

Theoretische Informatik II

Einheit 5.4

Elementare Berechenbarkeitstheorie I: Grundkonzepte und ihre Eigenschaften



1. Grundgesetze der Berechenbarkeit
2. Berechenbarkeit, Aufzählbarkeit
und Entscheidbarkeit
3. Abschlußeigenschaften

- **Es gibt viele Fragen zur Berechenbarkeit**
 - Welche Funktionen sind berechenbar und welche nicht?
 - Welche Probleme sind (semi-)entscheidbar und welche nicht?
 - Abschlußeigenschaften: wie kann man Lösungen wiederverwenden?
 - Grenzen des Machbaren: was ist nicht mehr berechenbar?
Wie kann man nachweisen, daß ein Problem nicht lösbar ist?
- **Antworten hängen nicht vom Berechnungsmodell ab**
 - Berechenbarkeit, (semi-)Entscheidbarkeit, (Zeit-/Platz)Komplexität sind allgemeine Konzepte
- **Löse Theorie von Betrachtung konkreter Modelle**
 - Formuliere Grundeigenschaften (**Axiome**) berechenbarer Funktionen
 - Beweise diese Eigenschaften mit einem Modell (Turingmaschine)
 - Stütze alle Beweise für Aussagen nur noch auf diese Eigenschaften denn sie gelten für alle gleichmächtigen Berechnungsmodelle

FORMULIERE THEORIE BERECHENBARER FUNKTIONEN

- **Es reicht berechenbare Funktionen zu betrachten**
 - (Semi-)Entscheidbarkeit einer Menge ist äquivalent zur Berechenbarkeit ihrer (partiell-)charakteristischen Funktion
- **Es reicht Berechenbarkeit auf Zahlen zu betrachten**
 - Berechenbarkeitskonzepte auf Wörtern und Zahlen sind gleichwertig
 - Zahlen kann man als Wörter (binär oder anders) codieren
 - Wörter über einem Alphabet kann man systematisch numerieren
 - Es ist meist leichter, mit Zahlen zu arbeiten (z.B. Rechenzeit)
 - Programme und Daten sind als Zahlen codierbar
- **Es reicht einstellige Funktionen auf $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zu betrachten**
 - Funktionen auf Zahlenpaaren und -listen sind einstellig simulierbar
 - z.B. ist $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch $f': \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f' \langle i, j \rangle := f(i, j)$ simulierbar

Liefert allgemeine Theorie der Berechenbarkeit

BERECHENBARE FUNKTIONEN LASSEN SICH AUFZÄHLEN

• Turingmaschinen sind als Wörter codierbar

- Es reicht, Turingmaschinen mit $\Gamma = \{0, 1, B\}$ und $F = \{q_1\}$ zu betrachten
- Definiere $code(\delta(q, X)) \equiv q X p Y D$, falls $\delta(q, X) = (p, Y, D)$ (ϵ sonst)
- Codiere die Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ durch das Wort
 $code(\delta(q_0, 0)) code(\delta(q_0, 1)) code(\delta(q_0, B)) \dots code(\delta(q_n, B))$
- Codiere Alphabet $\{q_0, \dots, q_n, 0, 1, B, L, R\}$ als Wörter über $\Delta = \{0, 1\}$

• Wörter über einem Alphabet sind numerierbar

- Bestimme **lexikographische Ordnung** der Wörter über $\Delta = \{x_1, \dots, x_n\}$
 $\epsilon < x_1 < \dots < x_n < x_1x_1 < x_1x_2 < \dots < x_nx_n < x_1x_1x_1 < \dots$
- Zähle entsprechend durch: $w_0 := \epsilon$, $w_1 := x_1$, .. $w_n := x_n$, $w_{n+1} := x_1x_1$, ..

