

# Theoretische Informatik II

## Einheit 6.3

### $\mathcal{NP}$ -vollständige Probleme



1. Logische Probleme
2. Graphbasierte Probleme
3. Scheduling Probleme

## Direkter Beweis ist zu aufwendig

- Würde explizite Codierung beliebiger NTMs erfordern
- Verwende  $L \in \mathcal{NPC} \Leftrightarrow L \in \mathcal{NP} \wedge \exists L' \in \mathcal{NPC}. L' \leq_p L$

## Direkter Beweis ist zu aufwendig

- Würde explizite Codierung beliebiger NTMs erfordern
- Verwende  $L \in \mathcal{NPC} \Leftrightarrow L \in \mathcal{NP} \wedge \exists L' \in \mathcal{NPC}. L' \leq_p L$

### 1. Zeige $L \in \mathcal{NP}$ :

- a) Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag die OTM generiert
- b) Beschreibe, wie Lösungsvorschlag deterministisch überprüft wird
- c) Zeige, daß das Prüfverfahren polynomiell ist

## Direkter Beweis ist zu aufwendig

- Würde explizite Codierung beliebiger NTMs erfordern
- Verwende  $L \in \mathcal{NPC} \Leftrightarrow L \in \mathcal{NP} \wedge \exists L' \in \mathcal{NPC}. L' \leq_p L$

### 1. Zeige $L \in \mathcal{NP}$ :

- Beschreibe, welchen Lösungsvorschlag die OTM generiert
- Beschreibe, wie Lösungsvorschlag deterministisch überprüft wird
- Zeige, daß das Prüfverfahren polynomiell ist

### 2. Zeige $\exists L' \in \mathcal{NPC}. L' \leq_p L$ :

- Wähle ein ähnliches, bekannt  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem  $L'$
- Beschreibe Transformationsfunktion  $f$ , welche Eingaben über dem Alphabet  $\Sigma'$  für  $L'$  in Wörter über dem Alphabet für  $L$  umwandelt
- Zeige für alle  $x \in \Sigma'^*$ :  $x \in L' \Leftrightarrow f(x) \in L$  (d.h.  $L' = f^{-1}(L)$ )
- Zeige, daß  $f$  in polynomieller Zeit berechnet werden kann

# 3SAT IST NP-VOLLSTÄNDIG

$$3SAT = \{k_1, \dots, k_m \mid k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3} \text{ mit } z_{ij} \in \{x_1, \overline{x_1}, \dots, x_n, \overline{x_n}\} \\ \wedge \exists a_1, \dots, a_n \in \{0, 1\}. \forall j \leq m. a_1, \dots, a_n \text{ erfüllt } k_j\}$$

## 1. Es gilt $3SAT \in \mathcal{NP}$ :

Begründung analog zu  $SAT \in \mathcal{NP}$

- a) Generiere Belegung der Variablen als Lösungsvorschlag ✓
- b) Werte Klauseln aus ✓
- c) Auswertung benötigt lineare Zeit ✓

## 2. Es gilt $SAT \leq_p 3SAT$ :

§6.2 Folie 10

- d) Wähle  $SAT$  als bekanntes  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Ausgangsproblem ✓
- e) Reduktionsfunktion  $f$  normalisiert jede der Klauseln  $k_1, \dots, k_m$  ✓
- f) Es gilt  $\forall F. F \in SAT \Leftrightarrow f(F) \in 3SAT$  ✓
- g) Aufwand für Normalisierung der Klauseln ist linear ✓

Wegen  $SAT \in \mathcal{NPC}$  ist damit auch  $3SAT \in \mathcal{NPC}$

# GRAPHBASIERTE PROBLEME

- **Viele Probleme lassen sich gut mit Graphen formalisieren**
  - Travelling Salesman: Suche Kreis in gewichtetem Graphen
  - Soziale Netze: Suche vollständig verbundenen Teilgraphen
  - Netzwerküberwachung: Suche Überdeckung aller Kanten eines Graphen
- **Graphen haben Knoten und Kanten** (“ $G = (V, E)$ ”)
  - Eine Kante  $e \in E$  zwischen zwei Knoten  $v \neq v' \in V$  kann **gerichtet** ( $e = (v, v')$ ) oder **ungerichtet** ( $e = \{v, v'\}$ ) sein
  - $E$  ist beschreibbar als Liste  $v_1, \dots, v_n, \{v_{i_1}, v'_{i_1}\}, \dots, \{v_{i_m}, v'_{i_m}\}$
  - Die **Größe des Graphen** ist  $|V| + |E|$  (meist überwiegt  $|E|$ )
  - In **gewichteten** Graphen ist jede Kante mit einer Zahl markiert
  - **Bäume** sind **zyklenfreie** ungerichtete Graphen

Mehr im Handout Graphentheorie

# DAS CLIQUEN PROBLEM

Gibt es in einem Graphen  $G=(V, E)$  eine Clique der Mindestgröße  $k$ ?

**CLIQUE** =  $\{ (G, k) \mid G=(V, E) \text{ Graph} \wedge \exists V_c \subseteq V. |V_c| \geq k \wedge V_c \text{ Clique in } G \}$

# DAS CLIQUEN PROBLEM

Gibt es in einem Graphen  $G=(V, E)$  eine Clique der Mindestgröße  $k$ ?

**CLIQUE** =  $\{ (G, k) \mid G=(V, E) \text{ Graph} \wedge \exists V_c \subseteq V. |V_c| \geq k \wedge V_c \text{ Clique in } G \}$

## 1. Zeige **CLIQUE** $\in \mathcal{NP}$ :

Gegeben ein Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \leq |V|$

a) Generiere eine Knotenmenge  $V_c \subseteq V$

b/c) Prüfe  $|V_c| \geq k$

*maximal  $|V_c|$  Schritte*

Prüfe ob  $V_c$  vollständig verbunden ist

d.h.  $\forall v \neq v' \in V_c. \{v, v'\} \in E$

*maximal  $|V_c|^2 * |E| \leq |V|^4$  Schritte*

# DAS CLIQUEN PROBLEM

Gibt es in einem Graphen  $G=(V, E)$  eine Clique der Mindestgröße  $k$ ?

**CLIQUE** =  $\{ (G, k) \mid G=(V, E) \text{ Graph} \wedge \exists V_c \subseteq V. |V_c| \geq k \wedge V_c \text{ Clique in } G \}$

## 1. Zeige **CLIQUE** $\in \mathcal{NP}$ :

Gegeben ein Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \leq |V|$

a) Generiere eine Knotenmenge  $V_c \subseteq V$

b/c) Prüfe  $|V_c| \geq k$

*maximal  $|V_c|$  Schritte*

Prüfe ob  $V_c$  vollständig verbunden ist

d.h.  $\forall v \neq v' \in V_c. \{v, v'\} \in E$

*maximal  $|V_c|^2 * |E| \leq |V|^4$  Schritte*

## 2. Zeige **3SAT** $\leq_p$ **CLIQUE**:

– Transformiere Klauseln in Menge von Knoten eines Graphen

– Verbinde Knoten verschiedener Klauseln, die sich nicht widersprechen

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS CLIQUENPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$$

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS CLIQUENPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$$

$$\begin{array}{c} k_1 \\ x_3^\circ \\ \\ \overline{x_2}^\circ \\ \\ x_1^\circ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} k_2 \\ \circ \overline{x_1} \\ \\ \circ x_2 \\ \\ \circ \overline{x_4} \end{array}$$

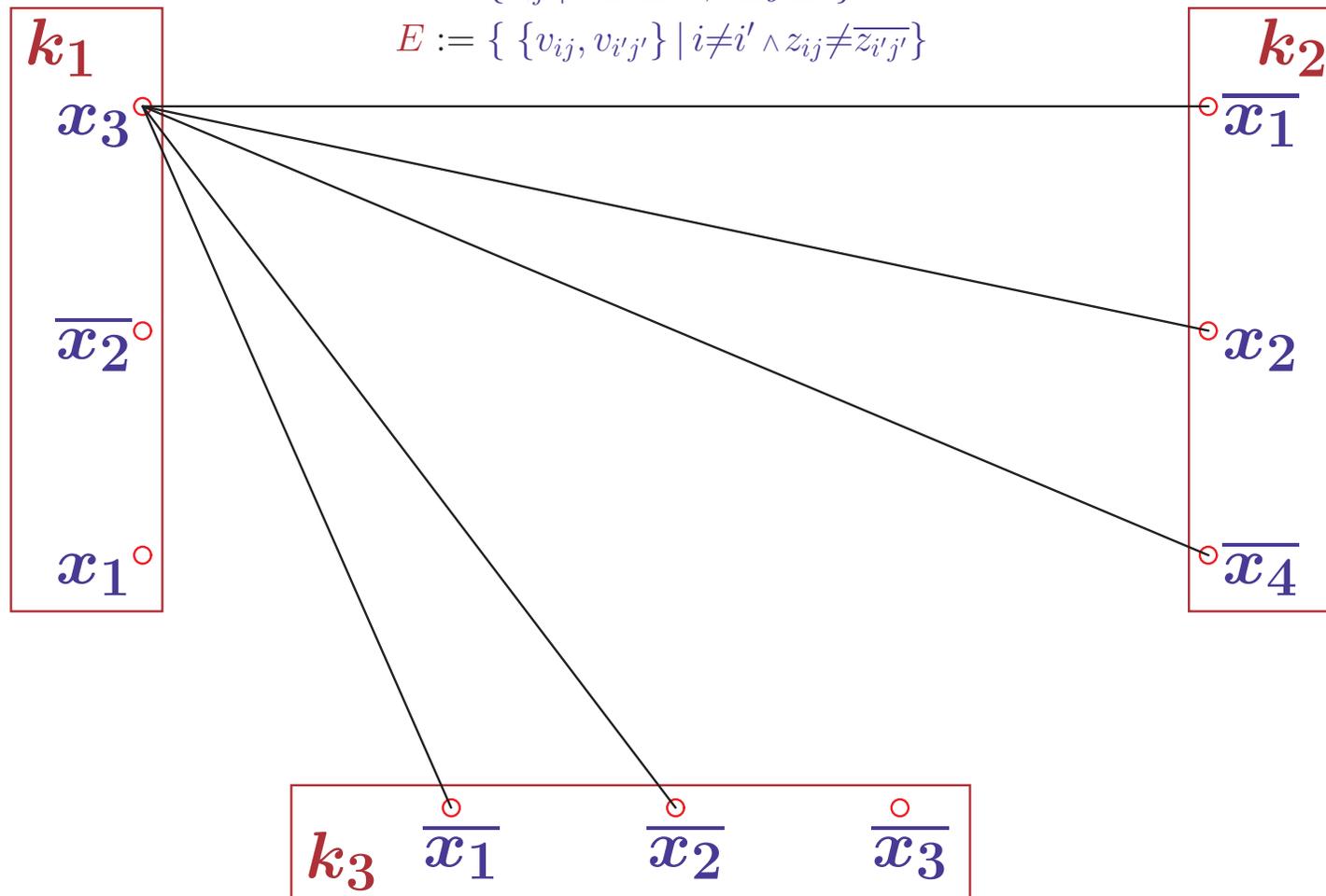
$$k_3 \quad \overset{\circ}{\overline{x_1}} \quad \overset{\circ}{\overline{x_2}} \quad \overset{\circ}{\overline{x_3}}$$

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS CLIQUENPROBLEM

$F = (k_1, k_2, k_3)$  mit  $k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$   $k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$   $k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

