

Inferenzmethoden

Prof. Chr. Kreitz

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2015

Blatt 5 — Abgabetermin: (17. Juli 2015)

Aufgabe 5.1 (Modallogik)

1. Die Erreichbarkeitsrelation R einer Modallogik ist *seriell*, wenn es zu jeder Welt w_1 eine Welt w_2 mit $w_1 R w_2$ gibt. Zeigen Sie, daß für serielle Erreichbarkeitsrelationen das Axiom $\neg \Box \text{ff}$ gilt.
2. Zeigen Sie, daß in einer Modallogik mit einer transitiven Erreichbarkeitsrelation das Axiom der positiven Introspektion $\Box A \Rightarrow \Box \Box A$ gilt.

Aufgabe 5.2 (Gleichheitskonnektionen)

Es sei \circ eine zweistellige Funktion. Repräsentieren Sie die folgenden Formeln als Matrix und beweisen Sie diese mit Hilfe des Extensionsverfahrens (a) unter Hinzunahme benötigter Gleichheitsaxiome bzw. (b) unter Verwendung von Gleichheitskonnektionen.

$$(\forall x Px \vee Qx) \wedge \neg Pa \wedge a \doteq b \Rightarrow Qb \quad (1)$$

$$Pa \wedge a \doteq fb \wedge (\forall x Px \Rightarrow Pfx) \Rightarrow Pfffb \quad (2)$$

$$f(a, b) \doteq c \wedge (\forall xy f(x, y) \doteq f(y, x)) \wedge (\forall z f(c, z) \doteq b) \Rightarrow f(a, f(b, a)) \doteq b \quad (3)$$

$$(\forall xyz x \circ y \doteq y \circ x \wedge z \circ e_1 \doteq z \wedge z \circ e_2 \doteq z) \Rightarrow e_1 \doteq e_2 \quad (4)$$

Aufgabe 5.3 (Induktion)

Die folgende Formel G formalisiert die Aussage, daß jede natürliche Zahl gerade oder ungerade ist:

$$G =_{df} [\text{even}(0) \wedge \forall x(\text{even}(x) \Rightarrow \text{odd}(x')) \\ \wedge \forall x(\text{even}(x) \Rightarrow \text{even}(x'')) \wedge \forall x(\text{odd}(x) \Rightarrow \text{odd}(x'')) \\] \Rightarrow \forall x(\text{even}(x) \vee \text{odd}(x))$$

Dabei realisiert $'$ die Nachfolgerfunktion. Weiterhin soll ein erweitertes Induktionsschema mit zwei Basisfällen $P[0/x] \wedge P[0'/x] \wedge \forall y(P[y/x] \Rightarrow P[y''/x]) \Rightarrow \forall x P$ (ohne die Vorbedingung, daß es sich immer um natürliche Zahlen handeln muß) verwendet werden. Geben Sie eine geeignete Instantiierung des Induktionsschemas an und führen Sie mit deren Hilfe einen Konnektionsbeweis der Formel G aus. Dabei sollte P *nicht* mit G instantiiert werden.

Aufgabe 5.4 (Theoriekonnektionen mit Rewriting)

Beweisen Sie die folgende Matrix mit Hilfe des Extensionsverfahrens. Hierbei sei in dem zu verwendenden Unifikationsalgorithmus die Gruppentheorie mit Hilfe von *lazy narrowing* eingebaut. Geben Sie bei der Darstellung ihrer Lösung die Theoriekonnektionen und die zugehörigen Substitutionen an. In den Fällen, in denen zur Unifikation *lazy narrowing* eingesetzt wird, sind die benötigten Schritte aufzuführen. Verwenden Sie die in der Vorlesung angegebenen Reduktionsregeln für die Gruppentheorie.

$$\left[\begin{array}{cccc} P(u, v, b)^T & P(\overline{(a \cdot b)} \cdot ((a \cdot b) \cdot c), b, b)^F & Q(w, x, y)^F & R(z \cdot (\bar{c} \cdot c), z \cdot (\bar{z} \cdot b))^F \\ Q(f(u), u, v)^T & & R(x, y)^T & \end{array} \right]$$

Aufgabe 5.5 (Vervollständigung von Termersetzungssystemen)