• Turingmaschinen sind (bijektiv) numerierbar

- Zähle Wörter über Δ auf und teste, ob sie Turingmaschinen codieren
- M_i ist die Turingmaschine, deren Codierung an i -ter Stelle erscheint
- Die Nummer i wird auch die **Gödelnummer** von M_i genannt

NUMERIERUNG VON TM LIEFERT ZWEI KERNAXIOME

- **Definiere Numerierung berechenbarer Funktionen:**

- φ_i ist die von M_i berechnete (partielle) Funktion auf \mathbb{N}

- $\varphi(i) := \varphi_i := r_b^{-1} \circ f_{M_i} \circ r_b$, wobei $r_b: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$ Binärcodierung von \mathbb{N}

- Φ_i ist die zugehörige Schrittzahlfunktion von M_i

- $\Phi(i)(n) := \Phi_i(n) := t_{M_i}(r_b(n))$

- **$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ is surjektiv, aber nicht bijektiv**

- Jede programmierbare Funktion hat einen Index

- Jede berechenbare Funktion hat unendlich viele Programme

NUMERIERUNG VON TM LIEFERT ZWEI KERNAXIOME

- **Definiere Numerierung berechenbarer Funktionen:**

- φ_i ist die von M_i berechnete (partielle) Funktion auf \mathbb{N}
 - $\varphi(i) := \varphi_i := r_b^{-1} \circ f_{M_i} \circ r_b$, wobei $r_b: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^*$ Binärcodierung von \mathbb{N}
- Φ_i ist die zugehörige Schrittzahlfunktion von M_i
 - $\Phi(i)(n) := \Phi_i(n) := t_{M_i}(r_b(n))$

- $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ is surjektiv, aber nicht bijektiv

- Jede programmierbare Funktion hat einen Index
- Jede berechenbare Funktion hat unendlich viele Programme

- **Axiom 1: Für alle i gilt $\text{domain}(\Phi_i) = \text{domain}(\varphi_i)$**

- Per Konstruktion ist Φ_i auf den gleichen Eingaben definiert wie φ_i

- **Axiom 2: $\{\langle i, n, t \rangle \mid \Phi_i(n) = t\}$ ist entscheidbar**

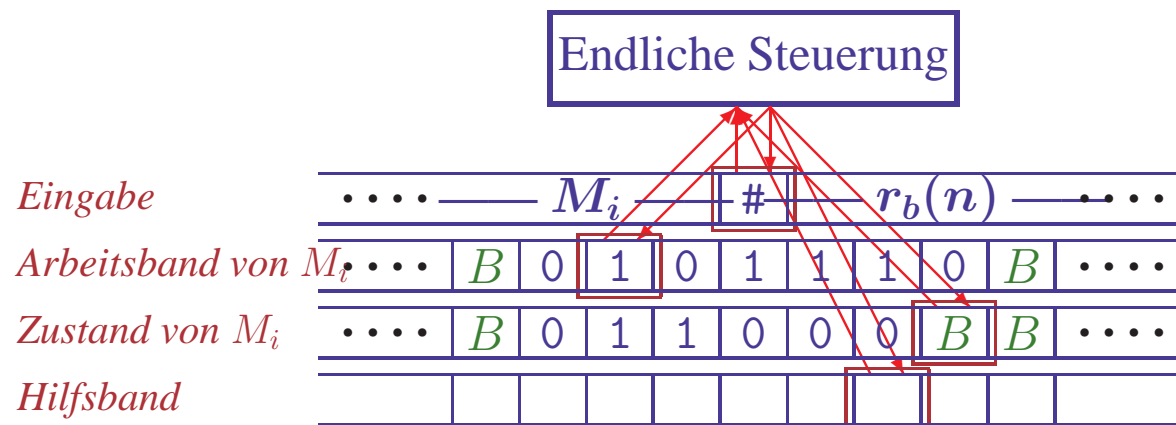
- Simuliere Ausführung von $\varphi_i(n)$ für maximal t Schritte
- Implementierung benutzt Variante der universellen Maschine (s.u.)

Axiom 3: DIE UNIVERSELLE FUNKTION IST BERECHENBAR

$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $u \langle i, n \rangle = \varphi_i(n)$ ist berechenbar (UTM Theorem)

Axiom 3: DIE UNIVERSELLE FUNKTION IST BERECHENBAR

$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $u \langle i, n \rangle = \varphi_i(n)$ ist berechenbar (UTM Theorem)



- **Benutze 3 Arbeitsbänder + Hilfsbänder**

- Programmnummer i und Eingabewert n , binär codiert
- Arbeitsband von M_i
- **Aktueller Zustand** von M_i (auf Band, da Anzahl der Zustände nicht limitiert)

