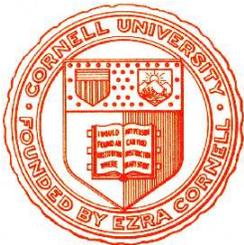


# Theoretische Informatik II

## Einheit 5.4

### Elementare Berechenbarkeitstheorie I: Grundkonzepte und ihre Eigenschaften



1. Grundgesetze der Berechenbarkeit
2. Berechenbarkeit, Aufzählbarkeit  
und Entscheidbarkeit
3. Abschlußeigenschaften

- **Es gibt viele Fragen zur Berechenbarkeit**
  - Welche Funktionen sind berechenbar und welche nicht?
  - Welche Probleme sind (semi-)entscheidbar und welche nicht?
  - Abschlußeigenschaften: wie kann man Lösungen wiederverwenden?
  - Grenzen des Machbaren: was ist nicht mehr berechenbar?  
Wie kann man nachweisen, daß ein Problem nicht lösbar ist?
- **Antworten hängen nicht vom Berechnungsmodell ab**
  - Berechenbarkeit, (semi-)Entscheidbarkeit, (Zeit-/Platz)Komplexität sind allgemeine Konzepte
- **Löse Theorie von Betrachtung konkreter Modelle**
  - Formuliere Grundeigenschaften (**Axiome**) berechenbarer Funktionen
  - Beweise diese Eigenschaften mit einem Modell (Turingmaschine)
  - Stütze alle Beweise für Aussagen nur noch auf diese Eigenschaften denn sie gelten für alle gleichmächtigen Berechnungsmodelle

# FORMULIERE THEORIE BERECHENBARER FUNKTIONEN

- **Es reicht berechenbare Funktionen zu betrachten**
  - (Semi-)Entscheidbarkeit einer Menge ist äquivalent zur Berechenbarkeit ihrer (partiell-)charakteristischen Funktion
- **Es reicht Berechenbarkeit auf Zahlen zu betrachten**
  - Berechenbarkeitskonzepte auf Wörtern und Zahlen sind gleichwertig
    - Zahlen kann man als Wörter (binär oder anders) codieren
    - Wörter über einem Alphabet kann man systematisch numerieren
  - Es ist meist leichter, mit Zahlen zu arbeiten (z.B. Rechenzeit)
  - Programme und Daten sind als Zahlen codierbar
- **Es reicht einstellige Funktionen auf  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  zu betrachten**
  - Funktionen auf Zahlenpaaren und -listen sind einstellig simulierbar
    - z.B. ist  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  durch  $f': \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f' \langle i, j \rangle := f(i, j)$  simulierbar

**Liefert allgemeine Theorie der Berechenbarkeit**

# BERECHENBARE FUNKTIONEN LASSEN SICH AUFZÄHLEN

## • Turingmaschinen sind als Wörter codierbar

- Es reicht, Turingmaschinen mit  $\Gamma = \{0, 1, B\}$  und  $F = \{q_1\}$  zu betrachten
- Definiere  $code(\delta(q, X)) \equiv q X p Y D$ , falls  $\delta(q, X) = (p, Y, D)$  ( $\epsilon$  sonst)
- Codiere die Maschine  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$  durch das Wort  
 $code(\delta(q_0, 0)) code(\delta(q_0, 1)) code(\delta(q_0, B)) \dots code(\delta(q_n, B))$
- Codiere Alphabet  $\{q_0, \dots, q_n, 0, 1, B, L, R\}$  als Wörter über  $\Delta = \{0, 1\}$

## • Wörter über einem Alphabet sind numerierbar

- Bestimme **lexikographische Ordnung** der Wörter über  $\Delta = \{x_1, \dots, x_n\}$   
 $\epsilon < x_1 < \dots < x_n < x_1x_1 < x_1x_2 < \dots < x_nx_n < x_1x_1x_1 < \dots$
- Zähle entsprechend durch:  $w_0 := \epsilon$ ,  $w_1 := x_1$ , ..  $w_n := x_n$ ,  $w_{n+1} := x_1x_1, \dots$