$$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$$

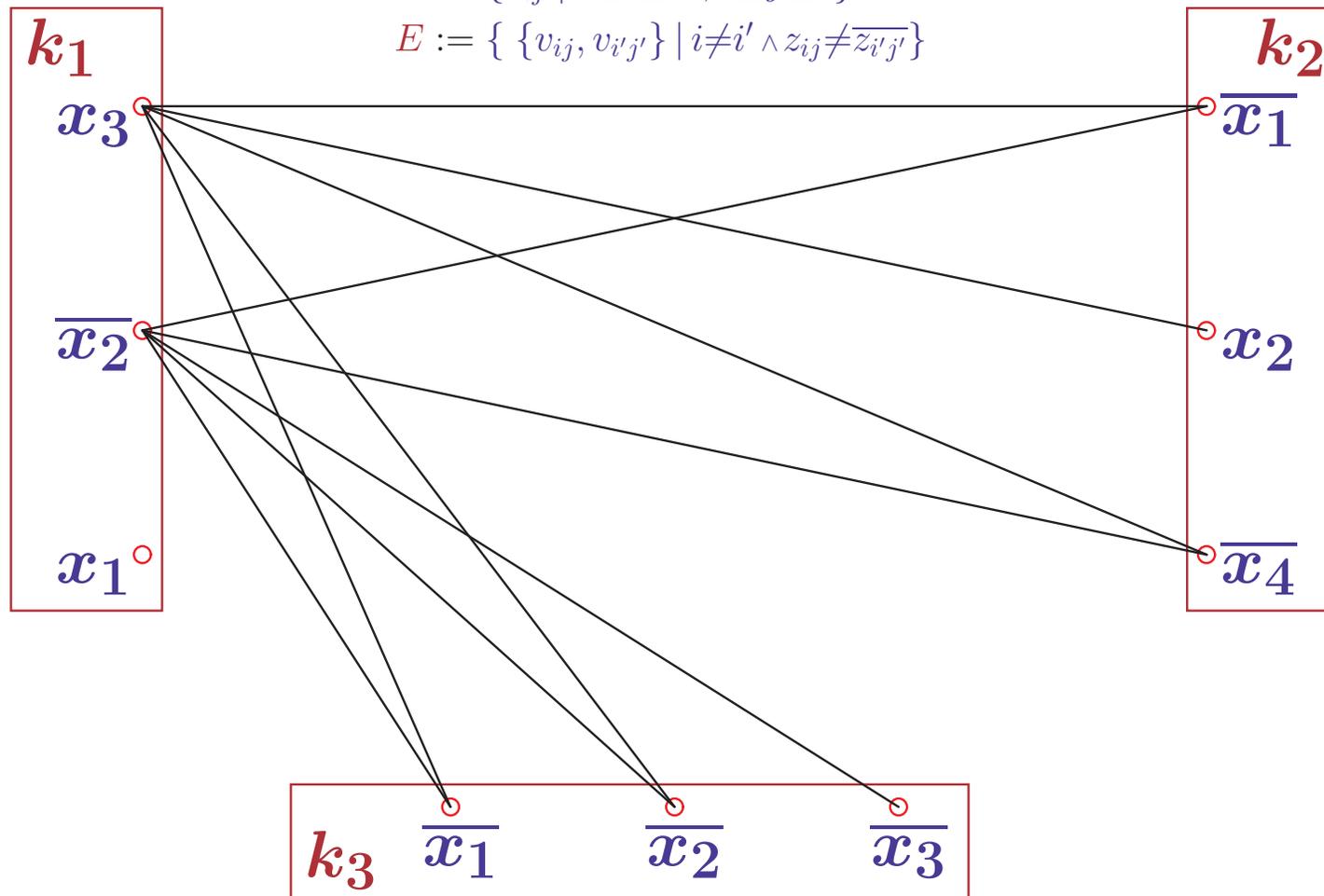


# CODIERUNG EINER FORMEL ALS CLIQUENPROBLEM

$F = (k_1, k_2, k_3)$  mit  $k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$   $k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$   $k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

$$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$$

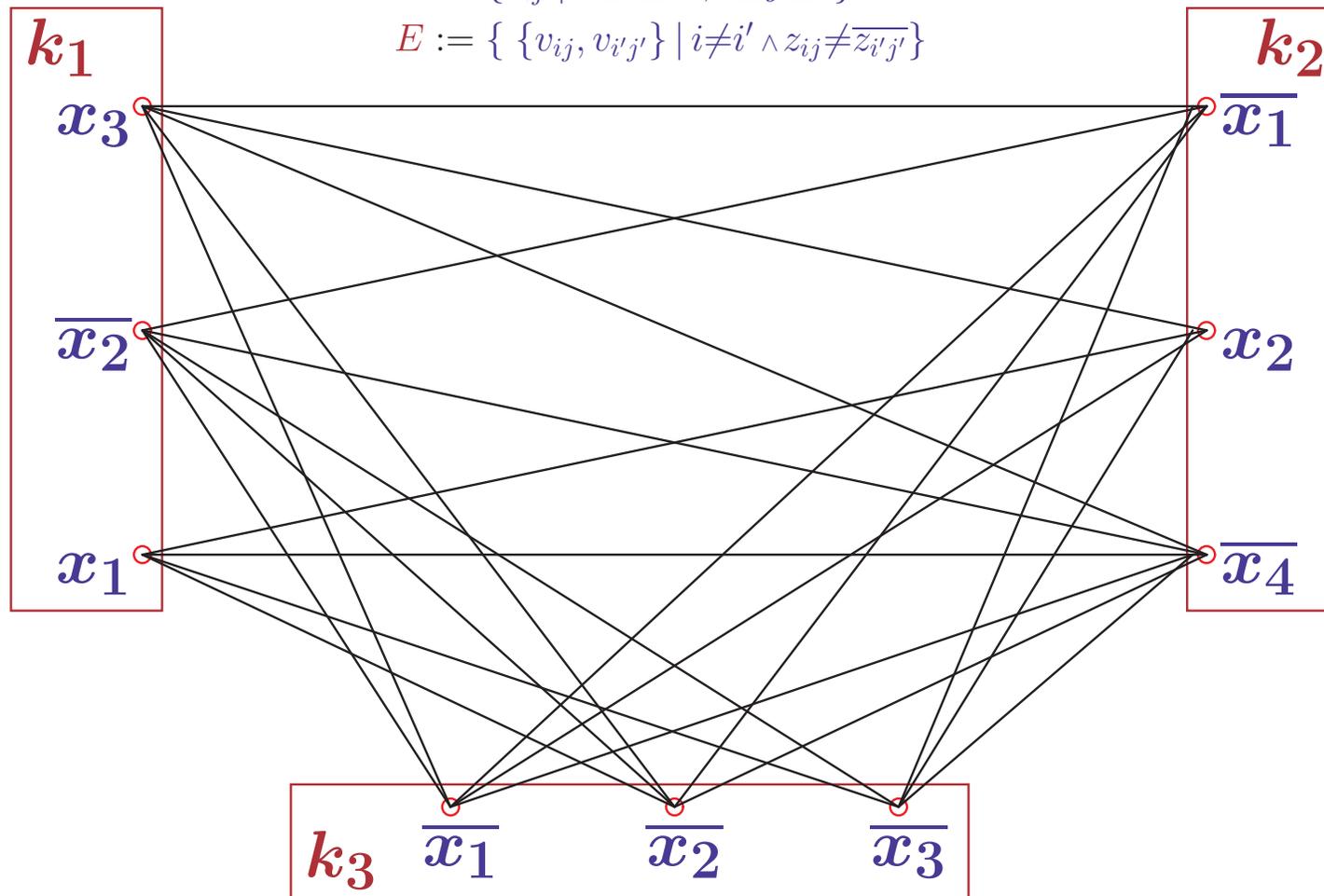


# CODIERUNG EINER FORMEL ALS CLIQUENPROBLEM

$F = (k_1, k_2, k_3)$  mit  $k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$   $k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$   $k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

$$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$$

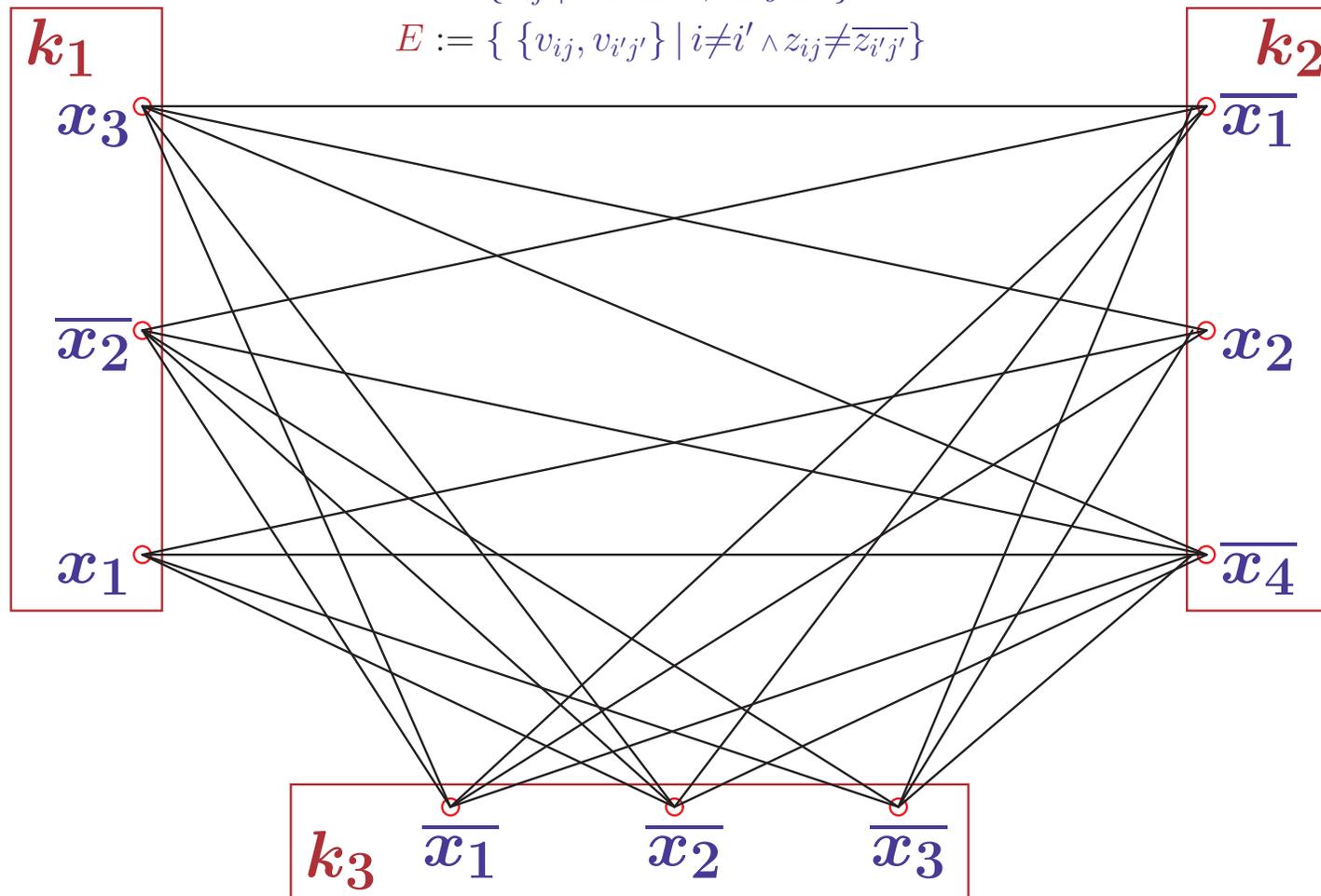


# CODIERUNG EINER FORMEL ALS CLIQUENPROBLEM

$F = (k_1, k_2, k_3)$  mit  $k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$   $k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$   $k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

$$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$$



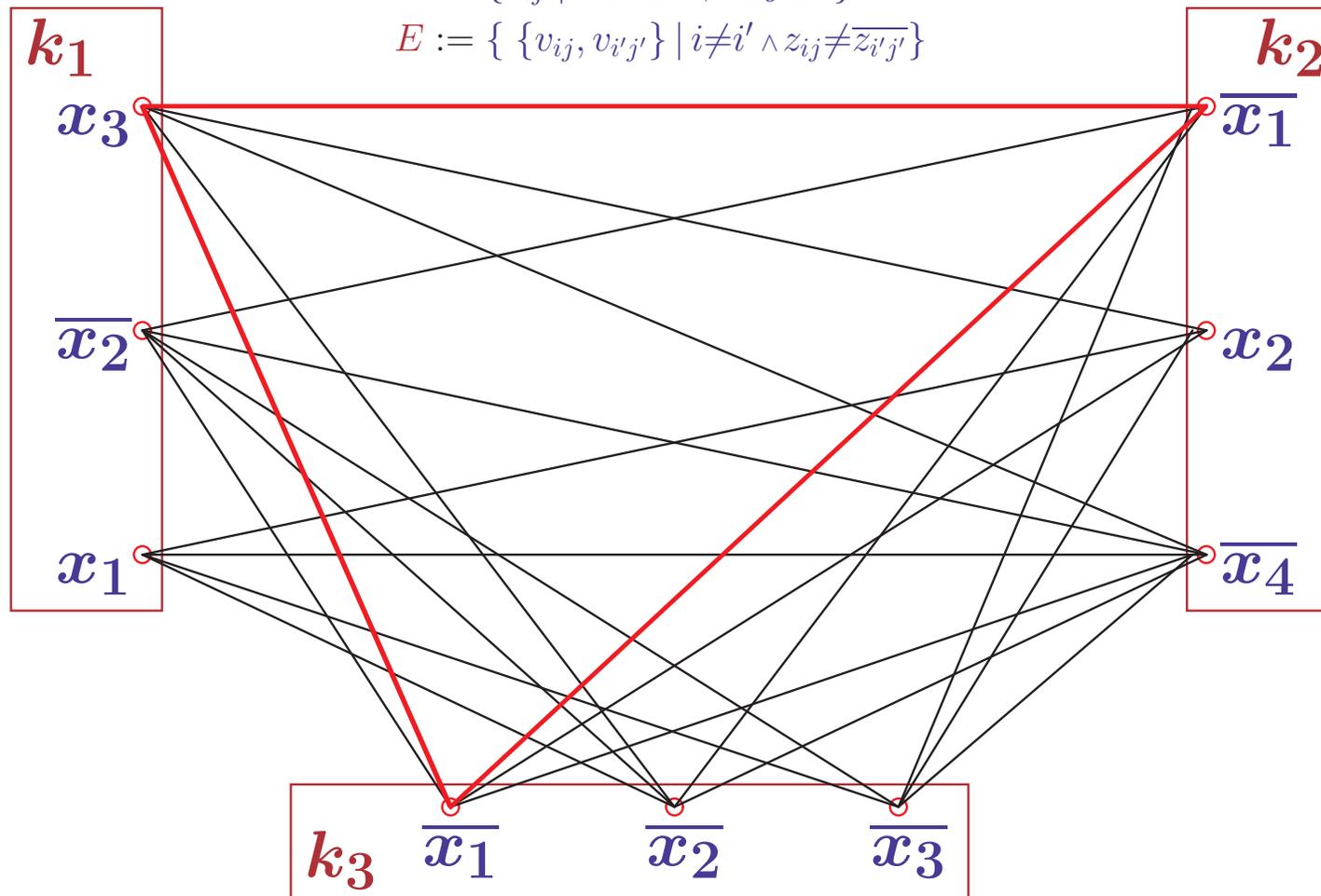
Gibt es in dem Graphen eine 3-Clique?