- **Generiere und simuliere Programm von M_i**

- Generiere das Wort, das M_i über Δ codiert; schreibe es auf Band 1
- Kopiere $r_b(n)$ auf Band 2 und schreibe q_0 auf Band 3
- **Simuliere Einzelschritte** von M_i durch Aufsuchen der Befehle auf Band 1
- Terminiert M_i (Zustand q_1), kopiere die Ausgabe von Band 2 auf Band 1

Axiom 4: PROGRAMME SIND EFFEKTIV KOMBINIERBAR

Es gibt eine berechenbare totale Funktion $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ mit
 $\varphi_{s\langle m,n\rangle}(i) = \varphi_m\langle n,i\rangle$ für alle $m, n, i \in \mathbb{N}$ (SMN Theorem)
Technisches Lemma ohne gute Intuition

Axiom 4: PROGRAMME SIND EFFEKTIV KOMBINIERBAR

Es gibt eine berechenbare totale Funktion $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit
 $\varphi_{s\langle m, n \rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i \rangle$ für alle $m, n, i \in \mathbb{N}$ (SMN Theorem)
Technisches Lemma ohne gute Intuition

- **Konstruiere eine Turingmaschine M für s :**
 - Auf dem Eingabeband stehe die Codierung einer Zahl $\langle m, n \rangle$
 - Konstruiere auf Hilfsband 1 die Codierung der m -ten Turingmaschine M_m
 - Konstruiere auf Hilfsband 2 die Codierung einer Maschine M_{\diamond} ,
welche bei Eingabe einer Zahl i den Wert $f_{M_{\diamond}}(i) = \langle n, i \rangle$ berechnet.
 - Konstruiere auf Hilfsband 3 den Code einer Maschine, die bei Eingabe
einer Zahl i zunächst M_{\diamond} simuliert und M_m auf das Ergebnis anwendet.
 - Berechne die Gödelnummer der so aus $\langle m, n \rangle$ konstruierten Maschine
- **Setze $s := f_M$**
 - Per Konstruktion ist die Funktion s berechenbar
 - s ist total, weil M für jede Eingabe $\langle m, n \rangle$ ein Ergebnis produziert
 - Es gilt $\varphi_{s\langle m, n \rangle}(i) = f_{M_m}(f_{M_{\diamond}}(i)) = \varphi_m\langle n, i \rangle$

KONSEQUENZEN DES SMN THEOREMS

Programme sind fast beliebig ineinander übersetzbar

KONSEQUENZEN DES SMN THEOREMS

Programme sind fast beliebig ineinander übersetzbar

- Für jede berechenbare Funktion f gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h(n)}(i) = f\langle n, i \rangle$ für alle $n, i \in \mathbb{N}$

Beweis: wenn $f = \varphi_m$ ist, so wähle $h(n) := s\langle m, n \rangle$

Programme sind fast beliebig ineinander übersetzbar

- **Für jede berechenbare Funktion f gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h(n)}(i) = f\langle n, i \rangle$ für alle $n, i \in \mathbb{N}$**

Beweis: wenn $f = \varphi_m$ ist, so wähle $h(n) := s\langle m, n \rangle$

- **Berechenbare Funktionen sind effektiv kombinierbar**

Es gibt eine berechenbare totale Funktion h mit $\varphi_{h\langle i, j \rangle} = \varphi_i \circ \varphi_j$

Intuitiv: h berechnet die Gödelnummer der Kombination von M_i und M_j

Beweis: die Funktion f mit $f\langle\langle i, j \rangle, x \rangle := \varphi_i(\varphi_j(x))$ ist berechenbar

Also gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h\langle i, j \rangle}(x) = f\langle\langle i, j \rangle, x \rangle = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x)$

Programme sind fast beliebig ineinander übersetzbar

- **Für jede berechenbare Funktion f gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h(n)}(i) = f\langle n, i \rangle$ für alle $n, i \in \mathbb{N}$**

Beweis: wenn $f = \varphi_m$ ist, so wähle $h(n) := s\langle m, n \rangle$

- **Berechenbare Funktionen sind effektiv kombinierbar**

Es gibt eine berechenbare totale Funktion h mit $\varphi_{h\langle i, j \rangle} = \varphi_i \circ \varphi_j$

Intuitiv: h berechnet die Gödelnummer der Kombination von M_i und M_j

Beweis: die Funktion f mit $f\langle\langle i, j \rangle, x \rangle := \varphi_i(\varphi_j(x))$ ist berechenbar