## • Turingmaschinen sind (bijektiv) numerierbar

- Zähle Wörter über  $\Delta$  auf und teste, ob sie Turingmaschinen codieren
- $M_i$  ist die Turingmaschine, deren Codierung an  $i$ -ter Stelle erscheint
- Die Nummer  $i$  wird auch die **Gödelnummer** von  $M_i$  genannt

# NUMERIERUNG VON TM LIEFERT ZWEI KERNAXIOME

- **Definiere Numerierung berechenbarer Funktionen:**

- $\varphi_i$  ist die von  $M_i$  berechnete (partielle) Funktion auf  $\mathbb{N}$

- $\varphi(i) := \varphi_i := r_b^{-1} \circ f_{M_i} \circ r_b$ , wobei  $r_b: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$  Binärcodierung von  $\mathbb{N}$

- $\Phi_i$  ist die zugehörige Schrittzahlfunktion von  $M_i$

- $\Phi(i)(n) := \Phi_i(n) := t_{M_i}(r_b(n))$

- **$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$  is surjektiv, aber nicht bijektiv**

- Jede programmierbare Funktion hat einen Index

- Jede berechenbare Funktion hat unendlich viele Programme

# NUMERIERUNG VON TM LIEFERT ZWEI KERNAXIOME

- **Definiere Numerierung berechenbarer Funktionen:**

- $\varphi_i$  ist die von  $M_i$  berechnete (partielle) Funktion auf  $\mathbb{N}$ 
  - $\varphi(i) := \varphi_i := r_b^{-1} \circ f_{M_i} \circ r_b$ , wobei  $r_b: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$  Binärcodierung von  $\mathbb{N}$
- $\Phi_i$  ist die zugehörige Schrittzahlfunktion von  $M_i$ 
  - $\Phi(i)(n) := \Phi_i(n) := t_{M_i}(r_b(n))$

- $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$  is surjektiv, aber nicht bijektiv

- Jede programmierbare Funktion hat einen Index
- Jede berechenbare Funktion hat unendlich viele Programme

- **Axiom 1: Für alle  $i$  gilt  $\text{domain}(\Phi_i) = \text{domain}(\varphi_i)$**

- Per Konstruktion ist  $\Phi_i$  auf den gleichen Eingaben definiert wie  $\varphi_i$

- **Axiom 2:  $\{\langle i, n, t \rangle \mid \Phi_i(n) = t\}$  ist entscheidbar**

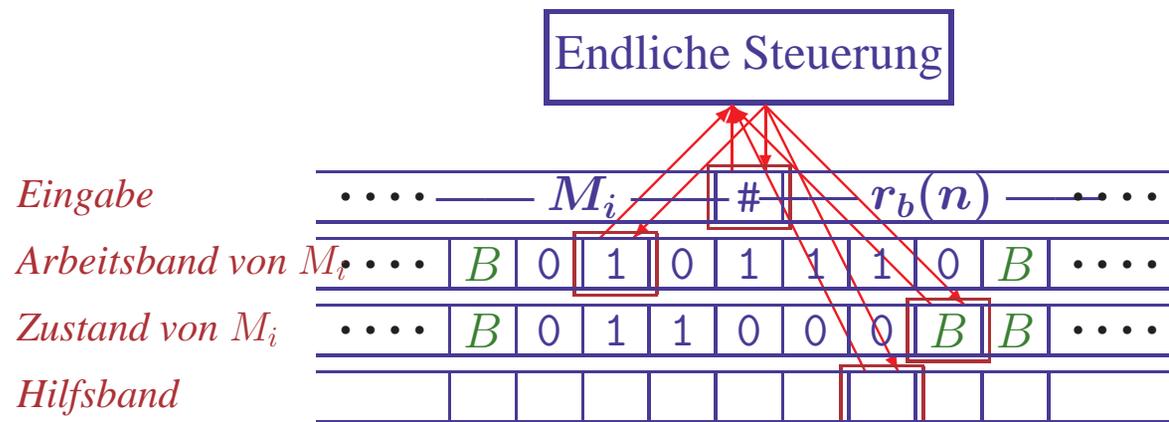
- Simuliere Ausführung von  $\varphi_i(n)$  für maximal  $t$  Schritte
- Implementierung benutzt Variante der universellen Maschine (s.u.)