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS CLIQUENPROBLEM

$F = (k_1, k_2, k_3)$  mit  $k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$   $k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}$   $k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$

$$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$$



Gibt es in dem Graphen eine 3-Clique?

## TRANSFORMATION $3SAT \mapsto CLIQUE$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \overline{x_n}\}$

Setze  $f(F) := (G_F, m)$  mit  $G_F := (V, E)$ , wobei

$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$  und  $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$

Zeige  $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in CLIQUE$

## TRANSFORMATION $3SAT \mapsto CLIQUE$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \overline{x_n}\}$

Setze  $f(F) := (G_F, m)$  mit  $G_F := (V, E)$ , wobei

$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$  und  $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$

Zeige  $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in CLIQUE$

Es sei  $F \in 3SAT$ . Dann gibt es eine erfüllende Belegung der  $z_{ij}$

– Wähle aus jeder Klausel  $k_i$  ein Literal mit dem Wert 1

– Dann bilden die zugehörigen Knoten eine  $m$ -Clique in  $G_F$

Also gilt  $f(F) \in CLIQUE$

## TRANSFORMATION $3SAT \mapsto CLIQUE$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \overline{x_n}\}$

Setze  $f(F) := (G_F, m)$  mit  $G_F := (V, E)$ , wobei

$V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$  und  $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$

Zeige  $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in CLIQUE$

Es sei  $F \in 3SAT$ . Dann gibt es eine erfüllende Belegung der  $z_{ij}$

– Wähle aus jeder Klausel  $k_i$  ein Literal mit dem Wert 1

– Dann bilden die zugehörigen Knoten eine  $m$ -Clique in  $G_F$

Also gilt  $f(F) \in CLIQUE$

Sei umgekehrt  $f(F) \in CLIQUE$

– Dann hat  $G_F$  eine  $m$ -Clique  $V_c$ , d.h.  $\{v_{ij}, v_{i'j'}\} \in E$  für alle  $v_{ij} \neq v_{i'j'} \in V_c$

– Per Konstruktion von  $E$  enthält  $V_c$  für jedes  $i$  genau einen Knoten  $v_{ij}$

und für je zwei Knoten  $v_{ij}, v_{i'j'} \in V_c$  gilt  $z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}}$

– Belegen aller zu  $v_{ij} \in V_c$  gehörigen  $z_{ij}$  mit 1

ist widerspruchsfrei möglich und erfüllt alle Klauseln  $k_i$

Also gilt  $F \in 3SAT$

# *CLIQUE* IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG (SUMMARISCHER BEWEIS)

***CLIQUE*** =  $\{ (G, k) \mid G=(V, E) \text{ Graph} \wedge \exists V_c \subseteq V. |V_c| \geq k \wedge V_c \text{ Clique in } G \}$

## 1. *CLIQUE* $\in \mathcal{NP}$ :

- Generiere eine Knotenmenge  $V_c \subseteq V$
- Prüfe  $|V_c| \geq k$  und  $\forall v \neq v' \in V_c. \{v, v'\} \in E$
- Die Tests sind in maximal  $|V_c|$  bzw.  $|V_c|^2 * |E| \leq |V|^4$  Schritten, also in polynomieller Zeit, durchführbar

## 2. $3SAT \leq_p CLIQUE$ :

- Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \overline{x_n}\}$   
Konstruiere Graphen  $G_F := (V, E)$  mit  $V := \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}$   
und  $E := \{ \{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid i \neq i' \wedge z_{ij} \neq \overline{z_{i'j'}} \}$ . Setze  $f(F) := (G_F, m)$
- Dann gilt  $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in CLIQUE$  (siehe vorige Folie)
- $V$  ist mit linearem und  $E$  mit quadratischem Aufwand konstruierbar  
also ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar

**Wegen  $3SAT \in \mathcal{NPC}$  ist damit auch  $CLIQUE \in \mathcal{NPC}$**

# DAS VERTEX COVER PROBLEM

Gibt es im Graphen  $G$  eine Knotenüberdeckung maximaler Größe  $k$ ?

$$VC = \{(G, k) \mid G \text{ Graph} \wedge \exists V' \subseteq V. |V'| \leq k \wedge V' \text{ Knotenüberdeckung von } G\}$$

## 1. Zeige $VC \in \mathcal{NP}$ :

Gegeben ein Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \leq |V|$

a) Generiere eine Knotenmenge  $V' \subseteq V$

b/c) Prüfe  $|V'| \leq k$  *maximal  $|V'|$  Schritte*

Prüfe ob aus jeder Kante in  $G$  mindestens ein Knoten in  $V'$  liegt

d.h.  $\forall \{v, v'\} \in E. v \in V' \vee v' \in V'$  *maximal  $|V'| * |E| \leq |V|^3$  Schritte*

# DAS VERTEX COVER PROBLEM

Gibt es im Graphen  $G$  eine Knotenüberdeckung maximaler Größe  $k$ ?

$$VC = \{(G, k) \mid G \text{ Graph} \wedge \exists V' \subseteq V. |V'| \leq k \wedge V' \text{ Knotenüberdeckung von } G\}$$

## 1. Zeige $VC \in \mathcal{NP}$ :

Gegeben ein Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \leq |V|$

a) Generiere eine Knotenmenge  $V' \subseteq V$

b/c) Prüfe  $|V'| \leq k$  *maximal  $|V'|$  Schritte*

Prüfe ob aus jeder Kante in  $G$  mindestens ein Knoten in  $V'$  liegt

d.h.  $\forall \{v, v'\} \in E. v \in V' \vee v' \in V'$  *maximal  $|V'| * |E| \leq |V|^3$  Schritte*

## 2. Zeige $CLIQUE \leq_p VC$ :

Wenn  $V_c$  eine Clique in  $G$  ist, dann sind alle Knoten in  $V_c$  durch eine Kante aus  $E$  verbunden. Also haben alle Nicht-Kanten (aus  $E^c$ )

mindestens einen Knoten außerhalb von  $V_c$  bzw. innerhalb von  $V - V_c$ .

Damit bildet  $V - V_c$  eine Knotenüberdeckung im Komplementärgraphen.

Transformiere  $(G, k)$  in  $(G^c, |V| - k)$

# REDUZIERBARKEIT: $\text{CLIQUE} \leq_p \text{VERTEX COVER}$

## e) Definiere Reduktionsfunktion $f$

– Wähle  $f(G, k) := (G^c, |V| - k)$

# REDUZIERBARKEIT: CLIQUE $\leq_p$ VERTEX COVER

## e) Definiere Reduktionsfunktion $f$

– Wähle  $f(G, k) := (G^c, |V| - k)$

## f) Korrektheit der Transformation

Es ist  $V_c$  ist Clique in  $G = (V, E)$

$\Leftrightarrow \forall v, v' \in V_c. v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E$  (Definition)

$\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \notin E. v \neq v' \Rightarrow v \notin V_c \vee v' \notin V_c$  (Kontraposition)

$\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E^c. v \in V - V_c \vee v' \in V - V_c$  (Positive Formulierung)

$\Leftrightarrow V - V_c$  Knotenüberdeckung des Komplementgraphen  $G^c = (V, E^c)$

# REDUZIERBARKEIT: $CLIQUE \leq_p VERTEX COVER$

## e) Definiere Reduktionsfunktion $f$

– Wähle  $f(G, k) := (G^c, |V| - k)$

## f) Korrektheit der Transformation

Es ist  $V_c$  ist Clique in  $G = (V, E)$

$\Leftrightarrow \forall v, v' \in V_c. v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E$  (Definition)

$\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \notin E. v \neq v' \Rightarrow v \notin V_c \vee v' \notin V_c$  (Kontraposition)

$\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E^c. v \in V - V_c \vee v' \in V - V_c$  (Positive Formulierung)

$\Leftrightarrow V - V_c$  Knotenüberdeckung des Komplementgraphen  $G^c = (V, E^c)$

Damit folgt  $(G, k) \in CLIQUE$

$\Leftrightarrow G$  hat Clique  $V_c$  der Mindestgröße  $k$

$\Leftrightarrow G^c$  hat Knotenüberdeckung  $V' = V - V_c$  der Maximalgröße  $|V| - k$

$\Leftrightarrow f(G, k) = (G^c, |V| - k) \in VC$

✓

# REDUZIERBARKEIT: $CLIQUE \leq_p VERTEX COVER$

## e) Definiere Reduktionsfunktion $f$

– Wähle  $f(G, k) := (G^c, |V| - k)$

## f) Korrektheit der Transformation

Es ist  $V_c$  ist Clique in  $G = (V, E)$

$\Leftrightarrow \forall v, v' \in V_c. v \neq v' \Rightarrow \{v, v'\} \in E$  (Definition)

$\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \notin E. v \neq v' \Rightarrow v \notin V_c \vee v' \notin V_c$  (Kontraposition)

$\Leftrightarrow \forall \{v, v'\} \in E^c. v \in V - V_c \vee v' \in V - V_c$  (Positive Formulierung)

$\Leftrightarrow V - V_c$  Knotenüberdeckung des Komplementgraphen  $G^c = (V, E^c)$

Damit folgt  $(G, k) \in CLIQUE$

$\Leftrightarrow G$  hat Clique  $V_c$  der Mindestgröße  $k$

$\Leftrightarrow G^c$  hat Knotenüberdeckung  $V' = V - V_c$  der Maximalgröße  $|V| - k$

$\Leftrightarrow f(G, k) = (G^c, |V| - k) \in VC$

✓

## g) Laufzeitverhalten von $f$

– Der Komplementärgraph kann in  $\mathcal{O}(|V|^2)$  Schritten generiert werden

–  $|V| - k$  kann in linearer Zeit berechnet werden

– Also ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar

# $VC$ IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG (SUMMARISCHER BEWEIS)

$$VC = \{(G, k) \mid G \text{ Graph} \wedge \exists V' \subseteq V. |V'| \leq k \wedge V' \text{ Knotenüberdeckung von } G\}$$

## 1. $VC \in \mathcal{NP}$ :

- Generiere eine Knotenmenge  $V' \subseteq V$
- Prüfe  $|V'| \leq k$  und  $\forall \{v, v'\} \in E. v \in V' \vee v' \in V'$
- Die Tests sind in maximal  $|V'|$  bzw.  $|V'| * |E| \leq |V|^3$  Schritten, also in polynomieller Zeit, durchführbar

## 2. $CLIQUE \leq_p VC$ :

(vgl. Einheit 6.2)

- Gegeben ein Graph  $G=(V, E)$  und eine Zahl  $k \leq |V|$   
Setze  $f(G, k) := (G^c, |V| - k)$
- Es folgt  $(G, k) \in CLIQUE \Leftrightarrow f(G, k) \in VC$  (siehe vorige Folie)
- $G^c$  ist mit quadratischem und  $|V| - k$  mit linearem Aufwand konstruierbar, also ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar

Wegen  $CLIQUE \in \mathcal{NPC}$  ist damit auch  $VC \in \mathcal{NPC}$

# GERICHTETER HAMILTONSCHER KREIS (DHC)

AUSGANGSPUNKT FÜR BEWEIS DER  $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIGKEIT VON TSP

**Gibt es in einem gerichteten Graphen einen Hamiltonschen Kreis?**

$$\begin{aligned} \mathbf{DHC} = \{ G \mid G=(V, E) \text{ gerichteter Graph} \\ \wedge \exists c=(v_{i_1}, \dots, v_{i_{|V|}}). c \text{ Hamiltonscher Kreis in } G \} \end{aligned}$$

## 1. Zeige $\mathbf{DHC} \in \mathcal{NP}$ :

Gegeben ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten

- Generiere Liste von  $n$  verschiedenen Knoten  $c = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$
- Prüfe ob  $c$  einen Kreis bildet, der jeden Knoten von  $G$  berührt  
d.h. ob  $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \in E$  für alle  $j < n$  und  $(v_{i_n}, v_{i_1}) \in E$  gilt
- Anzahl der Schritte ist maximal  $n * |E| \in \mathcal{O}(n^3)$

# GERICHTETER HAMILTONSCHER KREIS (DHC)

AUSGANGSPUNKT FÜR BEWEIS DER  $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIGKEIT VON TSP

**Gibt es in einem gerichteten Graphen einen Hamiltonschen Kreis?**

$$DHC = \{ G \mid G=(V, E) \text{ gerichteter Graph} \\ \wedge \exists c=(v_{i_1}, \dots, v_{i_{|V|}}). c \text{ Hamiltonscher Kreis in } G \}$$

## 1. Zeige $DHC \in \mathcal{NP}$ :

Gegeben ein gerichteter Graph  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten

- Generiere Liste von  $n$  verschiedenen Knoten  $c = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$
- Prüfe ob  $c$  einen Kreis bildet, der jeden Knoten von  $G$  berührt  
d.h. ob  $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \in E$  für alle  $j < n$  und  $(v_{i_n}, v_{i_1}) \in E$  gilt
- Anzahl der Schritte ist maximal  $n * |E| \in \mathcal{O}(n^3)$