Also gibt es ein $h \in \mathcal{TR}$ mit $\varphi_{h\langle i, j \rangle}(x) = f\langle\langle i, j \rangle, x \rangle = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x)$

- **Es gibt berechenbare totale Funktionen f, g mit**

– $\varphi_{f(i)}(n) = \varphi_i(n) + 1$ für alle i, n

– $\varphi_{g\langle i, j \rangle}(n) = \varphi_i(n) + \varphi_j(n)$ für alle i, j, n

⋮

ALLE ERKENNTNISSE DER BERECHENBARKEITSTHEORIE FOLGEN AUS NUR VIER AXIOMEN

Es gibt Funktionen $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ und $\Phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}$ mit

1. φ_i und Φ_i haben immer denselben Definitionsbereich

Intuition: $\varphi_i \hat{=} \varphi(i)$ ist die vom i -ten Programm berechnete Funktion

$\Phi_i \hat{=} \Phi(i)$ ist die zu φ_i gehörende Rechenzeitfunktion

2. Rechenzeit ist entscheidbar

– Man kann für beliebige $i, n, t \in \mathbb{N}$ testen ob $\Phi_i(n) = t$ ist oder nicht

3. Computer sind universelle Maschinen (UTM Theorem)

– Eine Maschine kann alle Programme und Daten verarbeiten

– Die Funktion $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $u\langle i, n \rangle = \varphi_i(n)$ ist berechenbar

4. Programme sind effektiv kombinierbar (SMN Theorem)

– Die Nummer des entstehenden Programms kann berechnet werden

– Es gibt eine berechenbare totale Funktion s mit $\varphi_{s\langle m, n \rangle}(i) = \varphi_m\langle n, i \rangle$

Berechenbare Funktionen sind “effektiv numerierbar”

ZENTRALE BERECHENBARKEITSKONZEPTE NEU ERKLÄRT

- **Berechenbare Funktion** $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (“ f ist **(partiell) rekursiv**”)
 - Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ (Es gibt ein Programm zur Berechnung von f)
 - f heißt **total rekursiv**, wenn f berechenbar und total ist
- **Entscheidbare Menge** M (“ M ist **rekursiv**”)
 - Es gibt ein Programm, das testet, ob ein Element zu M gehört oder nicht
 - Die charakteristische Funktion χ_M ist berechenbar
$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
- **Semi-entscheidbare Menge** M
 - Es gibt ein Programm, das testet, ob ein Element zu M gehört, aber nicht immer anhält
 - Die partielle charakteristische Funktion ψ_M ist berechenbar
$$\psi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$
- **Neu: (rekursiv) aufzählbare Menge** M
 - Es gibt ein Programm, das schrittweise alle Elemente von M generiert
 - $M = \emptyset$ oder es gibt eine totale, berechenbare Funktion f mit $M = \text{range}(f)$
$$\text{range}(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \mathbb{N} f(i) = n\}$$

ANMERKUNGEN ZUR AUFZÄHLBARKEIT

- **Nicht identisch mit Abzählbarkeit**

- M abzählbar, wenn es eine surjektive Funktion f von \mathbb{N} nach M gibt
- M aufzählbar, wenn M Bild einer berechenbaren Funktion ist

- **Aufzählungen müssen nicht injektiv sein**

- Die Funktion g mit $g(n) = \begin{cases} n+1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ n & \text{sonst} \end{cases}$
zählt alle ungeraden Zahlen genau zweimal auf

- **Jede Menge hat verschiedene Aufzählungen**

- $h = \lambda n.2n+1$ zählt alle ungeraden Zahlen genau einmal auf

- **Jede endliche Menge ist aufzählbar**

- $M = \{x_0, \dots, x_n\}$ ist Bild von f mit $f(i) = \begin{cases} x_i & \text{falls } i \leq n, \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$
- f ist primitiv rekursiv, also berechenbar

ES GIBT VIELE ÄQUIVALENTE CHARAKTERISIERUNGEN FÜR REKURSIV AUFZÄHLBARE MENGEN

Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent

1. M ist aufzählbar

2. $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

– $\text{range}(f) = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, f nicht notwendigerweise total

3. M ist semi-entscheidbar

4. $M = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

– $\text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$

Analog für Mengen über Worten, Zahlentupeln, ...