Wandeln Sie das folgende Gleichungssystem in ein Termersetzungssystem um. Wenden Sie auf dieses Termersetzungssystem das Knuth-Bendix-Verfahren solange an, bis Sie ein vollständiges Regelsystem erhalten haben (oder bis Sie mehr als sechs neue Reduktionsregeln erzeugt haben).

$$\begin{aligned} \emptyset &= x \cup x \\ x \cup (x \cap y) &= y \\ x &= (x \odot y) \cup y \\ y &= x \cap (x \cup y) \\ (x \cup y) \odot y &= x \end{aligned}$$

Aufgabe 5.6 (Rückblick)

Die folgenden Aufgabe sind vorgesehen als Kontrollfragen zur Überprüfung des eigenen Kenntnisstandes. Sie entsprechen in ihrer Thematik dem Spektrum einer mündlichen Prüfung. Die Antworten sind größtenteils auf den Folien zu finden, allerdings nur selten an auffälliger Stelle. Versuchen sie, diese zunächst ohne Ihre Unterlagen zu beantworten.

1. Nennen Sie die drei Grundbestandteile eines formalen Kalküls.
2. Wodurch wird in der Prädikatenlogik den Zusammenhang zwischen einer Formel und ihrer Bedeutung hergestellt?
3. Erklären Sie die Refinement Regel . . . und begründen Sie ihre Korrektheit
4. Wann ist eine logische Formel gültig, erfüllbar oder widerlegbar?
5. Beweisen Sie die Formel mithilfe der Refinement Logik.
6. Bestimmen Sie das Resultat der Substitution
7. *Erklären Sie den Unterschied zwischen Gültigkeit und Erfüllbarkeit*
8. Erklären Sie den Unterschied zwischen Korrektheit und Vollständigkeit eines Kalküls für die Prädikatenlogik.
9. Was unterscheidet synthetische und analytische Kalküle?
10. Erklären Sie die Arbeitsweise des Tableauxkalküls (grundsätzliche Methodik, Regeln, Abschlußbedingung – am besten anhand eines Beispiels).
11. *Was ist eine Hintikka-Folge und wozu braucht man den Begriff?*
12. Wie würden Sie die Korrektheit des Tableauxkalküls beweisen?
13. Wie würden Sie die Vollständigkeit des Tableauxkalküls beweisen?
14. *Erklären Sie den Zusammenhang zwischen signierten Formeln des Tableauxkalküls und dem Vorkommen von Formeln innerhalb einer Sequenz*
15. Inwiefern sind Tableauxbeweise Verdichtungen von Sequenzenbeweisen
16. Beweisen Sie die Formel $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \Rightarrow P$ mit dem Sequenzenkalkül (Refinement Logic), Tableauxverfahren, Extensionsverfahren, Resolution und dem Davis-Putnam Verfahren.
17. Erklären Sie die Matrixcharakterisierung für logische Gültigkeit. Was ist ein Pfad, Komplementarität, Multiplizität, induzierte Reduktionsordnung? Illustrieren Sie diese Konzepte anhand eines einfachen Beispiels.
18. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Matrixbeweisen und Tableauxbeweisen?
19. Inwiefern sind Matrixbeweise Verdichtungen von Tableauxbeweisen
20. Wie kann die Matrixcharakterisierung für logische Gültigkeit mit verhältnismäßig geringen Aufwand bewiesen werden?

