# Theoretische Informatik II

## Einheit 6


## Komplexitätstheorie


1. Grundkonzepte der Komplexitätsanalyse
2. Das $\mathcal{P}$–$\mathcal{NP}$ Problem
3. $\mathcal{NP}$-vollständige Probleme
4. Komplexitätsklassen jenseits von $\mathcal{NP}$
5. Grenzen überwinden

# Komplexitätstheorie

## Was kann mit vertretbarem Aufwand gelöst werden?

- **Berechenbarkeitsanalyse alleine reicht nicht**
  - Klärt nur die Grundsatzfrage: berechenbar/entscheidbar oder nicht
  - Für praktische Lösbarkeit muß Berechnungsaufwand vertretbar sein
- **Typische Fragestellungen**
  - Wie schnell kann man Datensätze in großen Datenbanken finden?
    Bei 100 Milliarden Einträgen braucht man im Schnitt 50 Milliarden Schritte
    .. aber nur 37 Schritte, wenn Sortierungsschlüssel vorhanden sind
  - Warum ist eine https-Verbindung praktisch nicht zu knacken?
    - Mit dem richtigen Schlüssel ist die Kommunikation sehr schnell
    - Aber Angriffe auf die Verschlüsselung brauchen mindestens $10^{20}$ Schritte
  - Kann man eine Rundreise durch alle Knoten eines großen Graphen in akzeptaber Zeit planen?
    - Bisher nicht möglich, schon ab 70 Knoten ist es so gut wie unlösbar
    - Aber wenn jemand einen Vorschlag macht, kann man diesen leicht überprüfen

**Kann man den Aufwand möglichst genau analysieren?**

# Komplexität hängt von vielen Faktoren ab

- **Größe der Eingabe**
  - Sortieren von 100 Milliarden Einträgen dauert länger als 10000 Einträge
  - Bei kleinen Eingaben sind fast alle Lösungen eines Problems gleich gut
- **Berechnungsparadigma**
  - Deterministische sequentielle Algorithmen sind der Standard
  - Parallele, nichtdeterministische, probabilistische Algorithmen können oft erheblich effizienter sein
  - Echte parallele / nichtdeterministische Maschinen gibt es (bis jetzt) nicht
- **Berechnungsmodell (Programmiersprache / Hardware)**
  - Turingmaschinen sind ineffizienter als von-Neumann Architekturen
  - Imperative, funktionale, logische Sprachen sind unterschiedlich effizient
  - Unterschiede sind erheblich geringer als bei Berechnungsparadigmen
- **Art der betrachteten Ressource**
  - Zeitbedarf eines Algorithmus — Time
  - Speicherbedarf des Verfahrens (RAM, Harddisk) — Space
  - Netzzugriffe, Zugriff auf andere Medien, Stromverbrauch, ...

# Konsequenz für sinnvolle Komplexitätsanalysen

- **Komplexität sollte Funktion der Eingabegröße sein**
  - Wie stark wächst der Ressourcenaufwand relativ zur Größe des Problems?
- **Entscheidend ist die Komplexität der Algorithmen**
  - Hardwaresteigerungen bringen erstaunlich wenig
  - Wenn Algorithmen schlecht sind, nützt die beste Hardware wenig

    Auch 100000 Cores heben den Unterschied zwischen 50 Milliarden und 37 nicht auf
- **Die Meßgröße der Komplexität muß objektiv sein**
  - Unabhängig von konkreter Hardware und Programmiersprache, Optimierungsfähigkeiten des Compilers oder Auswahl der Testdaten
- **Genaue Analysen sind weder praktikabel noch sinnvoll**
  - Zu mühsam bei nichttrivialen Algorithmen
  - Zu abhängig von Programmierdetails und Maschinenmodell