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ DURCH RINGSCHLUSS

- **M aufzählbar $\Rightarrow M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares f**
 - Es sei M aufzählbar
 - Falls $M = \emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_{\perp})$, wobei $f_{\perp}(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ✓
 - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f ✓

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ DURCH RINGSCHLUSS

- **M aufzählbar $\Rightarrow M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares f**
 - Es sei M aufzählbar
 - Falls $M = \emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_{\perp})$, wobei $f_{\perp}(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ✓
 - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f ✓
- **$M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares $f \Rightarrow M$ semi-entscheidbar**
 - Es sei $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, möglicherweise partielles f
 - Dann ist $m \in M$ genau dann, wenn $m = f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$
 - Für $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ ist $\psi_M(m) = \text{sign}(\min\{\langle n, t \rangle \mid \Phi_i(n) = t \wedge \varphi_i(n) = m\})$
Standardtrick: simultanes Durchzählen von Eingabewerten und Rechenzeitschranken
 - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist ψ_M berechenbar ✓

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ DURCH RINGSCHLUSS

- **M aufzählbar $\Rightarrow M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares f**
 - Es sei M aufzählbar
 - Falls $M = \emptyset$ dann ist $M = \text{range}(f_{\perp})$, wobei $f_{\perp}(i) = \perp$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ✓
 - Andernfalls $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f ✓
- **$M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares $f \Rightarrow M$ semi-entscheidbar**
 - Es sei $M = \text{range}(f)$ für ein berechenbares, möglicherweise partielles f
 - Dann ist $m \in M$ genau dann, wenn $m = f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$
 - Für $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ ist $\psi_M(m) = \text{sign}(\min\{\langle n, t \rangle \mid \Phi_i(n) = t \wedge \varphi_i(n) = m\})$
Standardtrick: simultanes Durchzählen von Eingabewerten und Rechenzeitschranken
 - Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist ψ_M berechenbar ✓
- **M semi-entscheidbar $\Rightarrow M = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares f**
 - Es sei M semi-entscheidbar.
 - Dann ist ψ_M berechenbar und $M = \{i \in \mathbb{N} \mid \psi_M(i) = 1\} = \text{domain}(\psi_M)$ ✓

BEWEIS DER ÄQUIVALENZ DURCH RINGSCHLUSS (II)

- $M = \text{domain}(f)$ für ein berechenbares $f \Rightarrow M$ aufzählbar

- Es sei $M = \text{domain}(f) = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \neq \perp\}$ für ein berechenbares f

- Falls $M = \emptyset$, dann ist M per Definition aufzählbar ✓

- Andernfalls gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $f = \varphi_i$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(n_0) \neq \perp$

- Wir **konstruieren** eine berechenbare totale Funktion g mit $M = \text{range}(g)$

$$\text{Es sei } g\langle n, t \rangle = \begin{cases} n & \text{falls } \Phi_i(n) = t, \\ n_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Standardtrick: Zerlegen der Eingabe mit Umkehrfunktionen der Standardtupelfunktion

- Da die Rechenzeitfunktion entscheidbar ist, ist g **total und berechenbar**

- $M = \text{range}(g)$: Es gilt $n \in M = \text{domain}(\varphi_i)$

- \Leftrightarrow es gibt eine Rechenzeit t mit $\Phi_i(n) = t$

- \Leftrightarrow es gibt ein t mit $g\langle n, t \rangle = n$

- $\Leftrightarrow n \in \text{range}(g)$

✓

WICHTIGE ENTSCHIEDBARE UND AUFZÄHLBARE MENGEN

- Sei $f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ berechenbar

- $\text{range}(f)$ ist aufzählbar

Charakterisierung #2

- $\text{domain}(f)$ ist aufzählbar

Charakterisierung #4

- $\text{graph}(f)$ ist aufzählbar (entscheidbar, wenn f total ist)

Bei Eingabe $\langle i, j \rangle$ teste $f(i)=j$ (hält immer, wenn f total)

- $\{\langle i, n, t \rangle \mid \Phi_i(n)=t\}$ ist entscheidbar

Axiom 2

- $\{\langle i, n, y \rangle \mid \varphi_i(n)=y\}$ ist aufzählbar

- Graph der universellen Funktion

- $H = \{\langle i, n \rangle \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist aufzählbar

