIT(B),UNIT(C)} \begin{bmatrix} B^F & \Box & C^F \end{bmatrix}$$

In beiden Fällen enthält die Matrix eine leere Klausel. Dies bedeutet, daß die Formel gültig ist.