## 2. Zeige $3SAT \leq_p DHC$

↪ Anhang (aufwendig)

– Konstruiere Graphen, der Variablen und Klauseln der Formel codiert

**Wegen  $3SAT \in \mathcal{NPC}$  ist damit auch  $DHC \in \mathcal{NPC}$**

# HAMILTONSCHER KREIS (HAMILTONIAN CIRCUIT)

**Gibt es in einem ungerichteten Graphen einen hamiltonschen Kreis?**

$$HC = \{ G \mid G \text{ ungerichteter Graph} \wedge G \text{ hat Hamiltonschen Kreis} \}$$

**1. Zeige  $HC \in \mathcal{NP}$ :**

(Beweis wie bei  $DHC$ )

Gegeben ein (ungerichteter) Graph  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten

a) Generiere Liste von  $n$  verschiedenen Knoten  $c = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$

b) Prüfe ob  $c$  einen Kreis bildet, der jeden Knoten von  $G$  berührt

d.h. ob  $\{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}\} \in E$  für alle  $j < n$  und  $\{v_{i_n}, v_{i_1}\} \in E$  gilt

c) Anzahl der Schritte ist maximal  $n * |E| \in \mathcal{O}(n^3)$

# HAMILTONSCHER KREIS (HAMILTONIAN CIRCUIT)

Gibt es in einem ungerichteten Graphen einen hamiltonschen Kreis?

$$HC = \{ G \mid G \text{ ungerichteter Graph} \wedge G \text{ hat Hamiltonschen Kreis} \}$$

1. Zeige  $HC \in \mathcal{NP}$ :

(Beweis wie bei  $DHC$ )

Gegeben ein (ungerichteter) Graph  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten

a) Generiere Liste von  $n$  verschiedenen Knoten  $c = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$

b) Prüfe ob  $c$  einen Kreis bildet, der jeden Knoten von  $G$  berührt

d.h. ob  $\{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}\} \in E$  für alle  $j < n$  und  $\{v_{i_n}, v_{i_1}\} \in E$  gilt

c) Anzahl der Schritte ist maximal  $n * |E| \in \mathcal{O}(n^3)$

2. Zeige  $DHC \leq_p HC$

– Transformiere jeden Knoten in drei Knoten mit Richtungsmarkierung

– Transformiere gerichtete Kante  $(v, v')$  in Kante zwischen “Ausgang” von  $v$  und “Eingang” von  $v'$



– Um  $v'$  zu erreichen, muß man über  $v'^{ein}$  hinein und über  $v'^{aus}$  hinaus

## TRANSFORMATION $DHC \mapsto HC$

Konstruiere aus  $G_d = (V_d, E_d)$  einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit  $v^{ein}, v, v^{aus} \in V$  und  $\{v^{ein}, v\}, \{v, v^{aus}\} \in E$  für alle  $v \in V_d$  und  $\{v_i^{aus}, v_j^{ein}\} \in E$  für alle  $(v_i, v_j) \in E_d$ . Setze  $f(G_d) = G$ .

Zeige  $G_d \in DHC \Leftrightarrow f(G_d) \in HC$

## TRANSFORMATION $DHC \mapsto HC$

Konstruiere aus  $G_d = (V_d, E_d)$  einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit  $v^{ein}, v, v^{aus} \in V$  und  $\{v^{ein}, v\}, \{v, v^{aus}\} \in E$  für alle  $v \in V_d$  und  $\{v_i^{aus}, v_j^{ein}\} \in E$  für alle  $(v_i, v_j) \in E_d$ . Setze  $f(G_d) = G$ .

Zeige  $G_d \in DHC \Leftrightarrow f(G_d) \in HC$

Es sei  $G_d \in DHC$ . Dann gibt es einen DHC  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$  in  $G_d$ .

In diesem Fall ist  $(v_{i_1}^{ein}, v_{i_1}, v_{i_1}^{aus}, \dots, v_{i_n}^{aus})$  ein Hamiltonscher Kreis in  $G$

Also  $f(G_d) \in HC$

## TRANSFORMATION $DHC \mapsto HC$

Konstruiere aus  $G_d = (V_d, E_d)$  einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit  $v^{ein}, v, v^{aus} \in V$  und  $\{v^{ein}, v\}, \{v, v^{aus}\} \in E$  für alle  $v \in V_d$  und  $\{v_i^{aus}, v_j^{ein}\} \in E$  für alle  $(v_i, v_j) \in E_d$ . Setze  $f(G_d) = G$ .

Zeige  $G_d \in DHC \Leftrightarrow f(G_d) \in HC$

Es sei  $G_d \in DHC$ . Dann gibt es einen DHC  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$  in  $G_d$ .

In diesem Fall ist  $(v_{i_1}^{ein}, v_{i_1}, v_{i_1}^{aus}, \dots, v_{i_n}^{aus})$  ein Hamiltonscher Kreis in  $G$

Also  $f(G_d) \in HC$

Es sei  $f(G_d) \in HC$ . Dann gibt es einen Hamiltonkreis  $(u_{j_1}, \dots, u_{j_{3n}})$  in  $G$

– Da jeder Knoten  $v_i$  nur  $v_i^{ein}$  und  $v_i^{aus}$  als Nachbarn hat und sonst nur

Kanten zwischen  $v_i^{aus}$  und einem  $v_j^{ein}$  verlaufen muß der Kreis die Gestalt

$(v_{i_1}^{ein}, v_{i_1}, v_{i_1}^{aus}, \dots, v_{i_n}^{ein}, v_{i_n}, v_{i_n}^{aus})$  oder  $(v_{i_1}^{aus}, v_{i_1}, v_{i_1}^{ein}, \dots, v_{i_n}^{aus}, v_{i_n}, v_{i_n}^{ein})$  haben

– Da  $G$  ungerichtet ist, sind beide Kreise identisch, und wir können

einen gerichteten Hamiltonschen Kreis  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$  für  $G_d$  extrahieren

Also gilt  $G_d \in DHC$

# $HC$ IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG (SUMMARISCHER BEWEIS)

$HC = \{ G \mid G = (V, E) \text{ ungerichteter Graph} \wedge G \text{ hat Hamiltonschen Kreis} \}$

## 1. $HC \in \mathcal{NP}$ :

(Beweis wie bei  $DHC$ )

- Generiere Liste von  $n$  verschiedenen Knoten  $c = (v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$
- Prüfe ob  $\{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}\} \in E$  für alle  $j < n$  und  $\{v_{i_n}, v_{i_1}\} \in E$  gilt
- Der Test ist in  $n * |E|$  Schritten, also in polynomieller Zeit, durchführbar

## 2. $DHC \leq_p HC$

Gegeben ein gerichteter Graph  $G_d = (V_d, E_d)$

- Konstruiere ungerichteten Graphen  $f(G_d) \equiv G = (V, E)$

mit  $v^{ein}, v, v^{aus} \in V$  und  $\{v^{ein}, v\}, \{v, v^{aus}\} \in E$  für alle  $v \in V_d$

und  $\{v_i^{aus}, v_j^{ein}\} \in E$  für alle  $(v_i, v_j) \in E_d$ .

- Dann gilt  $G_d \in DHC \Leftrightarrow f(G_d) \in HC$

(siehe vorige Folie)

- $V$  und  $E$  sind mit linearem Aufwand konstruierbar  
also ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar

**Wegen  $DHC \in \mathcal{NPC}$  ist damit auch  $HC \in \mathcal{NPC}$**

# DAS TRAVELLING SALESMAN PROBLEM IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG

Gegeben  $n$  Städte, Reisekostentabelle  $c_{i,j}$ , Kostenlimit  $B$

Gibt es eine Rundreise durch alle Städte mit Gesamtkosten  $B$ ?

$$TSP = \{ (c_{1,2}, \dots, c_{n-1,n}), B \mid \exists \pi: \text{perm}(\{1..n\}). \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i), \pi(i+1)} + c_{\pi(n), \pi(1)} \leq B \}$$

## 1. Zeige $TSP \in \mathcal{NP}$ :

a) Generiere eine Rundreise  $\pi: \{1..n\} \rightarrow \{1..n\}$  *darstellbar als Liste  $(\pi(1).. \pi(n))$*

b/c) Prüfe  $\sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B$  *maximal  $n$  Schritte*

# DAS TRAVELLING SALESMAN PROBLEM IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG

Gegeben  $n$  Städte, Reisekostentabelle  $c_{i,j}$ , Kostenlimit  $B$   
Gibt es eine Rundreise durch alle Städte mit Gesamtkosten  $B$ ?

$$TSP = \{ (c_{1,2}, \dots, c_{n-1,n}), B \mid \exists \pi: \text{perm}(\{1..n\}). \sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i), \pi(i+1)} + c_{\pi(n), \pi(1)} \leq B \}$$

## 1. Zeige $TSP \in \mathcal{NP}$ :

- a) Generiere eine Rundreise  $\pi: \{1..n\} \rightarrow \{1..n\}$  *darstellbar als Liste* ( $\pi(1).. \pi(n)$ )  
b/c) Prüfe  $\sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i)\pi(i+1)} + c_{\pi(n)\pi(1)} \leq B$  *maximal  $n$  Schritte*

## 2. Zeige $HC \leq_p TSP$ :

- e) Es ist  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$  ein Hamiltonscher Kreis in  $G = (V, E)$  mit  $n = |V|$   
 $\Leftrightarrow (i_1, \dots, i_n)$  Rundreise durch  $n$  Städte mit Kosten  $n$ ,  
wobei  $c_{ij} = 1$  genau dann, wenn  $\{v_i, v_j\} \in E$  (sonst größer)  
 $\Leftrightarrow (i_1, \dots, i_n)$  Lösung des entsprechenden TSP  $((c_{1,2}, \dots, c_{n-1,n}), n)$

Setze  $f(G) := ((c_{1,2}, \dots, c_{n-1,n}), |V|)$  mit  $c_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{v_i, v_j\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$

- f) Es folgt  $G \in HC \Leftrightarrow f(G) \in TSP$   
g)  $|V|$  ist mit linearem und die Kostentabelle mit maximal quadratischem Aufwand konstruierbar, also ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar

Wegen  $HC \in \mathcal{NPC}$  ist damit auch  $TSP \in \mathcal{NPC}$

# DAS FÄRBBARKEITSPROBLEM (GRAPH COLORING)

Gibt es zu einem Graphen  $G=(V, E)$  eine  $k$ -Färbung von  $V$ ?

$$GC = \{ (G, k) \mid G \text{ Graph} \wedge \exists f_V: V \rightarrow \{1..k\}. \forall \{u, v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v) \}$$

## 1. Zeige $GC \in \mathcal{NP}$ :

Gegeben ein Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \leq |V|$

a) Generiere eine Färbung  $f_V: V \rightarrow \{1..k\}$  der Knoten des Graphen

b) Prüfe ob alle verbundenen Knoten in  $V$  verschiedene Farben haben

d.h.  $\forall \{u, v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v)$

c) Anzahl der Schritte ist maximal  $|E| * |V|^2 \in \mathcal{O}(|G|^3)$

# DAS FÄRBBARKEITSPROBLEM (GRAPH COLORING)

**Gibt es zu einem Graphen  $G=(V, E)$  eine  $k$ -Färbung von  $V$ ?**

$$GC = \{ (G, k) \mid G \text{ Graph} \wedge \exists f_V: V \rightarrow \{1..k\}. \forall \{u, v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v) \}$$

## 1. Zeige $GC \in \mathcal{NP}$ :

Gegeben ein Graph  $G = (V, E)$  und eine Zahl  $k \leq |V|$

a) Generiere eine **Färbung**  $f_V: V \rightarrow \{1..k\}$  der Knoten des Graphen

b) Prüfe ob alle verbundenen Knoten in  $V$  verschiedene Farben haben

d.h.  $\forall \{u, v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v)$

c) Anzahl der Schritte ist maximal  $|E| * |V|^2 \in \mathcal{O}(|G|^3)$

## 2. Zeige $3SAT \leq_p GC$ :

Konstruiere Färbungsproblem aus einer Klauselmenge

(Details folgen)