- Definitionsbereich der universellen Funktion

(Halteproblem)

- $S = \{i \mid i \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist aufzählbar

- Definitionsbereich von $\lambda i.u\langle i, i \rangle$

(Selbstanwendbarkeitsproblem)

AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHIEDBARKEIT

M entscheidbar $\Leftrightarrow M$ und \overline{M} aufzählbar

AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHIEDBARKEIT

M entscheidbar $\Leftrightarrow M$ und \overline{M} aufzählbar

\Rightarrow Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbar

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und \overline{M} aufzählbar \checkmark

AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHEIDBARKEIT

M entscheidbar $\Leftrightarrow M$ und \overline{M} aufzählbar

\Rightarrow Es sei M entscheidbar. Dann ist $\chi_M: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ berechenbar

Es ist $\psi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=1, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ und $\psi_{\overline{M}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_M(n)=0, \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

Damit sind ψ_M und $\psi_{\overline{M}}$ berechenbar, also M und \overline{M} aufzählbar ✓

\Leftarrow Seien M und \overline{M} aufzählbar

Falls $M=\emptyset$ oder $\overline{M}=\emptyset$, so ist M trivialerweise entscheidbar ✓

Andernfalls $M=\text{range}(f)$ und $\overline{M}=\text{range}(g)$ wobei f, g total berechenbar

Definiere $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durch $h(n) = \min\{i \mid f(i)=n \vee g(i)=n\}$

Dann ist h berechenbar und total, da $n \in M$ oder $n \in \overline{M}$ für jedes n gilt.

Damit ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(h(n)) = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ berechenbar ✓

AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHIEDBARKEIT II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**

- Die Umkehrung gilt nicht

(Beispiel folgt in §5.5)

AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHIEDBARKEIT II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**

- Die Umkehrung gilt nicht

(Beispiel folgt in §5.5)

- **Jede endliche Menge ist entscheidbar (und aufzählbar)**

- Für $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n=x_1 \vee \dots \vee n=x_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar



AUFZÄHLBARKEIT VS. ENTSCHEIDBARKEIT II

- **Jede entscheidbare Menge ist aufzählbar**
 - Die Umkehrung gilt nicht (Beispiel folgt in §5.5)
- **Jede endliche Menge ist entscheidbar (und aufzählbar)**
 - Für $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist $\chi_M(n) = \begin{cases} 1 & n=x_1 \vee \dots \vee n=x_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
 - χ_M ist berechenbar, also ist M entscheidbar ✓
- **M ist aufzählbar g.d.w. es eine entscheidbare Menge M' gibt mit $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in M'\}$ (Projektionssatz)**
 - \Rightarrow : Falls $M=\emptyset$, so ist $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in \emptyset\}$ ✓
 - Andernfalls ist $M=\text{range}(f)$ für ein berechenbares, totales f
und $\text{range}(f) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in \text{graph}(f)\}$ ✓
 - \Leftarrow : Es sei $M = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N} \langle n, y \rangle \in M'\}$ für ein entscheidbares M'
 - Dann ist $\psi_M(y) = \text{sign}(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \langle n, y \rangle \in M'\} + 1)$
 $= \text{sign}(\min\{n \in \mathbb{N} \mid \chi_{M'}\langle n, y \rangle = 1\} + 1)$ berechenbar ✓

Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- $M \cup M'$: Vereinigung

- Seien $M = \text{range}(h)$ und $M' = \text{range}(h')$ aufzählbar
- Definiere g durch $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist g berechenbar und $\text{range}(g) = M \cup M'$ aufzählbar

Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- $M \cup M'$: Vereinigung

- Seien $M = \text{range}(h)$ und $M' = \text{range}(h')$ aufzählbar
- Definiere g durch $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist g berechenbar und $\text{range}(g) = M \cup M'$ aufzählbar

- $M \cap M'$: Durchschnitt

- Es ist $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$. Also ist $\psi_{M \cap M'}$ berechenbar
- In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn $n \in M \cap M'$

Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$: Vereinigung**

- Seien $M = \text{range}(h)$ und $M' = \text{range}(h')$ aufzählbar
- Definiere g durch $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist g berechenbar und $\text{range}(g) = M \cup M'$ aufzählbar