21. Welche Information liefert ein fehlgeschlagener Extensionsbeweis für eine aussagenlogische Formel?
22. Erklären Sie den Zusammenhang zwischen einer zweidimensionalen Matrix und einem Formelbaum.
23. Erklären Sie Vor- und Nachteile von Normalformen bei der Beweisführung
24. Erklären Sie die grundsätzliche Vorgehensweise eines (beliebigen) Matrixbeweisers von der Eingabe der Formel bis zum fertigen Beweis.
25. Erklären Sie das Extensionsverfahren (Extensions-, Bereinigungs-, Rücksetzungs-, Separationsschritt, Verfahren) für Hornlogik, allgemeine Aussagenlogik und Prädikatenlogik.
26. Inwiefern sind Beweise mit dem Extensionsverfahren Verdichtungen von Matrixbeweisen?
27. Warum hat jede gültige (Normalform)-Matrix immer eine rein negative und eine rein positive Klausel?
28. Wie kann man das Extensionsverfahren zur Erzeugung von Gegenbeispielen für ungültige Formeln verwenden?
29. Was ist ein allgemeinster Unifikator?
30. Welche Verfahren gibt es zur Unifikation von Termen? Beschreiben Sie beide.
31. Wodurch erreicht das Verfahren von Martelli-Montanari fast-lineare Komplexität?
32. Welchen Zweck hat der Occurs-Check und wie wirkt sich dieser auf die Komplexität der Verfahren aus?
33. Unifizieren Sie $f(gxy, hab)$ mit $f(gya, hxz)$ mit beiden Unifikationsverfahren.
34. Welche Komplexität haben die Unifikationsverfahren im Mittel über alle Schritte einer formalen Beweissuche? Begründen Sie Ihre Aussage.
35. Beschreiben Sie wichtigsten Reduktionstechniken für Normalformmatrizen.
36. Warum ist eine Reduktion, die Klauseln aus einer Matrix entfernt, gültigkeitserhaltend?
37. Beschreiben Sie ein lineares Beweisverfahren für Hornklauseln, das nur auf Reduktionen aufbaut.
38. Was ist die bestmögliche (Worst-Case) Komplexität eines reduktionsbasierten Beweisverfahrens auf Horn-Formeln bzw. auf voller Aussagenlogik?
39. Beschreiben und illustrieren Sie das Verfahren von Davis & Putnam.
40. Was ist *lean theorem proving*? Welche Vorteile hat dieser Ansatz gegenüber anderen Implementierungen von Theorembeweisern?
41. Was ändert sich am Extensionsverfahren, wenn Nichtnormalformmatrizen verwendet werden. Illustrieren Sie die Arbeitsweise des Verfahrens an einem Beispiel und erklären Sie die vorkommenden Konzepte.
42. Nennen Sie zwei Vorteile des Extensionsverfahren für Nicht-Normalform Matrizen gegenüber dem Normalformverfahren
43. Welches fundamentale Gesetz der klassischen Logik ist intuitionistisch nicht allgemeingültig? Warum?
44. Beschreiben Sie die Matrixcharakterisierung für die intuitionistische Gültigkeit logischer Formeln und erklären Sie kurz den Begriff des intuitionistischen Präfixes.
45. Welche Erweiterungen sind nötig, um das Extensionsverfahren auf konstruktive Logik anwendbar zu machen? Erklären Sie die neu vorkommenden Konzepte.
46. Illustrieren Sie den Unterschied zwischen klassischer und konstruktiver Logik anhand der zugehörigen klassischen und intuitionistischen Matrixbeweise für $P \Rightarrow P$ und $\neg P \vee P$.
47. Unifizieren Sie die Präfix-Strings $aBCdEf$ und $agHiJ$ informal und mit dem Unifikationsalgorithmus.

48. Wodurch unterscheiden sich Modallogiken von der klassischen Logik?
49. Erklären und illustrieren Sie die Semantik von Modallogiken.
50. Was unterscheidet die Modallogiken K,D,T,S4 und S5?
51. Warum ist in einer Modallogik die Aussage $\vdash F$ üblicherweise stärker als $\vdash \Box F$?
52. Welche Erweiterungen sind nötig, um das Extensionsverfahren auf Modallogiken anwendbar zu machen?
53. Was ist der zentrale Unterschied zwischen linearer Logik und klassischer Logik? Illustrieren Sie diesen an einem einfachen Beispiel.
54. Welche Erweiterungen sind nötig, um das Extensionsverfahren auf Lineare Logik anwendbar zu machen?
55. Wodurch unterscheidet sich Logik höherer Stufe von der üblichen Prädikatenlogik?
56. Wie kann man in Logik höherer Stufe Konzepte wie Gleichheit, Zahlen und logische Falschheit nur mit \Rightarrow , \forall und λ definieren
57. Auf welche Arten kann man Gleichheit in Beweisverfahren behandeln?
58. Auf welche Arten kann man Induktion in Beweisverfahren behandeln?
59. Warum kann das Standardschema der Induktion nicht als Axiom der Prädikatenlogik erster Stufe formuliert werden?
60. Was ist Rewriting und Narrowing?
61. Was ist Konfluenz und starke Normalisierbarkeit bei Termersetzungssystemen?
62. Wie kann man ein Regelsystem so vervollständigen, daß es eine Menge von Gleichungen vollständig repräsentiert?
63. Wie kann man Termersetzung in Beweisverfahren integrieren?