**Komplexitätsmaße sollten von unwichtigen Details abstrahieren**

# Fragestellungen der Komplexitätstheorie

- **Wie analysiert man die Komplexität von Problemen?**
  - Formalismus zur Abschätzung oberer und unterer Schranken
  - Analysen auf der Basis abstrakter Algorithmen
- **Komplexitätsklassen**
  - Welche Probleme haben (in etwa) den gleichen Schwierigkeitsgrad?
  - Kann man effiziente Lösungen wiederverwenden? (Problemreduktion)
  - Was ist der Zusammenhang zwischen Platz- und Zeitbedarf?
- **Welche Probleme sind handhabbar?**
  - Wo liegt die Grenze?
  - Gibt es Probleme, die nicht effizient lösbar sind?
  - Lassen sich nichtdeterministische Lösungen effizient umsetzen?
  - Welche Verbesserung können unkonventionelle Ansätze erreichen? (approximierende, probabilistische Verfahren)

# Theoretische Informatik II

## Einheit 6.1


## Grundkonzepte der Komplexitätsanalyse


1. Komplexitätsmodelle
2. Komplexitätsklassen und -hierarchien
3. Analyse konkreter Probleme
4. Handhabbarkeit

# Abschätzung der Komplexität von Algorithmen

- **Formales Komplexitätsmodell basiert auf Turingmaschinen**
  - Bestimme Aufwand relativ zur Größe der Eingabe
    - $\boldsymbol{T_M(n)} = \max\{t_M(w) \mid |w|{=}n\}$ (worst-case)
    - $\boldsymbol{S_M(n)} = \max\{s_M(w) \mid |w|{=}n\}$ Einheit 5.1, Folie 7
  - Jedes andere (sequentielle) Maschinenmodell wäre genauso gut geeignet
  - Average-case Analysen würden zusätzlich statistische Modelle benötigen
- **Konkrete Analysen verwenden ein Einheitskostenmodell**
  - Vereinfachte (modellunabhängige) Zählung von Elementaroperationen
  - Operationen wie +, −, ∗,/,. . . gelten (bei fester Zahlengröße) als ein Schritt
  - Konstanter Expansionsfaktor bei Übersetzung in Turingmaschinen
- **Wichtig ist asymptotisches Verhalten für große Eingaben**
  - Komplexität wird als Größenordnung relativ zur Eingabegröße angegeben (logarithmisch, linear, quadratisch, exponentiell, ...)
  - Analyse kann additive Konstanten und konstante Faktoren ignorieren (lassen sich durch Hardwaresteigerungen ausgleichen)

# Die Mathematik asymptotischer Vergleiche

- **$g \leq_a f$ ("$f$ wächst asymptotisch schneller als $g$")**
  - Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $g(n) \leq f(n)$ für alle $n \geq n_0$

    *Ab einer bestimmten Stelle ist $f$ immer mindestens so groß wie $g$*

- **(Größen-)Ordnung einer Funktion**
  - $f$ als obere Schranke: $\mathcal{O}(f) = \{g{:}\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+ \mid \exists c{>}0.\ g \leq_a c{*}f\}$
  - $f$ als echte obere Schranke: $o(f) = \{g{:}\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+ \mid \forall c{>}0.\ g <_a c{*}f\}$
  - $f$ als untere Schranke: $\Omega(f) = \{g{:}\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+ \mid \exists c{>}0.\ c{*}f \leq_a g\}$
  - $f$ als exakte Schranke: $\Theta(f) = \{g{:}\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+ \mid \exists c, c'{>}0.\ c{*}f \leq_a g \leq_a c'{*}f\}$

  Schreibweisen auch: $\mathcal{O}(1) \hat{=} \mathcal{O}(\lambda n.1)$, $\mathcal{O}(n) \hat{=} \mathcal{O}(\lambda n.n)$, $\mathcal{O}(n^2) \hat{=} \mathcal{O}(\lambda n.n^2)\ldots$

- **Beispiele für Ordnung konkreter Funktionen**
  - Konstante Funktion: $g_1(n){=}k$ für alle $n$ — $g_1 \in \mathcal{O}(1)$
  - Polynome: $g_2(n){=}5n^3{+}2n^2+47$ — $g_2 \in \mathcal{O}(n^3)$

    Allgemein: $c_0{+}c_1{*}n{+}..{+}c_m{*}n^m \in \mathcal{O}(n^m)$
  - Logarithmenfunktionen: $g_3(n){=}log_{10}\, n$ — $g_3 \in \mathcal{O}(log_2 n)$
  - Fakultätsfunktion: $g_4(n){=}n!{=}1{*}2{*}..{*}n$ — $g_4 \in \mathcal{O}(n^n)$