## Axiom 3: DIE UNIVERSELLE FUNKTION IST BERECHENBAR

$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $u \langle i, n \rangle = \varphi_i(n)$  ist berechenbar (UTM Theorem)

## Axiom 3: DIE UNIVERSELLE FUNKTION IST BERECHENBAR

$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $u \langle i, n \rangle = \varphi_i(n)$  ist berechenbar (UTM Theorem)



### • Benutze 3 Arbeitsbänder + Hilfsbänder

- Programmnummer  $i$  und Eingabewert  $n$ , binär codiert
- Arbeitsband von  $M_i$
- Aktueller Zustand von  $M_i$  (auf Band, da Anzahl der Zustände nicht limitiert)

### • Generiere und simuliere Programm von $M_i$

- Generiere das Wort, das  $M_i$  über  $\Delta$  codiert; schreibe es auf Band 1
- Kopiere  $r_b(n)$  auf Band 2 und schreibe  $q_0$  auf Band 3
- **Simuliere Einzelschritte** von  $M_i$  durch Aufsuchen der Befehle auf Band 1
- Terminiert  $M_i$  (Zustand  $q_1$ ), kopiere die Ausgabe von Band 2 auf Band 1

## Axiom 4: PROGRAMME SIND EFFEKTIV KOMBINIERBAR

**Es gibt eine berechenbare totale Funktion  $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$  mit**  
 **$\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n,i\rangle$  für alle  $m, n, i \in \mathbb{N}$  (SMN Theorem)**  
Technisches Lemma ohne gute Intuition

## Axiom 4: PROGRAMME SIND EFFEKTIV KOMBINIERBAR

Es gibt eine berechenbare totale Funktion  $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  
 $\varphi_{s\langle m, n \rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i \rangle$  für alle  $m, n, i \in \mathbb{N}$  (SMN Theorem)  
Technisches Lemma ohne gute Intuition

- **Konstruiere eine Turingmaschine  $M$  für  $s$ :**
  - Auf dem Eingabeband stehe die Codierung einer Zahl  $\langle m, n \rangle$
  - Konstruiere auf Hilfsband 1 die Codierung der  $m$ -ten Turingmaschine  $M_m$
  - Konstruiere auf Hilfsband 2 die Codierung einer Maschine  $M_{\diamond}$ ,  
welche bei Eingabe einer Zahl  $i$  den Wert  $f_{M_{\diamond}}(i) = \langle n, i \rangle$  berechnet.
  - Konstruiere auf Hilfsband 3 den Code einer Maschine, die bei Eingabe  
einer Zahl  $i$  zunächst  $M_{\diamond}$  simuliert und  $M_m$  auf das Ergebnis anwendet.
  - Berechne die Gödelnummer der so aus  $\langle m, n \rangle$  konstruierten Maschine
- **Setze  $s := f_M$** 
  - Per Konstruktion ist die Funktion  $s$  berechenbar
  - $s$  ist total, weil  $M$  für jede Eingabe  $\langle m, n \rangle$  ein Ergebnis produziert
  - Es gilt  $\varphi_{s\langle m, n \rangle}(i) = f_{M_m}(f_{M_{\diamond}}(i)) = \varphi_m\langle n, i \rangle$

# KONSEQUENZEN DES SMN THEOREMS

**Programme sind fast beliebig ineinander übersetzbar**

# KONSEQUENZEN DES SMN THEOREMS

## Programme sind fast beliebig ineinander übersetzbar

- Für jede berechenbare Funktion  $f$  gibt es ein  $h \in \mathcal{TR}$  mit  $\varphi_{h(n)}(i) = f\langle n, i \rangle$  für alle  $n, i \in \mathbb{N}$

**Beweis:** wenn  $f = \varphi_m$  ist, so wähle  $h(n) := s\langle m, n \rangle$

## Programme sind fast beliebig ineinander übersetzbar

- **Für jede berechenbare Funktion  $f$  gibt es ein  $h \in \mathcal{TR}$  mit  $\varphi_{h(n)}(i) = f\langle n, i \rangle$  für alle  $n, i \in \mathbb{N}$**