– Ein Teilgraph zur **Codierung der Variablenbelegung**

· Knoten für  $x_i$  und  $\bar{x}_i$  können nur Farben aus 0 oder 1 bekommen

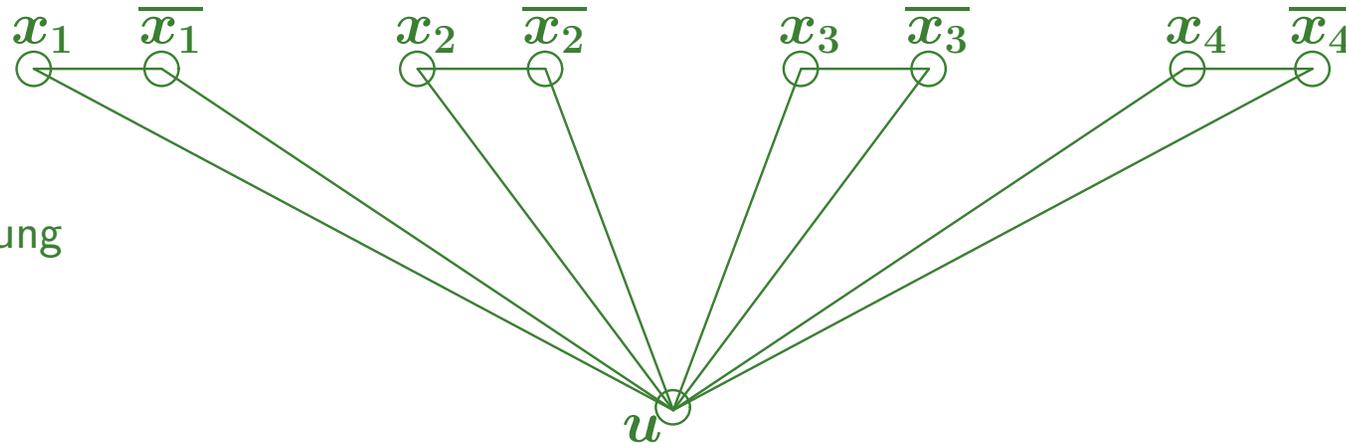
– Ein Teilgraph zur **Codierung der Klauseln**

· Knoten für Literale sind mit zugehörigen Variablen verbunden

· Bei Erfüllbarkeit erzwingt Anordnung Farbe 1 für ein Literal

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS FÄRBUNGSPROBLEM

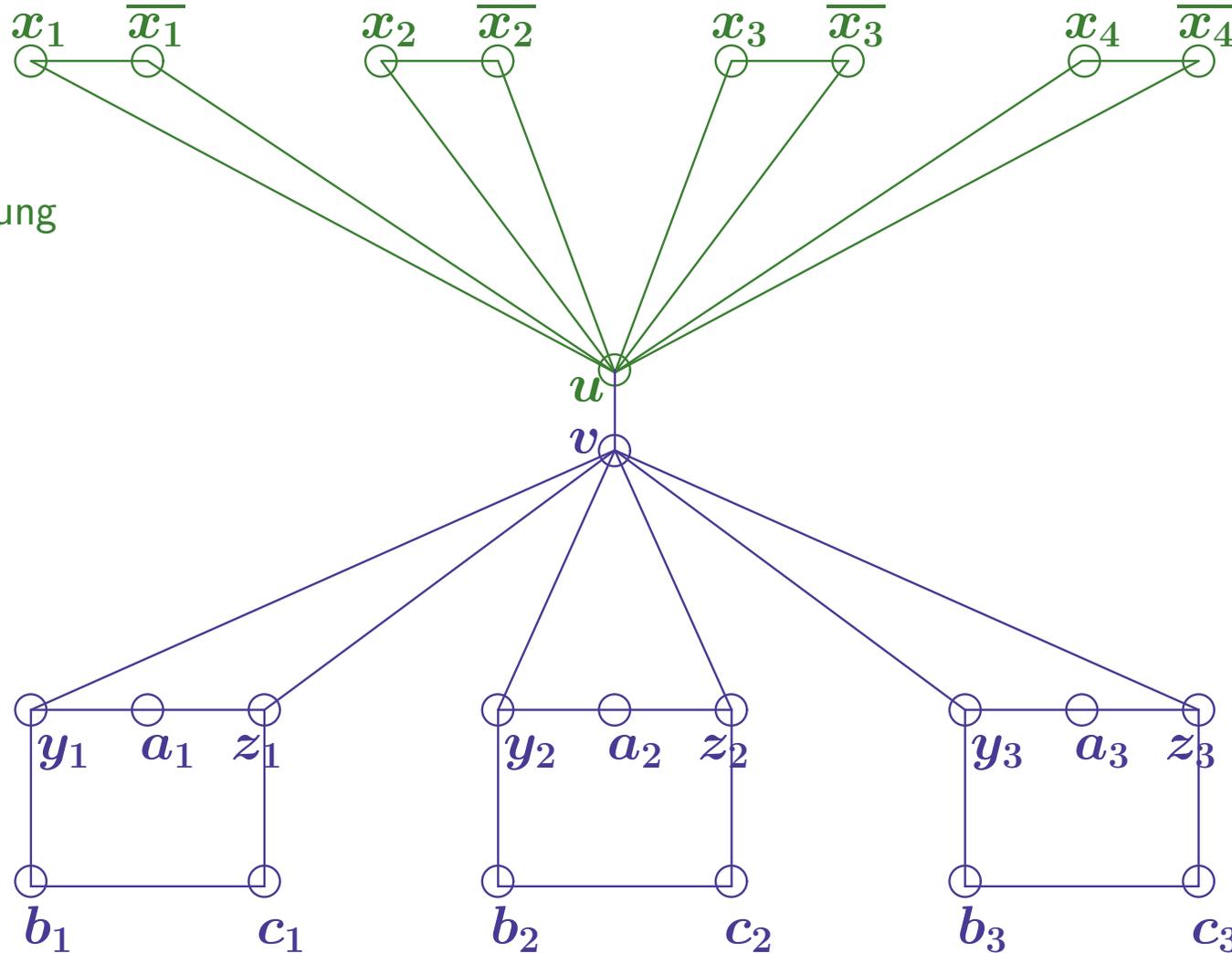
$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



Codierung der  
Variablenbelegung

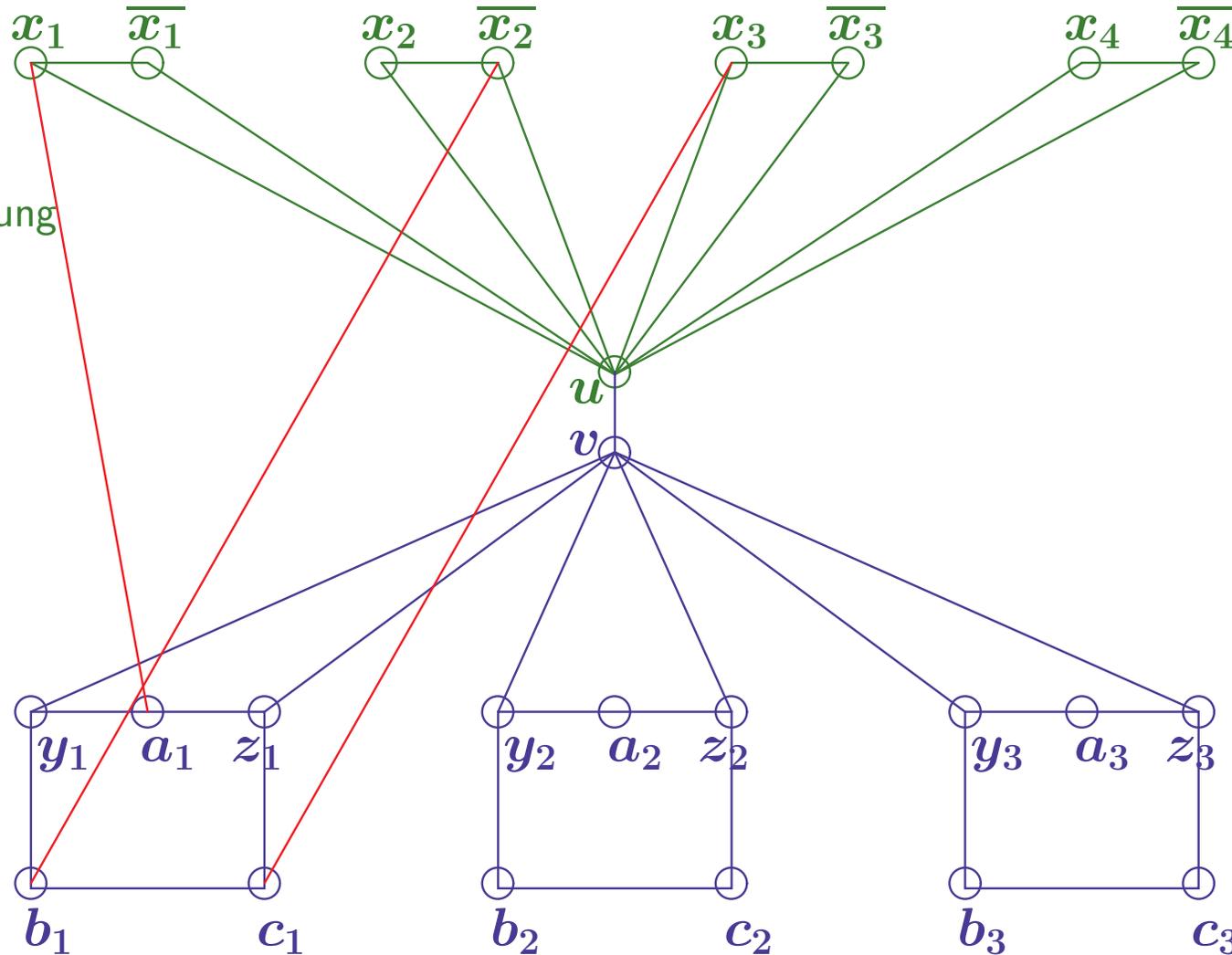
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS FÄRBUNGSPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



# CODIERUNG EINER FORMEL ALS FÄRBUNGSPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



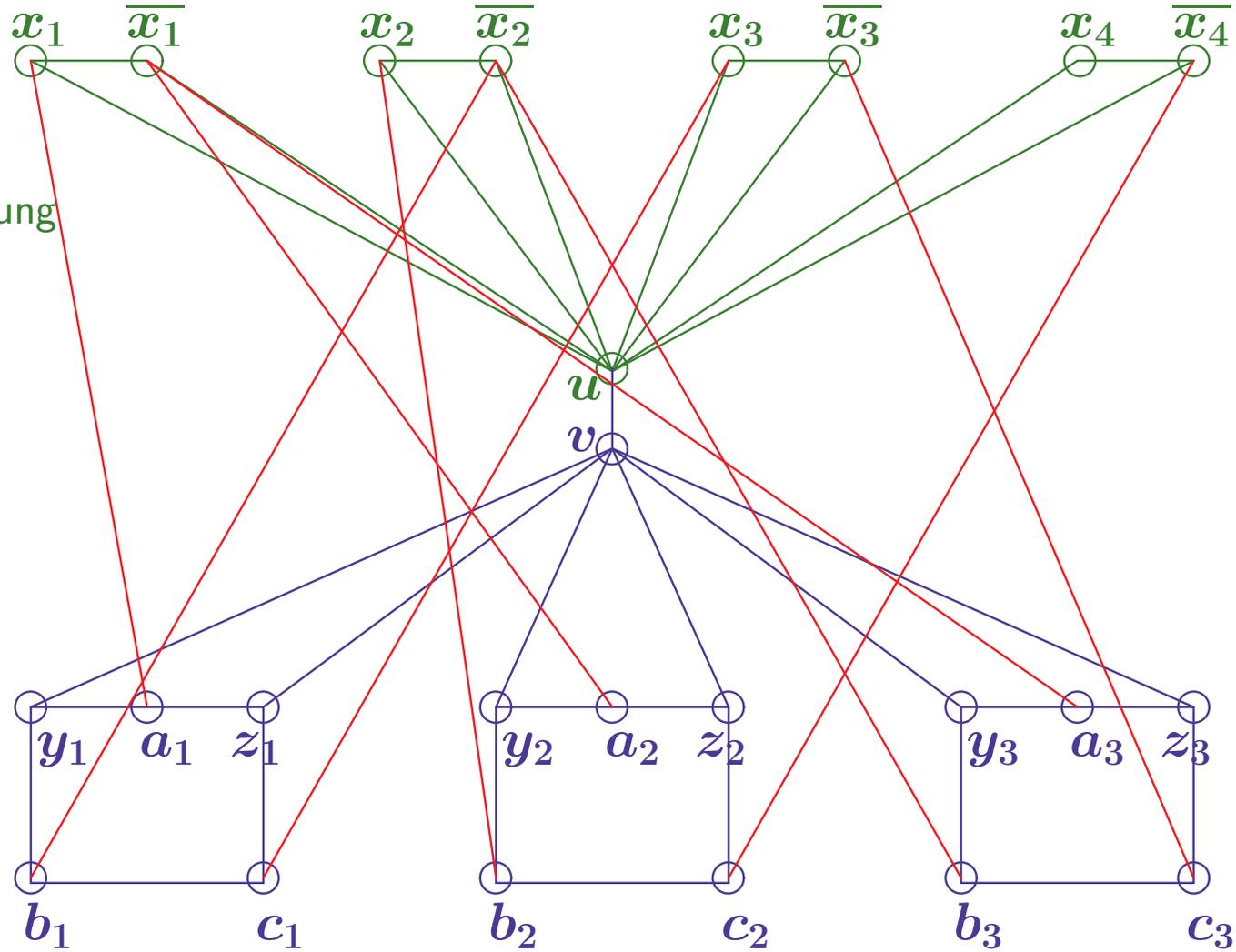
Codierung der Variablenbelegung

Zuordnung der Klauselliterale

Codierung der Klauseln

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS FÄRBUNGSPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