# Komplexität von Maschinen und Sprachen

- **Komplexität einer Maschine $M$**
  - $M$ hat Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls $T_M \in \mathcal{O}(f)$
  - $M$ hat Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls $S_M \in \mathcal{O}(f)$
- **Komplexität einer Sprache ("eines Problems") $L$**
  - $L$ hat (deterministische) Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls es eine DTM $M$ mit $T_M \in \mathcal{O}(f)$ und $L = L(M)$ gibt
  - $L$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls es eine NTM $M$ mit $T_M \in \mathcal{O}(f)$ und $L = L(M)$ gibt
  - $L$ hat (nicht-)deterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)$, falls $L = L(M)$ für eine DTM (bzw. NTM) $M$ mit $S_M \in \mathcal{O}(f)$
  - Statt "Sprache $L$" wird oft auch "Problem $P$" oder "Menge $M$" benutzt
- **Komplexitätsklassen**

**TIME($f$)** $= \{L \mid L$ hat deterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

**NTIME($f$)** $= \{L \mid L$ hat nichtdeterministische Zeitkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

**SPACE($f$)** $= \{L \mid L$ hat deterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

**NSPACE($f$)** $= \{L \mid L$ hat nichtdeterministische Platzkomplexität $\mathcal{O}(f)\}$

# Wichtige Komplexitätsklassen

- $\mathcal{LOGSPACE} = \bigcup_k \mathcal{SPACE}(\log_2^k n)$

  Klasse der mit logarithmischem (Berechnungs-)Platz lösbaren Probleme
- $\mathcal{P} = \bigcup_k \mathcal{TIME}(n^k)$

  Klasse der in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
- $\mathcal{NP} = \bigcup_k \mathcal{NTIME}(n^k)$

  Nichtdeterministisch in polynomieller Zeit lösbare Probleme
- $\mathcal{PSPACE} = \bigcup_k \mathcal{SPACE}(n^k)$

  Klasse der in polynomieller Platz lösbaren Probleme
- $\mathcal{NPSPACE} = \bigcup_k \mathcal{NSPACE}(n^k)$

  Nichtdeterministisch in polynomieller Platz lösbare Probleme
- $\mathcal{EXPTIME} = \bigcup_k \mathcal{TIME}(2^{(n^k)})$

  Klasse der in exponentieller Zeit lösbaren Probleme

**Wie stehen diese Klassen zueinander?**

# Zeit- vs. Platzkomplexität

- $\boldsymbol{DTIME(f) \subseteq NTIME(f)}$
  - NTMs sind mindestens genauso effizient wie DTMs
- $\boldsymbol{DSPACE(f) \subseteq NSPACE(f)}$
  - Gleiches Argument
- $\boldsymbol{NTIME(f) \subseteq DSPACE(f)}$
  - In Zeit $\mathcal{O}(f)$ kann man maximal $\mathcal{O}(f)$ Speicherzellen verwenden
- $\boldsymbol{NSPACE(f) \subseteq DTIME(2^f)}$ (falls $f \in \Omega(\log_2 n)$)
  - Eine terminierende Maschine, die maximal $f(n)$ Bandzellen aufsucht, terminiert nach maximal $|\Gamma|^{f(n)} * |Q| * f(n)$ Schritten

    (Zahl der Konfigurationen = Bandinhalte $*$ Zustände $*$ Kopfpositionen)
- **Hierarchie der wichtigsten Komplexitätsklassen**
  - $\boldsymbol{LOGSPACE \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME \subseteq \ldots}$
  - Es wird vermutet, daß alle Inklusionen echt sind

# Komplexitätsanalyse konkreter Probleme

**Wie effizient ist ein Problem lösbar?**

- **Obere Schranke: Analyse von Lösungsalgorithmen**
  - Problem ist maximal so schwer wie der beste bekannte Algorithmus
  - Mathematische Analyse spezifischer Algorithmen ist aufwendig
  - Häufig reicht eine Abschätzung auf Basis der Algorithmenidee
- **Untere Schranke: Mindestzahl notwendiger Operationen**
  - Zeigt an, ob ein Lösungsalgorithmus optimal ist