**Beweis:** wenn  $f = \varphi_m$  ist, so wähle  $h(n) := s\langle m, n \rangle$

- **Berechenbare Funktionen sind effektiv kombinierbar**

Es gibt eine berechenbare totale Funktion  $h$  mit  $\varphi_{h\langle i, j \rangle} = \varphi_i \circ \varphi_j$

Intuitiv:  $h$  berechnet die Gödelnummer der Kombination von  $M_i$  und  $M_j$

**Beweis:** die Funktion  $f$  mit  $f\langle\langle i, j \rangle, x \rangle := \varphi_i(\varphi_j(x))$  ist berechenbar

Also gibt es ein  $h \in \mathcal{TR}$  mit  $\varphi_{h\langle i, j \rangle}(x) = f\langle\langle i, j \rangle, x \rangle = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x)$

## Programme sind fast beliebig ineinander übersetzbar

- **Für jede berechenbare Funktion  $f$  gibt es ein  $h \in \mathcal{TR}$  mit  $\varphi_{h(n)}(i) = f\langle n, i \rangle$  für alle  $n, i \in \mathbb{N}$**

**Beweis:** wenn  $f = \varphi_m$  ist, so wähle  $h(n) := s\langle m, n \rangle$

- **Berechenbare Funktionen sind effektiv kombinierbar**

Es gibt eine berechenbare totale Funktion  $h$  mit  $\varphi_{h\langle i, j \rangle} = \varphi_i \circ \varphi_j$

Intuitiv:  $h$  berechnet die Gödelnummer der Kombination von  $M_i$  und  $M_j$

**Beweis:** die Funktion  $f$  mit  $f\langle\langle i, j \rangle, x \rangle := \varphi_i(\varphi_j(x))$  ist berechenbar

Also gibt es ein  $h \in \mathcal{TR}$  mit  $\varphi_{h\langle i, j \rangle}(x) = f\langle\langle i, j \rangle, x \rangle = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x)$

- **Es gibt berechenbare totale Funktionen  $f, g$  mit**

–  $\varphi_{f(i)}(n) = \varphi_i(n) + 1$  für alle  $i, n$

–  $\varphi_{g\langle i, j \rangle}(n) = \varphi_i(n) + \varphi_j(n)$  für alle  $i, j, n$

⋮

# ALLE ERKENNTNISSE DER BERECHENBARKEITSTHEORIE FOLGEN AUS NUR VIER AXIOMEN

Es gibt Funktionen  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$  und  $\Phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$  mit

## 1. $\varphi_i$ und $\Phi_i$ haben immer denselben Definitionsbereich

Intuition:  $\varphi_i \hat{=} \varphi(i)$  ist die vom  $i$ -ten Programm berechnete Funktion

$\Phi_i \hat{=} \Phi(i)$  ist die zu  $\varphi_i$  gehörende Rechenzeitfunktion

## 2. Rechenzeit ist entscheidbar

– Man kann für beliebige  $i, n, t \in \mathbb{N}$  testen ob  $\Phi_i(n) = t$  ist oder nicht

## 3. Computer sind universelle Maschinen (UTM Theorem)

– Eine Maschine kann alle Programme und Daten verarbeiten

– Die Funktion  $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $u\langle i, n \rangle = \varphi_i(n)$  ist berechenbar

## 4. Programme sind effektiv kombinierbar (SMN Theorem)

– Die Nummer des entstehenden Programms kann berechnet werden

– Es gibt eine berechenbare totale Funktion  $s$  mit  $\varphi_{s\langle m, n \rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i \rangle$