- **$M \cap M'$: Durchschnitt**

- Es ist $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$. Also ist $\psi_{M \cap M'}$ berechenbar
- In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn $n \in M \cap M'$

- **$f(M)$: Bild einer berechenbaren Funktion**

- Definiere g durch $g(n) = f(h(n))$
- Dann ist g berechenbar und $\text{range}(g) = f(M)$ aufzählbar

Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$: Vereinigung**

- Seien $M = \text{range}(h)$ und $M' = \text{range}(h')$ aufzählbar
- Definiere g durch $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist g berechenbar und $\text{range}(g) = M \cup M'$ aufzählbar

- **$M \cap M'$: Durchschnitt**

- Es ist $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$. Also ist $\psi_{M \cap M'}$ berechenbar
- In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn $n \in M \cap M'$

- **$f(M)$: Bild einer berechenbaren Funktion**

- Definiere g durch $g(n) = f(h(n))$
- Dann ist g berechenbar und $\text{range}(g) = f(M)$ aufzählbar

- **$f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren Funktion**

- Es ist $\psi_{f^{-1}(M)}(n) = \psi_M(f(n))$. Also ist $\psi_{f^{-1}(M)}$ berechenbar.

Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter

- **$M \cup M'$: Vereinigung**

- Seien $M = \text{range}(h)$ und $M' = \text{range}(h')$ aufzählbar
- Definiere g durch $g(n) = \begin{cases} h(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ h'(\lfloor n/2 \rfloor) & \text{sonst} \end{cases}$
- Dann ist g berechenbar und $\text{range}(g) = M \cup M'$ aufzählbar

- **$M \cap M'$: Durchschnitt**

- Es ist $\psi_{M \cap M'}(n) = \psi_M(n) * \psi_{M'}(n)$. Also ist $\psi_{M \cap M'}$ berechenbar
- In beiden Fällen erhalten wir eine 1 genau dann, wenn $n \in M \cap M'$

- **$f(M)$: Bild einer berechenbaren Funktion**

- Definiere g durch $g(n) = f(h(n))$
- Dann ist g berechenbar und $\text{range}(g) = f(M)$ aufzählbar

- **$f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren Funktion**

- Es ist $\psi_{f^{-1}(M)}(n) = \psi_M(f(n))$. Also ist $\psi_{f^{-1}(M)}$ berechenbar.

Kein Abschluß unter Komplement oder Differenz

Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter

- $M \cup M'$: Vereinigung

- Beweisidee: $\chi_{M \cup M'}(n) = \text{sign}(\chi_M(n) + \chi_{M'}(n))$.

- $M \cap M'$: Durchschnitt

- Beweisidee: $\chi_{M \cap M'}(n) = \chi_M(n) * \chi_{M'}(n)$.

- \overline{M} : Komplement

- Beweisidee: $\chi_{\overline{M}}(n) = 1 - \chi_M(n)$.

- $M - M'$: Differenz

- Beweisidee: $M - M' = M \cap \overline{M'}$

- $f^{-1}(M)$: Urbild einer berechenbaren totalen Funktion

- Beweisidee: $\chi_{f^{-1}(M)}(n) = \chi_M(f(n))$.

Kein Abschluß unter Bild berechenbarer Funktionen

- **Es gibt 3 Grundkonzepte der Berechenbarkeit**

- Berechenbare Funktionen, entscheidbare und aufzählbare Mengen
- Es gibt viele äquivalente Charakterisierungen

Alle Konzepte sind beschreibbar durch berechenbare Funktionen auf \mathbb{N}

- Aufzählbare Mengen sind abgeschlossen unter \cup, \cap, f, f^{-1}
- Entscheidbare Mengen sind abgeschlossen unter \cup, \cap, \neg, f^{-1}

- **Alle Theorie stützt sich auf nur vier Gesetze**

1. Numerierbarkeit von berechenbaren Funktionen und Rechenzeiten
2. Entscheidbarkeit der Rechenzeit
3. Berechenbarkeit der universellen Funktion
4. Effektive Kombinierbarkeit berechenbarer Funktionen

Jedes Berechenbarkeitsmodell erfüllt diese Axiome

Mehr Details in Vossen & Witt §9 und den dort angegebenen Referenzen