    Weitere Optimierungen können sich auf Details konzentrieren
  - Analyse aufwendig, da selten klar ist was wirklich notwendig ist
- **Oft gibt es Lücken zwischen oberer und unterer Schranke**
  - Es ist unklar, ob der beste bekannte Algorithmus optimal ist
  - Häufig: Algorithmus muß gezielt nach Lösung des Problems suchen

    und Suche nach Lösung ist aufwendiger als ihre Konstruktion

# Analyse konkreter Algorithmen: Binärsuche

*Liste* `L` *muß sortiert sein*

```
function search_bin(x,L) ≡
   let function search_b(x,L,left,right) ≡
      if left>right then return false
         else
            mid := (left+right) div 2;
            if x<L[mid] then search_b(x,L,left,mid-1)
               elseif x>L[mid] then search_b(x,L,mid+1,right)
               else return true
            fi;
   return search_b(x,L,1,length(L))
```

---

– Anzahl von Operationen pro Aufruf von $\texttt{search}_b$ ist eine Konstante $k$
  Anzahl der Aufrufe von $\texttt{search}_b$ ist entscheidend für Komplexität

– Abstand von `left` und `right` halbiert sich pro Aufruf (mit Abrundung)

– Abstand zu Beginn ist $n-1$ ($n$ ist die Größe der Liste $L$)

– $\texttt{search}_b$ terminiert bei Erfolg oder wenn Abstand Null ist
  Lösung der Gleichung $time(n) = k+time(\lfloor n/2 \rfloor)$ ist $time(n) = k * \log_2 n$

$$\Downarrow$$

**Binäre Suche ist in $\mathcal{O}(\log_2 n)$**

## Abstrakte Algorithmenskizze reicht für Laufzeitanalyse

- **Identifiziere Läufe (geordnete Teilfolgen) in der Liste**

| 9 | 7 | 8 | 2 | 1 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|

- **Verschmelze Läufe zu neuen Läufen**

| 9 | 7 | 8 | 2 | 1 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 5 | 6 |

  – Verschmelzen liegt in $\mathcal{O}(n)$ (Liste wird jeweils komplett durchlaufen)
  – Verschmelzen halbiert Anzahl der Läufe (je zwei werden gemischt)

- **Wiederhole bis Liste geordnet ist**

| 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

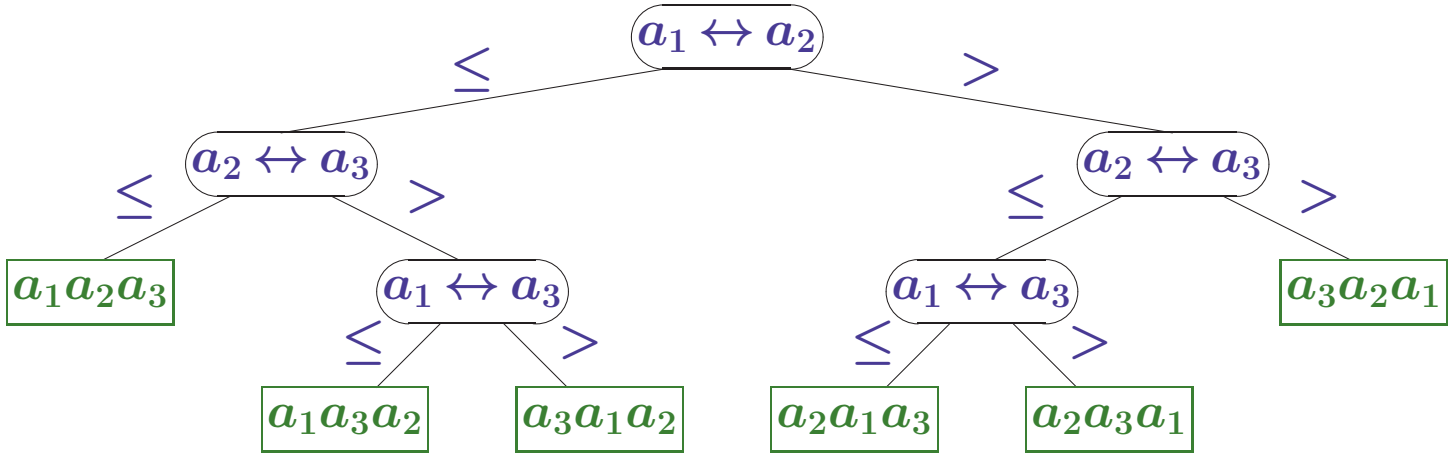
  – Am Ende ist ein einziger Lauf übrig, d.h. die Liste ist sortiert
  – Man braucht maximal $\log_2 n$ Verschmelzungszyklen