**Berechenbare Funktionen sind “effektiv numerierbar”**

# ZENTRALE BERECHENBARKEITSKONZEPTE NEU ERKLÄRT

- **Berechenbare Funktion**  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (“ $f$  ist **(partiell) rekursiv**”)
  - Es gibt ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $f = \varphi_i$  (Es gibt ein Programm zur Berechnung von  $f$ )
  - $f$  heißt **total rekursiv**, wenn  $f$  berechenbar und total ist
- **Entscheidbare Menge**  $M$  (“ $M$  ist **rekursiv**”)
  - Es gibt ein Programm, das testet, ob ein Element zu  $M$  gehört oder nicht
  - Die charakteristische Funktion  $\chi_M$  ist berechenbar 
$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
- **Semi-entscheidbare Menge**  $M$ 
  - Es gibt ein Programm, das testet, ob ein Element zu  $M$  gehört, aber nicht immer anhält
  - Die partielle charakteristische Funktion  $\psi_M$  ist berechenbar 
$$\psi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$
- **Neu: (rekursiv) aufzählbare Menge**  $M$ 
  - Es gibt ein Programm, das schrittweise alle Elemente von  $M$  generiert
  - $M = \emptyset$  oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion  $f$  mit  $M = \text{range}(f)$  
$$\text{range}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i) = n\}$$

# ANMERKUNGEN ZUR AUFZÄHLBARKEIT

- **Nicht identisch mit Abzählbarkeit**

- $M$  abzählbar, wenn es eine surjektive Funktion  $f$  von  $\mathbb{N}$  nach  $M$  gibt
- $M$  aufzählbar, wenn  $M$  Bild einer berechenbaren Funktion ist

- **Aufzählungen müssen nicht injektiv sein**

- Die Funktion  $g$  mit  $g(n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$   
zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf

- **Jede Menge hat verschiedene Aufzählungen**

- $h = \lambda n.2n+1$  zählt alle ungeraden Zahlen genau einmal auf

- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**

- $M = \{x_0, \dots, x_n\}$  ist Bild von  $f$  mit  $f(i) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $f$  ist primitiv rekursiv, also berechenbar

# ES GIBT VIELE ÄQUIVALENTE CHARAKTERISIERUNGEN FÜR REKURSIV AUFZÄHLBARE MENGEN

Für eine Menge  $M \subseteq \mathbb{N}$  sind folgende Aussagen äquivalent

1.  $M$  ist aufzählbar

2.  $M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

–  $\text{range}(f) = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ ,  $f$  nicht notwendigerweise total

3.  $M$  ist semi-entscheidbar

4.  $M = \text{domain}(f)$  für ein berechenbares  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

–  $\text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$

Analog für Mengen über Worten, Zahlentupeln, ...

# BEWEIS DER ÄQUIVALENZ DURCH RINGSCHLUSS

- **$M$  aufzählbar  $\Rightarrow M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares  $f$** 
  - Es sei  $M$  aufzählbar
  - Falls  $M = \emptyset$  dann ist  $M = \text{range}(f_{\perp})$ , wobei  $f_{\perp}(i) = \perp$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  ✓
  - Andernfalls  $M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares, totales  $f$  ✓

# BEWEIS DER ÄQUIVALENZ DURCH RINGSCHLUSS

- **$M$  aufzählbar  $\Rightarrow M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares  $f$** 
  - Es sei  $M$  aufzählbar
  - Falls  $M = \emptyset$  dann ist  $M = \text{range}(f_{\perp})$ , wobei  $f_{\perp}(i) = \perp$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  ✓
  - Andernfalls  $M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares, totales  $f$  ✓
- **$M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares  $f \Rightarrow M$  semi-entscheidbar**
  - Es sei  $M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares, möglicherweise partielles  $f$
  - Dann ist  $m \in M$  genau dann, wenn  $m = f(n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$
  - Für  $i \in \mathbb{N}$  mit  $f = \varphi_i$  ist  $\psi_M(m) = \text{sign}(\min\{\langle n, t \rangle \mid \Phi_i(n) = t \wedge \varphi_i(n) = m\})$   
**Standardtrick: simultanes Durchzählen von Eingabewerten und Rechenzeitschranken**
  - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist  $\psi_M$  berechenbar ✓