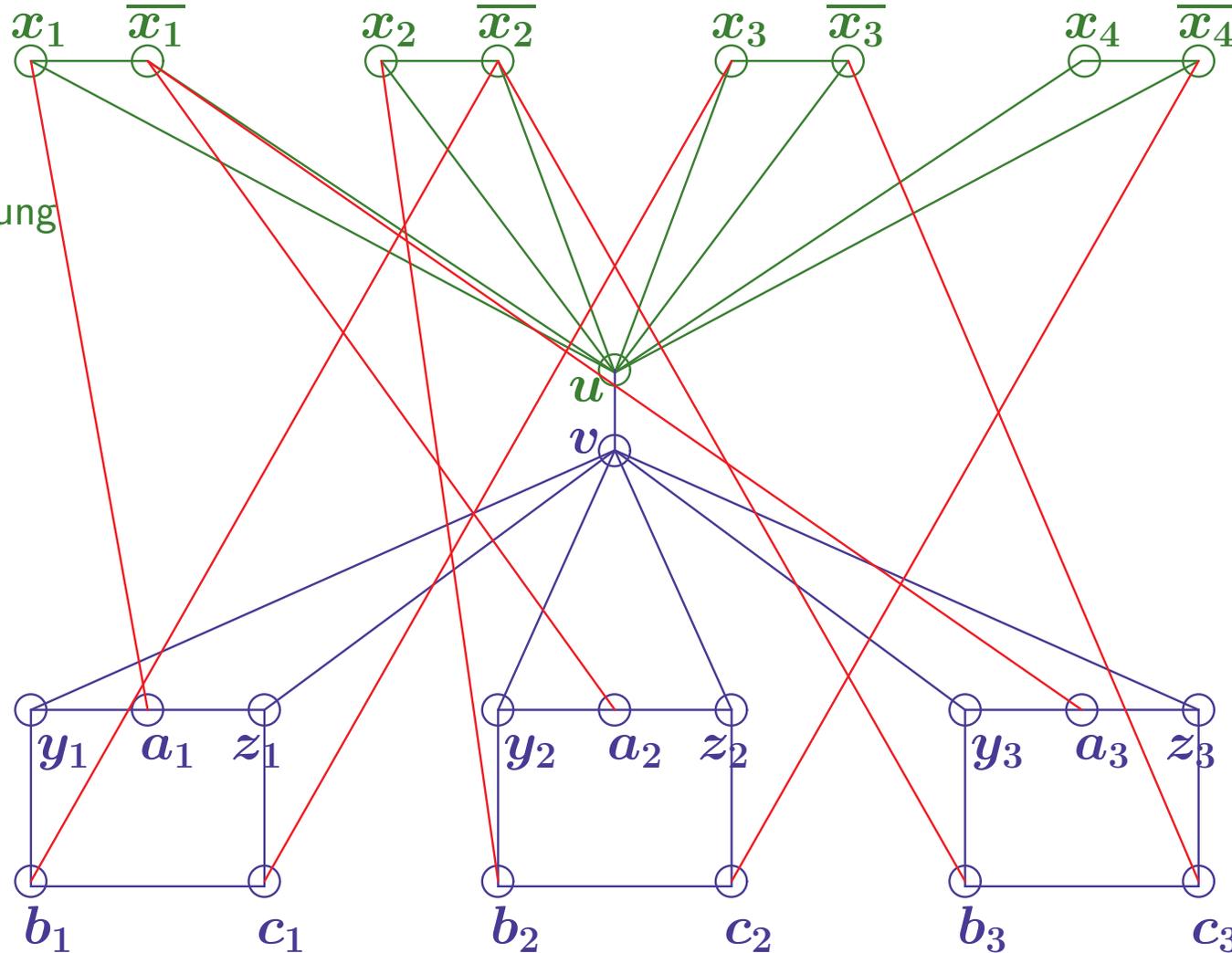
Codierung der Variablenbelegung

Zuordnung der Klauselliterale

Codierung der Klauseln

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS FÄRBUNGSPROBLEM

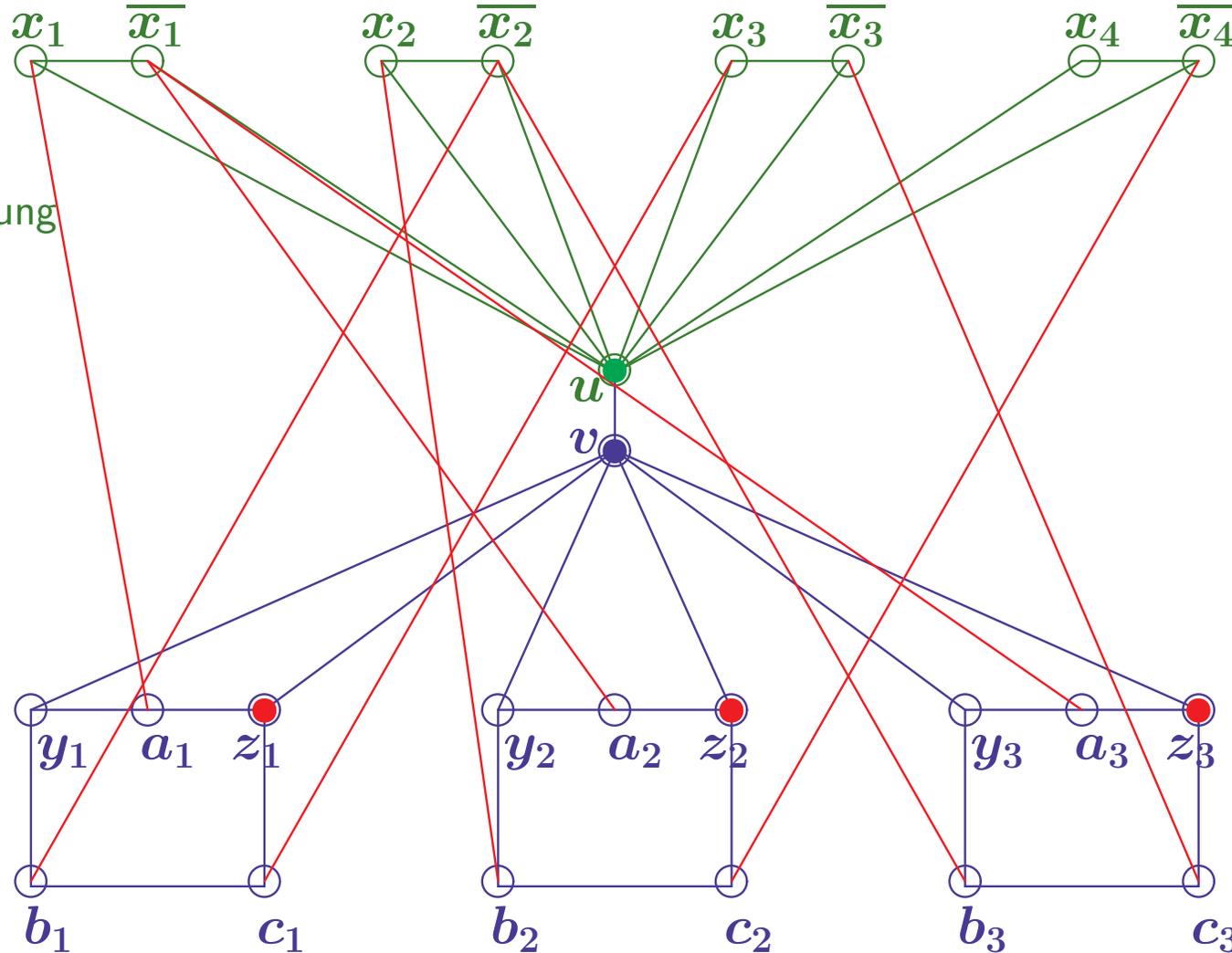
$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



**Gibt es für den Graphen eine 3-Färbung?**

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS FÄRBUNGSPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



Codierung der Variablenbelegung

Zuordnung der Klauselliterale

Codierung der Klauseln

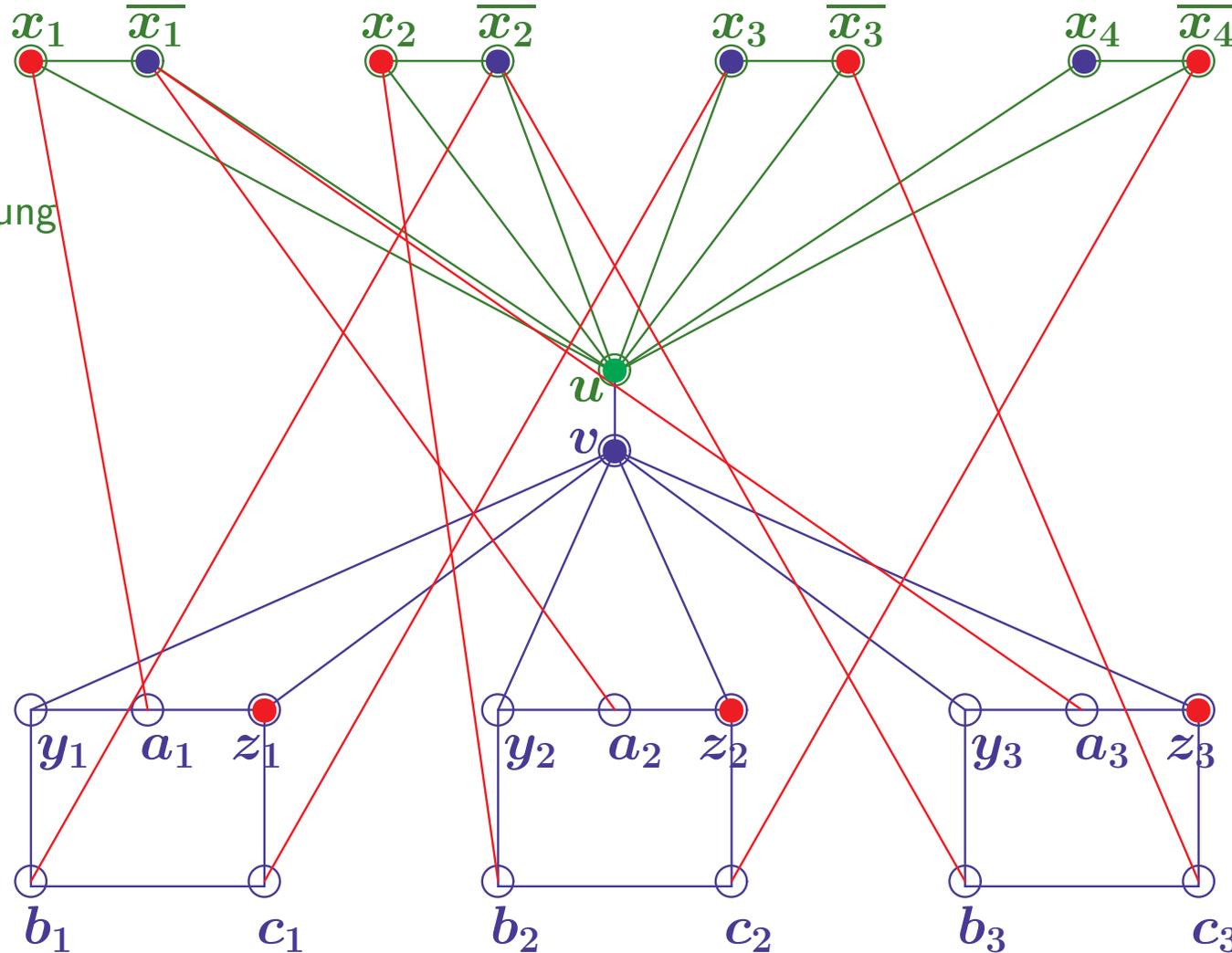
Zwei Farben an  $u$  und  $v$

Drei Farben für Klausel nötig  
Kein Blau an  $y_i, z_i$

**Gibt es für den Graphen eine 3-Färbung?**

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS FÄRBUNGSPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