**Sortieren durch Verschmelzen ist in $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$**

# Analyse unteren Schranken: Sortieren

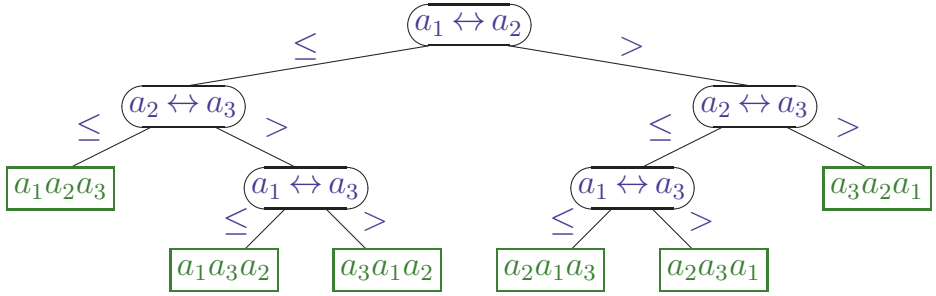
**Geht sortieren schneller als $\mathcal{O}(n * \log_2 n)$?**

- **Sortierverfahren müssen Elemente vergleichen**
  - Sonst kann die Anordnung der Elemente nicht garantiert werden
  - Wieviel Vergleiche werden benötigt um $a_1, .., a_n$ zu ordnen?
  - Bestimme Anzahl der Vergleiche für den ungünstigsten Fall
- **Betrachte Entscheidungsbaum von Algorithmen**




  - Innere Knoten entsprechen den durchgeführten Vergleichen
  - Kanten markiert mit Vergleichergebnis ($\leq$,$>$)
  - Blätter sind resultierende Anordnung der Elemente

# Analyse unteren Schranken: Sortieren (II)




- **Jeder Algorithmus entspricht einem Entscheidungsbaum**
  - – Abarbeitung für konkrete Eingaben entspricht einem Ast im Baum
  - – Konkrete Laufzeit des Algorithmus entspricht Länge des Astes
  - – Komplexität des Algorithmus entspricht Tiefe des Entscheidungsbaumes

  Komplexität von Sortieren $\equiv$ minimale Tiefe von Entscheidungsbäumen
- **Wie tief ist ein Entscheidungsbaum?**
  - – Jeder Entscheidungsbaum für hat $a_1, .., a_n$ hat $n!$ Blätter
  - – Ein binärer Baum der Tiefe $k$ hat maximal $2^k$ Blätter
  - – Jeder Entscheidungsbaum hat mindestens Tiefe $\log_2 n!$
  - – $\log_2 n! = \log_2(\Pi_{i=1}^{n} i) = \Sigma_{i=1}^{n} \log_2 i \geq \Sigma_{i=n/2}^{n} \log_2(n/2) = n/2 * (\log_2 n - 1)$

**Sortieren ist in $\Omega(n * \log_2 n)$**

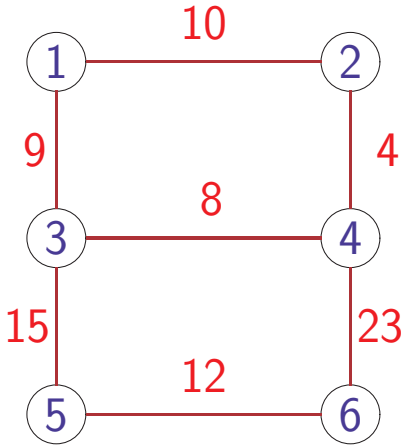
# Komplexität häufiger Problemstellungen