# BEWEIS DER ÄQUIVALENZ DURCH RINGSCHLUSS

- **$M$  aufzählbar  $\Rightarrow M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares  $f$** 
  - Es sei  $M$  aufzählbar
  - Falls  $M = \emptyset$  dann ist  $M = \text{range}(f_{\perp})$ , wobei  $f_{\perp}(i) = \perp$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  ✓
  - Andernfalls  $M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares, totales  $f$  ✓
- **$M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares  $f \Rightarrow M$  semi-entscheidbar**
  - Es sei  $M = \text{range}(f)$  für ein berechenbares, möglicherweise partielles  $f$
  - Dann ist  $m \in M$  genau dann, wenn  $m = f(n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$
  - Für  $i \in \mathbb{N}$  mit  $f = \varphi_i$  ist  $\psi_M(m) = \text{sign}(\min\{\langle n, t \rangle \mid \Phi_i(n) = t \wedge \varphi_i(n) = m\})$   
Standardtrick: simultanes Durchzählen von Eingabewerten und Rechenzeitschranken
  - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist  $\psi_M$  berechenbar ✓
- **$M$  semi-entscheidbar  $\Rightarrow M = \text{domain}(f)$  für ein berechenbares  $f$** 
  - Es sei  $M$  semi-entscheidbar.
  - Dann ist  $\psi_M$  berechenbar und  $M = \{i \in \mathbb{N} \mid \psi_M(i) = 1\} = \text{domain}(\psi_M)$  ✓

# BEWEIS DER ÄQUIVALENZ DURCH RINGSCHLUSS (II)

- $M = \text{domain}(f)$  für ein berechenbares  $f \Rightarrow M$  aufzählbar

- Es sei  $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$  für ein berechenbares  $f$

- Falls  $M = \emptyset$ , dann ist  $M$  per Definition aufzählbar



- Andernfalls gibt es ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $f = \varphi_i$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $f(n_0) \neq \perp$

- Wir **konstruieren** eine berechenbare totale Funktion  $g$  mit  $M = \text{range}(g)$

$$\text{Es sei } g\langle n, t \rangle = \begin{cases} n & \text{falls } \Phi_i(n) = t, \\ n_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Standardtrick: Zerlegen der Eingabe mit Umkehrfunktionen der Standardtupelfunktion

- Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist  $g$  total und berechenbar

- $M = \text{range}(g)$ : Es gilt  $n \in M = \text{domain}(\varphi_i)$

- $\Leftrightarrow$  es gibt eine Rechenzeit  $t$  mit  $\Phi_i(n) = t$

- $\Leftrightarrow$  es gibt ein  $t$  mit  $g\langle n, t \rangle = n$

- $\Leftrightarrow n \in \text{range}(g)$



# WICHTIGE ENTSCHIEDBARE UND AUFZÄHLBARE MENGEN

- **Sei  $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$  berechenbar**

- **range( $f$ ) ist aufzählbar**

Charakterisierung #2

- **domain( $f$ ) ist aufzählbar**

Charakterisierung #4

- **graph( $f$ ) ist aufzählbar (entscheidbar, wenn  $f$  total ist)**

Bei Eingabe  $\langle i, j \rangle$  teste  $f(i)=j$  (hält immer, wenn  $f$  total)

- **$\{\langle i, n, t \rangle \mid \Phi_i(n)=t\}$  ist entscheidbar**

Axiom 2

- **$\{\langle i, n, y \rangle \mid \varphi_i(n)=y\}$  ist aufzählbar**

- Graph der universellen Funktion

- **$H = \{\langle i, n \rangle \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$  ist aufzählbar**

- Definitionsbereich der universellen Funktion

(Halteproblem)

- **$S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$  ist aufzählbar**

- Definitionsbereich von  $\lambda i.u\langle i, i \rangle$

(Selbstanwendbarkeitsproblem)

# AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHIEDBARKEIT

**$M$  entscheidbar  $\Leftrightarrow M$  und  $\overline{M}$  aufzählbar**

# AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHIEDBARKEIT

**$M$  entscheidbar  $\Leftrightarrow M$  und  $\overline{M}$  aufzählbar**

$\Rightarrow$  Es sei  $M$  entscheidbar. Dann ist  $\chi_M: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  berechenbar

Es ist  $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$  und  $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind  $\psi_M$  und  $\psi_{\overline{M}}$  berechenbar, also  $M$  und  $\overline{M}$  aufzählbar  $\checkmark$

# AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHEIDBARKEIT

**$M$  entscheidbar  $\Leftrightarrow M$  und  $\overline{M}$  aufzählbar**

$\Rightarrow$  Es sei  $M$  entscheidbar. Dann ist  $\chi_M: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  berechenbar

Es ist  $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ , und  $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind  $\psi_M$  und  $\psi_{\overline{M}}$  berechenbar, also  $M$  und  $\overline{M}$  aufzählbar ✓

$\Leftarrow$  Seien  $M$  und  $\overline{M}$  aufzählbar

Falls  $M=\emptyset$  oder  $\overline{M}=\emptyset$ , so ist  $M$  trivialerweise entscheidbar ✓

Andernfalls  $M=\text{range}(f)$  und  $\overline{M}=\text{range}(g)$  wobei  $f, g$  total berechenbar

Definiere  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  durch  $h(n) = \min\{i \mid f(i)=n \vee g(i)=n\}$

Dann ist  $h$  berechenbar und total, da  $n \in M$  oder  $n \in \overline{M}$  für jedes  $n$  gilt.

Damit ist  $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(h(n)) = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  berechenbar ✓

# AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHIEDBARKEIT II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**

- Die Umkehrung gilt nicht

(Beispiel folgt in §5.5)

# AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHIEDBARKEIT II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**

- Die Umkehrung gilt nicht

(Beispiel folgt in §5.5)

- **Jede endliche Menge ist entscheidbar (und aufzählbar)**

- Für  $M = \{x_1, \dots, x_n\}$  ist  $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n=x_1 \vee \dots \vee n=x_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- $\chi_M$  ist berechenbar, also ist  $M$  entscheidbar



# AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHEIDBARKEIT II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**

- Die Umkehrung gilt nicht

(Beispiel folgt in §5.5)

- **Jede endliche Menge ist entscheidbar (und aufzählbar)**

- Für  $M = \{x_1, \dots, x_n\}$  ist  $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n=x_1 \vee \dots \vee n=x_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- $\chi_M$  ist berechenbar, also ist  $M$  entscheidbar

✓

- **$M$  ist aufzählbar g.d.w. es eine entscheidbare Menge  $M'$  gibt mit  $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in M'\}$**  (Projektionssatz)

- $\Rightarrow$ : Falls  $M=\emptyset$ , so ist  $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in \emptyset\}$

✓

- Andernfalls ist  $M=\text{range}(f)$  für ein berechenbares, totales  $f$

- und  $\text{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in \text{graph}(f)\}$

✓

- $\Leftarrow$ : Es sei  $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in M'\}$  für ein entscheidbares  $M'$

- Dann ist  $\psi_M(y) = \text{sign}(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \langle n, y \rangle \in M'\} + 1)$

- $= \text{sign}(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \chi_{M'}\langle n, y \rangle = 1\} + 1)$  berechenbar

✓

# ABSCHLUSSEIGENSCHAFTEN AUFZÄHLBARER MENGEN

**Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter**

## Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- $M \cup M'$ : Vereinigung

- Seien  $M = \text{range}(h)$  und  $M' = \text{range}(h')$  aufzählbar
- Definiere  $g$  durch  $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist  $g$  berechenbar und  $\text{range}(g) = M \cup M'$  aufzählbar

## Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$ : Vereinigung**

- Seien  $M = \text{range}(h)$  und  $M' = \text{range}(h')$  aufzählbar
- Definiere  $g$  durch  $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist  $g$  berechenbar und  **$\text{range}(g) = M \cup M'$  aufzählbar**

- **$M \cap M'$ : Durchschnitt**

- Es ist  $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$ . Also ist  $\psi_{M \cap M'}$  **berechenbar**  
In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn  $n \in M \cap M'$

## Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$ : Vereinigung**

- Seien  $M = \text{range}(h)$  und  $M' = \text{range}(h')$  aufzählbar
- Definiere  $g$  durch  $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist  $g$  berechenbar und  $\text{range}(g) = M \cup M'$  aufzählbar