Zwei Farben an Variablen

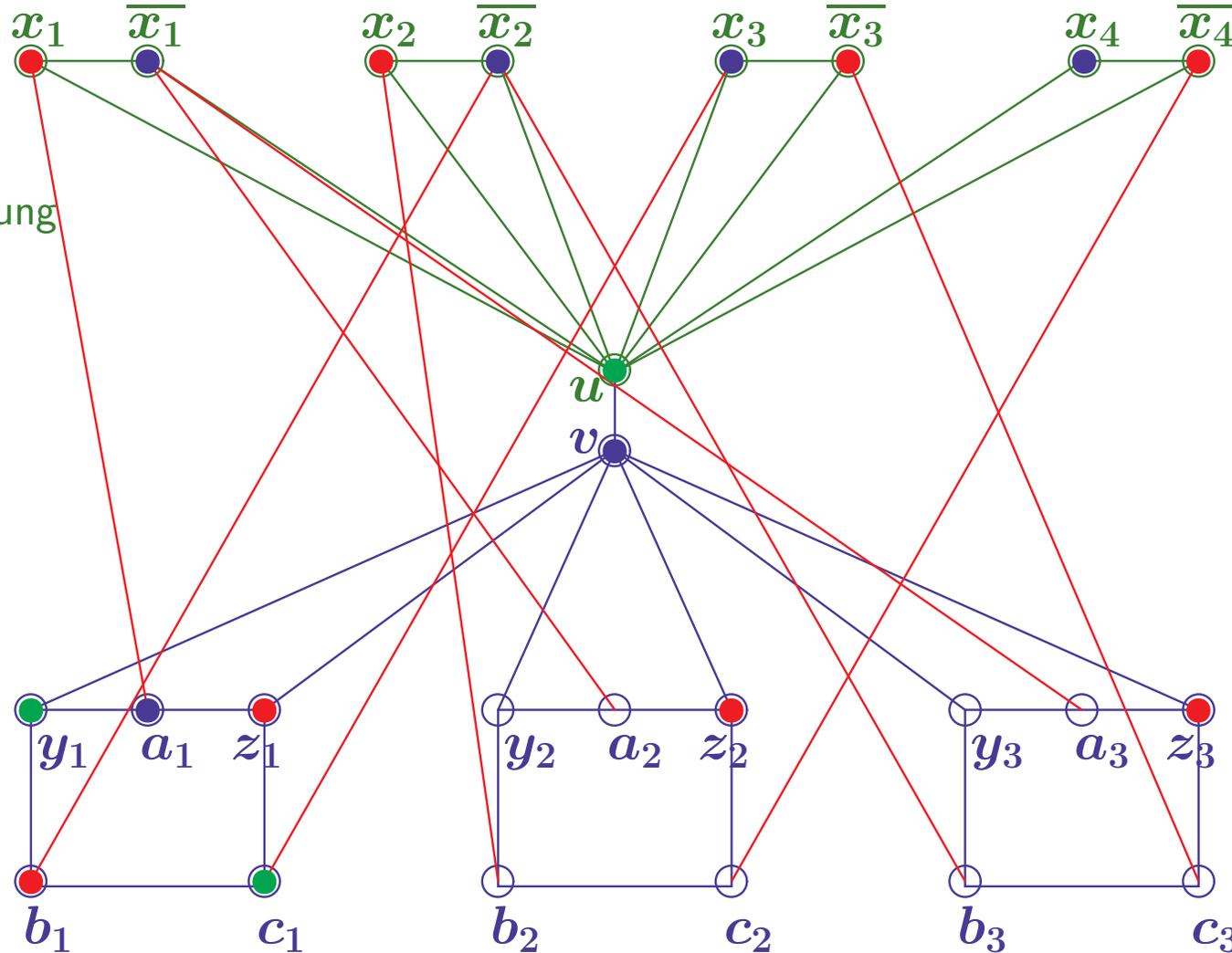
Zwei Farben an  $u$  und  $v$

Drei Farben für Klausel nötig  
Kein Blau an  $y_i, z_i$

Gibt es für den Graphen eine 3-Färbung?

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS FÄRBUNGSPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



Zwei Farben  
an Variablen

Zwei Farben  
an  $u$  und  $v$

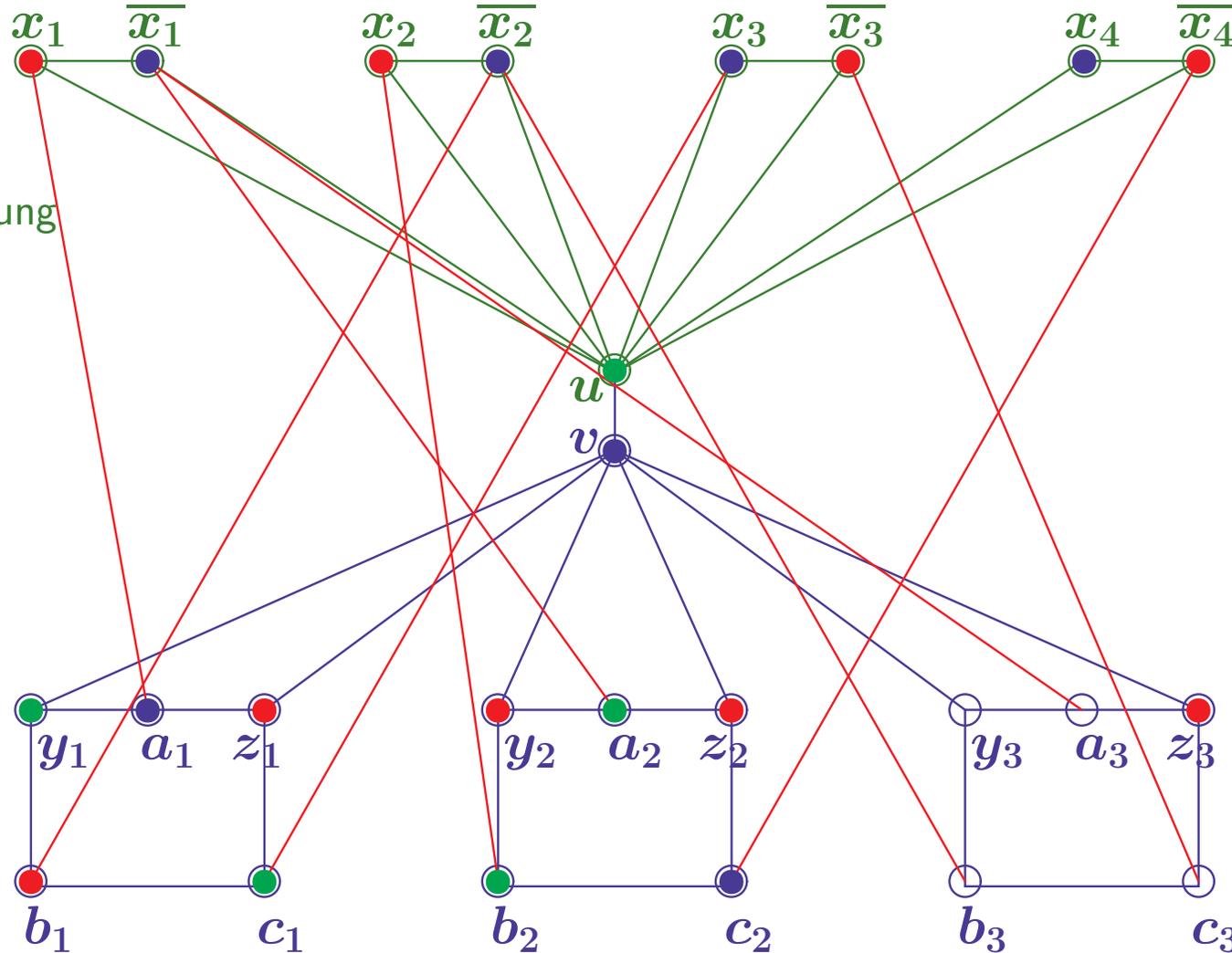
Drei Farben für  
Klausel nötig  
Kein Blau an  $y_i, z_i$

Blau an  $a_i$ ,  
wenn  $y_i$  Grün

**Gibt es für den Graphen eine 3-Färbung?**

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS FÄRBUNGSPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



Zwei Farben an Variablen

Zwei Farben an  $u$  und  $v$

Drei Farben für Klausel nötig  
Kein Blau an  $y_i, z_i$

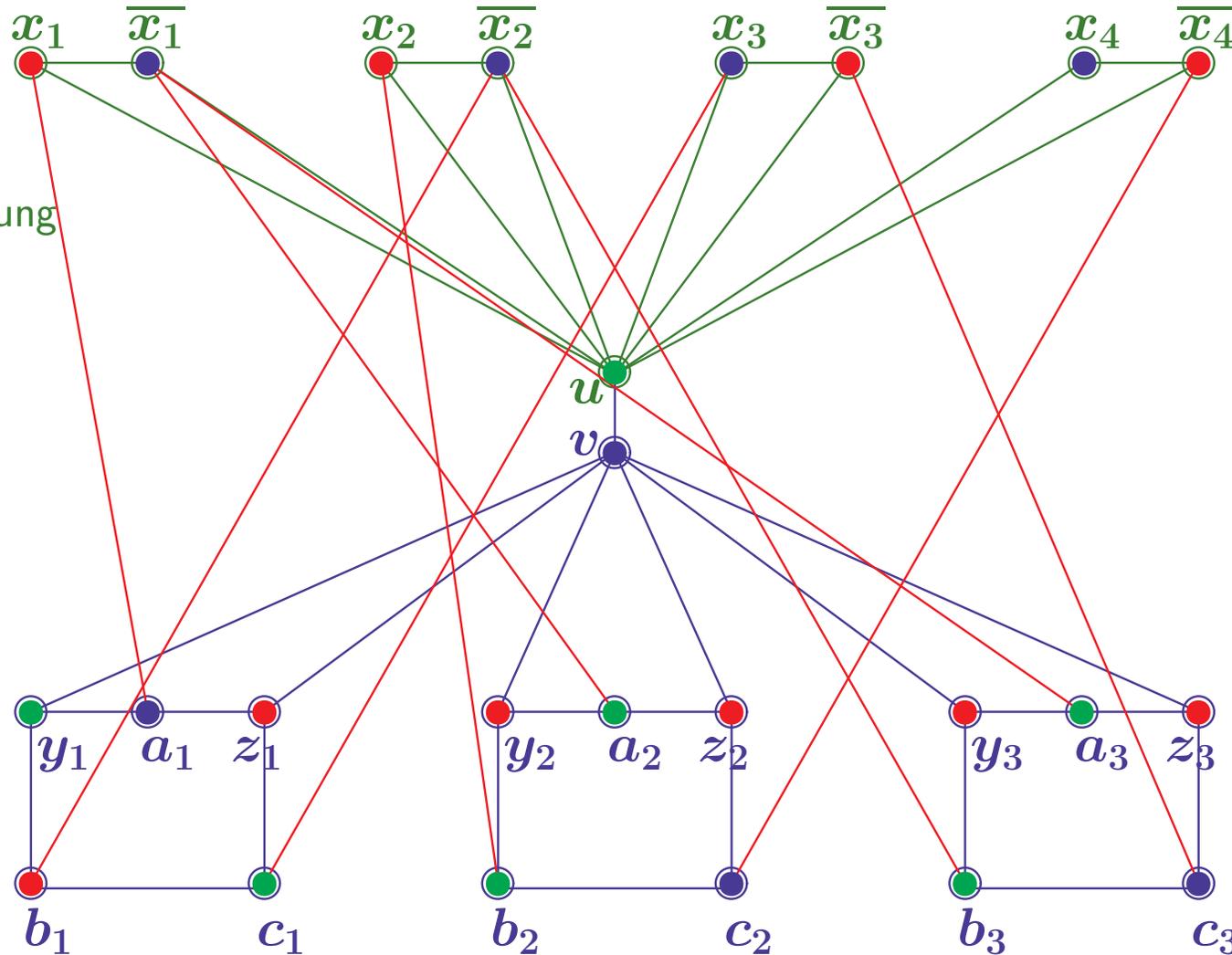
Blau an  $a_i$ , wenn  $y_i$  Grün

Sonst  $y_i$  Rot und Blau an  $b_i$  oder  $c_i$

**Gibt es für den Graphen eine 3-Färbung?**

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS FÄRBUNGSPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



Zwei Farben an Variablen

Zwei Farben an  $u$  und  $v$

Drei Farben für Klausel nötig  
Kein Blau an  $y_i, z_i$

Blau an  $a_i$ , wenn  $y_i$  Grün

Sonst  $y_i$  Rot und Blau an  $b_i$  oder  $c_i$

Ein Klauselliteral muß Rot sein

**Gibt es für den Graphen eine 3-Färbung?**

# TRANSFORMATION $3SAT \mapsto GC$

- **Gegeben:**  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \overline{x_n}\}$   
Konstruiere Färbungsproblem  $f(F) \equiv (G, 3)$
- **Teilgraph für Codierung der Variablenbelegung:**
  - $V_{var} = \{u, x_1, \dots, \overline{x_n}\}$
  - $E_{var} = \{\{u, x_1\}, \{u, \overline{x_1}\}, \{x_1, \overline{x_1}\}, \dots, \{u, x_n\}, \{u, \overline{x_n}\}, \{x_n, \overline{x_n}\}\}$Bei 3-Färbbarkeit erhalten  $x_i$  und  $\overline{x_i}$  verschiedene Farben aus 0 oder 1
- **Teilgraph für Codierung der Klauseln:**
  - $V_k = \{v, a_1, b_1, c_1, y_1, z_1, \dots, a_m, b_m, c_m, y_m, z_m\}$
  - $E_k = \{\{v, y_1\}, \{v, z_1\}, \{a_1, y_1\}, \{a_1, z_1\}, \{b_1, y_1\}, \{c_1, z_1\}, \{b_1, c_1\}, \dots, \{v, y_m\}, \dots, \{b_m, c_m\}, \{u, v\}\}$Knoten  $u$  erhält Farbe 2, Knoten  $v$  erhält Farbe 0 oder 1
- **Verbindungskanten zur Codierung der Klauselliterale**
  - $E_{lit} = \{\{a_1, z_{11}\}, \{b_1, z_{12}\}, \{c_1, z_{13}\}, \dots, \{a_m, z_{m1}\}, \{b_m, z_{m2}\}, \{c_m, z_{m3}\}\}$
- **Gesamtgraph**  $G := (V_{var} \cup V_k, E_{var} \cup E_k \cup E_{lit})$

# KORREKTHEIT: $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in GC$

- Sei  $F \in 3SAT$

Dann gibt es eine erfüllende Belegung der  $x_j$

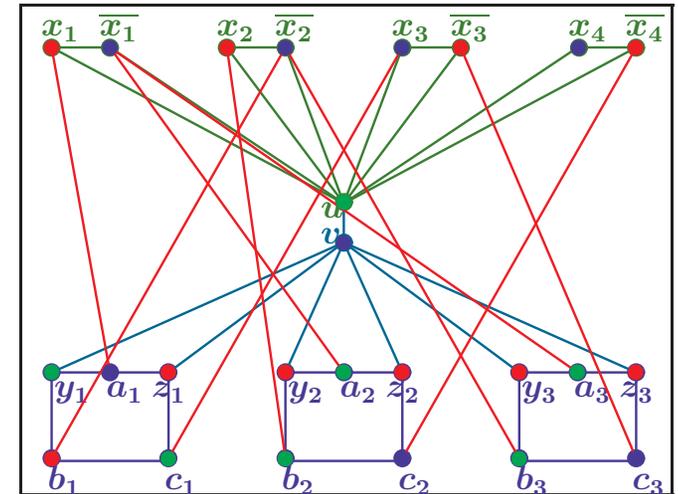
– Wähle  $f_v(x_i), f_v(\bar{x}_i) \in \{0,1\}$  entsprechend,  
sowie  $f_v(u)=2$  und  $f_v(v)=0$ .