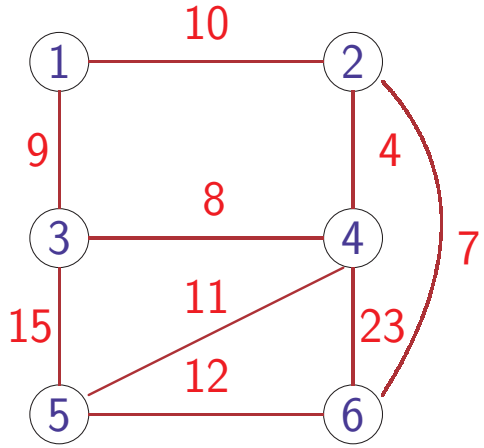
- **Arithmetik auf großen ($k$-stelligen) Zahlen**
  - Addition: Einstellig von rechts nach links mit Übertrag $\mathcal{O}(k)$
  - Multiplikation: Jede Stelle muß mit jeder multipliziert werden $\mathcal{O}(k^2)$
  - Division: Schriftliche Division von links nach rechts $\mathcal{O}(k^2)$
- **Matrixmultiplikation $n \times n$-Matrizen** $\mathcal{O}(n^3)$
- **Berechnung von $n!$** $\Theta(n^2 * (\log_2 n)^2)$
  - Obergrenze: $n$-fache Multiplikation von $n$ und $n!$: $n * \log_2 n * \log_2(n^n)$
  - Untergrenze: $n/2$-fach $n/2 * (n/2)!$: $n/2 * \log_2(n/2) * n/4 * (\log_2 n - 2)$
- **Primzahltest bei $k$-stelligen Zahlen** $\mathcal{O}(k^{12})$
  - AKS Algorithmus auf Basis tiefer mathematischer Einsichten (2002)
  - Alle früheren Verfahren waren exponentiell
  - Alle bekannten Faktorisierungsverfahren sind exponentiell
  - Ergebnis gut für offene kryptographische Systeme (wähle $k > 500$)

# Das Problem des Handlungsreisenden

*Gegeben $n$ Städte, eine Kostentabelle von Kosten $c_{ij}$ um von Stadt $i$ nach Stadt $j$ zu reisen und eine Kostenbeschränkung $B$. Gibt es eine Rundreise durch alle $n$ Städte, deren Kosten unter dem Limit $B$ liegt?*

- **Formulierung als Graphenproblem** ↦ Handout Graphentheorie
  - Ein Hamiltonscher Kreis im Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis, der nur aus Kanten aus $E$ besteht und jeden Knoten genau einmal berührt.
  - **TSP**: Finde einen Hamiltonschen Kreis mit Kosten maximal $B$




Nur eine Rundreise: [1,3,5,6,4,2]