- **$M \cap M'$ : Durchschnitt**

- Es ist  $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$ . Also ist  $\psi_{M \cap M'}$  berechenbar
- In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn  $n \in M \cap M'$

- **$f(M)$ : Bild einer berechenbaren Funktion**

- Definiere  $g$  durch  $g(n) = f(h(n))$
- Dann ist  $g$  berechenbar und  $\text{range}(g) = f(M)$  aufzählbar

## Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$ : Vereinigung**

- Seien  $M = \text{range}(h)$  und  $M' = \text{range}(h')$  aufzählbar
- Definiere  $g$  durch  $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist  $g$  berechenbar und  $\text{range}(g) = M \cup M'$  aufzählbar

- **$M \cap M'$ : Durchschnitt**

- Es ist  $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$ . Also ist  $\psi_{M \cap M'}$  berechenbar
- In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn  $n \in M \cap M'$

- **$f(M)$ : Bild einer berechenbaren Funktion**

- Definiere  $g$  durch  $g(n) = f(h(n))$
- Dann ist  $g$  berechenbar und  $\text{range}(g) = f(M)$  aufzählbar

- **$f^{-1}(M)$ : Urbild einer berechenbaren Funktion**

- Es ist  $\psi_{f^{-1}(M)}(n) = \psi_M(f(n))$ . Also ist  $\psi_{f^{-1}(M)}$  berechenbar.

## Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$ : Vereinigung**

- Seien  $M = \text{range}(h)$  und  $M' = \text{range}(h')$  aufzählbar
- Definiere  $g$  durch  $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist  $g$  berechenbar und  $\text{range}(g) = M \cup M'$  aufzählbar

- **$M \cap M'$ : Durchschnitt**

- Es ist  $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$ . Also ist  $\psi_{M \cap M'}$  berechenbar
- In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn  $n \in M \cap M'$

- **$f(M)$ : Bild einer berechenbaren Funktion**

- Definiere  $g$  durch  $g(n) = f(h(n))$
- Dann ist  $g$  berechenbar und  $\text{range}(g) = f(M)$  aufzählbar

- **$f^{-1}(M)$ : Urbild einer berechenbaren Funktion**

- Es ist  $\psi_{f^{-1}(M)}(n) = \psi_M(f(n))$ . Also ist  $\psi_{f^{-1}(M)}$  berechenbar.

## Kein Abschluß unter Komplement oder Differenz

## Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter

- $M \cup M'$ : Vereinigung

- Beweisidee:  $\chi_{M \cup M'}(n) = \text{sign}(\chi_M(n) + \chi_{M'}(n))$ .

- $M \cap M'$ : Durchschnitt

- Beweisidee:  $\chi_{M \cap M'}(n) = \chi_M(n) * \chi_{M'}(n)$ .

- $\overline{M}$ : Komplement

- Beweisidee:  $\chi_{\overline{M}}(n) = 1 - \chi_M(n)$ .

- $M - M'$ : Differenz

- Beweisidee:  $M - M' = M \cap \overline{M'}$

- $f^{-1}(M)$ : Urbild einer berechenbaren totalen Funktion

- Beweisidee:  $\chi_{f^{-1}(M)}(n) = \chi_M(f(n))$ .

## Kein Abschluß unter Bild berechenbarer Funktionen

- **Es gibt 3 Grundkonzepte der Berechenbarkeit**

- Berechenbare Funktionen, entscheidbare und aufzählbare Mengen
- Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen

Alle Konzepte sind beschreibbar durch berechenbare Funktionen auf  $\mathbb{N}$

- Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter  $\cup, \cap, f, f^{-1}$
- Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter  $\cup, \cap, \neg, f^{-1}$

- **Alle Theorie stützt sich auf nur vier Gesetze**

1. Numerierbarkeit von berechenbaren Funktionen und Rechenzeiten
2. Entscheidbarkeit der Rechenzeit
3. Berechenbarkeit der universellen Funktion
4. Effektive Kombinierbarkeit berechenbarer Funktionen

Jedes Berechenbarkeitsmodell erfüllt diese Axiome

Mehr Details in Vossen & Witt §9 und den dort angegebenen Referenzen