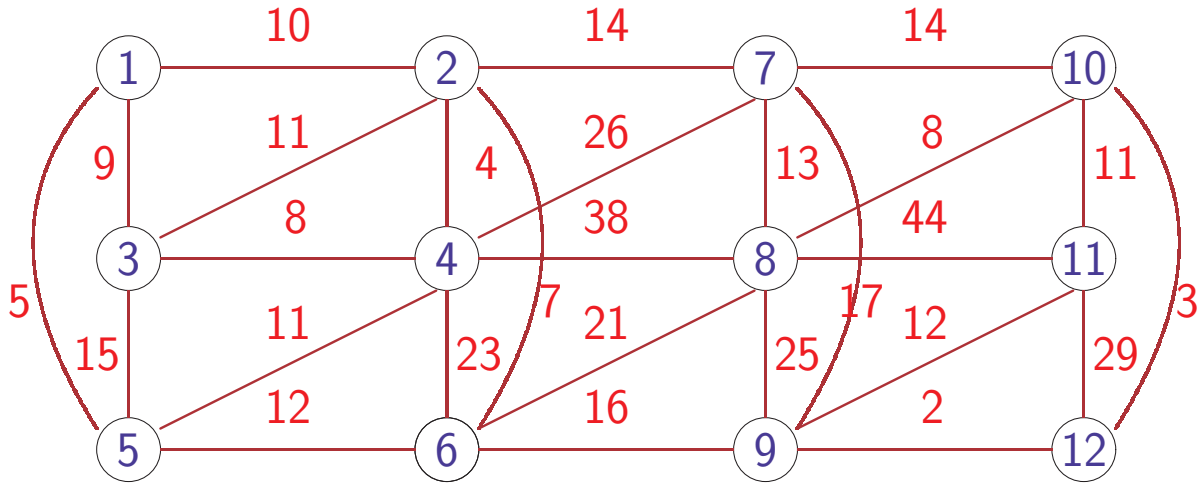
Kosten: 73

Mehrere Rundreisen möglich

Kosten von [1,2,6,5,4,3] sind 57

# Was ist die Komplexität des TSP-Problems?

- **Graphen können sehr komplex sein**




- **Einziger allgemeiner Algorithmus ist "Generate & Test"**
  - Test ist linear, aber es gibt exponentiell viele Möglichkeiten
  - Es ist kein besserer Lösungsalgorithmus bekannt

**Ist das TSP noch effizient handhabbar?**

# Rechenzeit: Wo liegt die Grenze des Handhabbaren?

| Rechenzeiten auf 3.3 Ghz Prozessor | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Größe $n$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | ... | 1000 | 1 Mio | 100 Mrd |
| Wachstum | | | | | | | | | | |
| $\log_2 n$ | 1ns | | | | | 2ns | | 3ns | 6ns | 12ns |
| $n$ | 3ns | 6ns | 9ns | 12ns | 15ns | 18ns | | 300ns | 300$\mu$s | 30s |
| $n*\log_2 n$ | 10ns | 25ns | 45ns | 65ns | 85ns | 110ns | | 3$\mu$s | 6ms | 18m |
| $n^2$ | 30ns | 120ns | 270ns | 480ns | 750ns | 1.1$\mu$s | | 300$\mu$s | 300s | 950y |
| $n^3$ | 300ns | 2.4$\mu$s | 8.1$\mu$s | 19.2$\mu$s | 37.5$\mu$s | 64$\mu$s | | 300ms | 9.5y | |
| $2^n$ | 300ns | 300$\mu$s | 300ms | 300s | 83.3h | 9.5y | | | | |
| $3^n$ | 17.8$\mu$s | 1.1s | 17.3h | 116y | 2.5Mrd y | | | | | |

**Wieviel mehr kann man in der gleichen Zeit berechnen, wenn Computer um den Faktor 1000 schneller werden?**

| | $\log_2$n | $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $2^n$ | $3^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Problemsteigerung | $10^{300}$-fach | 1000-fach | 31-fach | 10-fach | plus 10 | plus 6 |

# Konsequenz für Handhabbarkeit von Problemen

- **Investitionen in Hardware helfen nur beschränkt**
  - Wenn ein Algorithmus nicht in polynomieller Zeit läuft, nutzt auch ein Hochleistungsrechner nichts
  - Es lohnt sich, in die Verbesserung von Algorithmen zu investieren
    Geeignetere Datenstrukturen, bessere Suchstrukturen,
    Grundsätzlich neue Zugänge (out-of-the-box Denken)
  - Lohnenswert sind Verbesserungen um mindestens eine Größenordnung
    z.B. von $\mathcal{O}(n^3)$ auf $\mathcal{O}(n^2)$ auf $\mathcal{O}(n*\log n)$ oder von $\mathcal{O}(2^n)$ auf $\mathcal{O}(2^{\sqrt{n}})$
- **Polynomielle Lösbarkeit ist entscheidend**
  - Ein Problem gilt als handhabbar, wenn es in $\mathcal{P}$ liegt
  - Unterschiede innerhalb polynomieller Komplexität sind tolerierbar aber durchaus relevant für konkrete Implementierungen
  - Exponentieller Aufwand ist für die Praxis unakzeptabel