– Da jedes  $k_i$  erfüllbar ist,

kann eines der  $a_i, b_i, c_i$  die Farbe 0 erhalten

– Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt

– Also gibt es eine 3-Färbung des Graphen und somit  $f(F) \in GC$

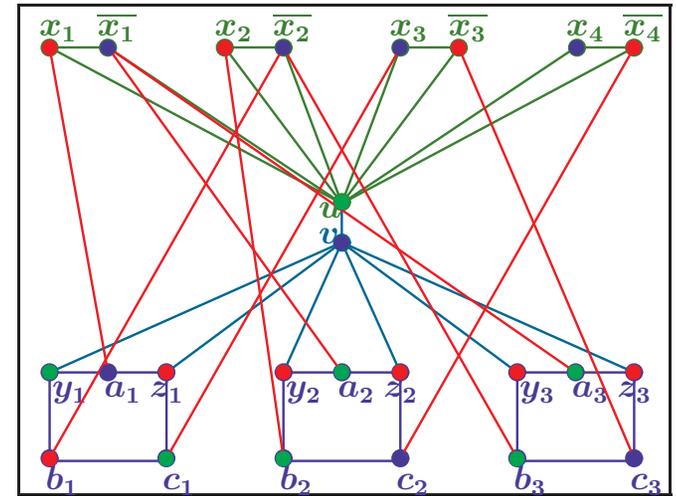


# KORREKTHEIT: $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in GC$

- Sei  $F \in 3SAT$

Dann gibt es eine erfüllende Belegung der  $x_j$

- Wähle  $f_v(x_i), f_v(\bar{x}_i) \in \{0,1\}$  entsprechend, sowie  $f_v(u)=2$  und  $f_v(v)=0$ .
- Da jedes  $k_i$  erfüllbar ist, kann eines der  $a_i, b_i, c_i$  die Farbe  $0$  erhalten
- Die anderen 4 Knoten bilden eine Kette und werden abwechselnd gefärbt
- Also gibt es eine 3-Färbung des Graphen und somit  $f(F) \in GC$
- Ist  $f(F) \in GC$  dann ist o.B.d.A.  $f_v(u)=2$  und  $f_v(v)=0$ 
  - Wegen 3-Färbbarkeit ist  $f_v(x_i), f_v(\bar{x}_i) \in \{0,1\}$  und  $f_v(y_i), f_v(z_i) \in \{1,2\}$
  - Ist  $f_v(y_i) \neq f_v(z_i)$ , dann folgt  $f_v(a_i)=0$ , sonst  $f_v(b_i)=0$  oder  $f_v(c_i)=0$
  - Damit ist für jede Klausel die Farbe eines der zugehörigen Literale  $1$
  - Wähle Belegung der  $x_i$  entsprechend der Färbung von  $x_i$
  - Dann wird jede der Klauseln  $k_i$  erfüllt und es folgt  $F \in 3SAT$



# $GC$ IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG (SUMMARISCHER BEWEIS)

$$GC = \{ (G, k) \mid G \text{ Graph} \wedge \exists f_V: V \rightarrow \{1..k\}. \forall \{u, v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v) \}$$

## 1. $GC \in \mathcal{NP}$ :

- Generiere eine **Färbung**  $f_V: V \rightarrow \{1..k\}$  (z.B. als Funktionstabelle)
- Prüfe  $\forall \{u, v\} \in E. f_V(u) \neq f_V(v)$
- Der Test ist in  $|E| * |V|^2$  Schritten, d.h. polynomieller Zeit, durchführbar

## 2. $3SAT \leq_p GC$ :

- Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \overline{x_n}\}$   
Setze  $f(F) := (G, 3)$ , wobei  $G := (V_{var} \cup V_k, E_{var} \cup E_k \cup E_{lit})$  und  
 $V_{var} = \{u, x_1, \dots, \overline{x_n}\}$ ,  $V_k = \{v, a_1, b_1, c_1, y_1, z_1, \dots, a_m, b_m, c_m, y_m, z_m\}$   
 $E_{var} = \{\{u, x_1\}, \{u, \overline{x_1}\}, \{x_1, \overline{x_1}\}, \dots, \{u, x_n\}, \{u, \overline{x_n}\}, \{x_n, \overline{x_n}\}\}$   
 $E_k = \{\{v, y_1\}, \{v, z_1\}, \{a_1, y_1\}, \{a_1, z_1\}, \{b_1, y_1\}, \{c_1, z_1\}, \{b_1, c_1\}, \dots, \{b_m, c_m\}, \{u, v\}\}$   
 $E_{lit} = \{\{a_1, z_{11}\}, \{b_1, z_{12}\}, \{c_1, z_{13}\}, \dots, \{a_m, z_{m1}\}, \{b_m, z_{m2}\}, \{c_m, z_{m3}\}\}$
- Dann gilt  $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in GC$  (siehe vorige Folie)
- $V$  und  $E$  sind mit linearem Aufwand konstruierbar  
also ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar

Wegen  $3SAT \in \mathcal{NPC}$  ist damit auch  $GC \in \mathcal{NPC}$

# DAS RUCKSACKPROBLEM (KNAPSACK)

**Gibt es eine Bepackung eines Rucksacks mit Gegenständen, die einen Mindestwert haben und ein Maximalgewicht nicht überschreiten?**

$$KP = \{(g_1..g_n, a_1..a_n, G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in J} g_i \leq G \wedge \sum_{i \in J} a_i \geq A\}$$

## 1. Zeige $KP \in \mathcal{NP}$ :

Gegeben  $n$  Objekte mit Gewichten  $g_i$  und Nutzenwerten  $a_i$ , ein Gewichtslimit  $G$  und ein Minimalnutzwert  $A$

a) Generiere eine **Auswahlliste** von Gegenständen  $J \subseteq \{1..n\}$

b) Prüfe ob die gewählten Gegenstände mindestens den Nutzen  $A$  und maximal Gewicht  $G$  haben, d.h.  $\sum_{i \in J} g_i \leq G$  und  $\sum_{i \in J} a_i \geq A$

c) Anzahl der Schritte ist maximal  $2^{|J|} \in \mathcal{O}(n)$

# DAS RUCKSACKPROBLEM (KNAPSACK)

**Gibt es eine Bepackung eines Rucksacks mit Gegenständen, die einen Mindestwert haben und ein Maximalgewicht nicht überschreiten?**

$$KP = \{ (g_1..g_n, a_1..a_n, G, A) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in J} g_i \leq G \wedge \sum_{i \in J} a_i \geq A \}$$

## 1. Zeige $KP \in \mathcal{NP}$ :

Gegeben  $n$  Objekte mit Gewichten  $g_i$  und Nutzenwerten  $a_i$ , ein Gewichtslimit  $G$  und ein Minimalnutzwert  $A$

- Generiere eine **Auswahlliste** von Gegenständen  $J \subseteq \{1..n\}$
- Prüfe ob die gewählten Gegenstände mindestens den Nutzen  $A$  und maximal Gewicht  $G$  haben, d.h.  $\sum_{i \in J} g_i \leq G$  und  $\sum_{i \in J} a_i \geq A$
- Anzahl der Schritte ist maximal  $2*|J| \in \mathcal{O}(n)$

## 2. Zeige $3SAT \leq_p KP$ :

(Details folgen)

- Codiere Anzahl der Vorkommen von Literalen in den Klauseln in den Dezimalstellen der Gewichte und Nutzenwerte
- Wähle Nutzen  $A$  und Gewicht  $G$  so, daß jede Variable eine Belegung erhalten muß und jede Klausel ein Literal mit Wert 1 haben muß

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS RUCKSACKPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS RUCKSACKPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$$G = A = 444\ 1111$$

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS RUCKSACKPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$G = A = 444\ 1111$  Drei Klauseln, vier Variablen

Vier Arten von Gegenständen, Nutzen und Gewichte sind jeweils gleich

$a_1 = 100\ 1000$   $x_1$  erscheint 1-mal in  $k_1$ , sonst nirgends

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS RUCKSACKPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$G = A = 444\ 1111$  Drei Klauseln, vier Variablen

Vier Arten von Gegenständen, Nutzen und Gewichte sind jeweils gleich

$a_1 = 100\ 1000$   $x_1$  erscheint 1-mal in  $k_1$ , sonst nirgends

$a_2 = 010\ 0100$   $x_2$  erscheint 1-mal in  $k_2$ , sonst nirgends

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS RUCKSACKPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$G = A = 444\ 1111$  Drei Klauseln, vier Variablen

Vier Arten von Gegenständen, Nutzen und Gewichte sind jeweils gleich

$a_1 = 100\ 1000$   $x_1$  erscheint 1-mal in  $k_1$ , sonst nirgends

$a_2 = 010\ 0100$   $x_2$  erscheint 1-mal in  $k_2$ , sonst nirgends

$a_3 = 100\ 0010$   $x_3$  erscheint 1-mal in  $k_1$ , sonst nirgends

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS RUCKSACKPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$$G = A = 444\ 1111 \quad \text{Drei Klauseln, vier Variablen}$$

Vier Arten von Gegenständen, Nutzen und Gewichte sind jeweils gleich

$$a_1 = 100\ 1000 \quad x_1 \text{ erscheint 1-mal in } k_1, \text{ sonst nirgends}$$

$$a_2 = 010\ 0100 \quad x_2 \text{ erscheint 1-mal in } k_2, \text{ sonst nirgends}$$

$$a_3 = 100\ 0010 \quad x_3 \text{ erscheint 1-mal in } k_1, \text{ sonst nirgends}$$

$$a_4 = 000\ 0001 \quad x_4 \text{ erscheint nirgends}$$

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS RUCKSACKPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$$G = A = 444\ 1111$$

Vier Arten von Gegenständen, Nutzen und Gewichte sind jeweils gleich

$$a_1 = 100\ 1000 \quad b_1 = 011\ 1000 \quad \overline{x_1} \text{ erscheint 1-mal in } k_1, \text{ 1-mal in } k_2$$

$$a_2 = 010\ 0100 \quad b_2 = 101\ 0100 \quad \overline{x_2} \text{ erscheint 1-mal in } k_1, \text{ 1-mal in } k_3$$

$$a_3 = 100\ 0010 \quad b_3 = 001\ 0010 \quad \overline{x_3} \text{ erscheint 1-mal in } k_3$$

$$a_4 = 000\ 0001 \quad b_4 = 010\ 0001 \quad \overline{x_4} \text{ erscheint 1-mal in } k_2$$

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS RUCKSACKPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$$G = A = 444\ 1111$$

Vier Arten von Gegenständen, Nutzen und Gewichte sind jeweils gleich

$$a_1 = 100\ 1000 \quad b_1 = 011\ 1000 \quad c_1 = 100\ 0000 \quad d_1 = 200\ 0000$$

$$a_2 = 010\ 0100 \quad b_2 = 101\ 0100 \quad c_2 = 010\ 0000 \quad d_2 = 020\ 0000$$

$$a_3 = 100\ 0010 \quad b_3 = 001\ 0010 \quad c_3 = 001\ 0000 \quad d_3 = 002\ 0000$$

$$a_4 = 000\ 0001 \quad b_4 = 010\ 0001 \quad \text{Ausgleich um } \textit{Summe 4} \text{ zu erreichen}$$

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS RUCKSACKPROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$$G = A = 444\,1111$$

Vier Arten von Gegenständen, Nutzen und Gewichte sind jeweils gleich

$$a_1 = 100\,1000 \quad b_1 = 011\,1000 \quad c_1 = 100\,0000 \quad d_1 = 200\,0000$$

$$a_2 = 010\,0100 \quad b_2 = 101\,0100 \quad c_2 = 010\,0000 \quad d_2 = 020\,0000$$

$$a_3 = 100\,0010 \quad b_3 = 001\,0010 \quad c_3 = 001\,0000 \quad d_3 = 002\,0000$$

$$a_4 = 000\,0001 \quad b_4 = 010\,0001 \quad \text{Ausgleich um } \textit{Summe 4} \text{ zu erreichen}$$

$(1, 1, 0, 0)$  ist erfüllende Belegung

$$a_1 + a_2 + b_3 + b_4 + c_1 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = G$$

Nutzen  $A$  ist erreicht, Gewichtslimit  $G$  wird eingehalten

# BEWEIS FÜR $3SAT \leq_p KP$

- **Reduktion nutzt Spezialfall des Rucksackproblems**

- Gewichte  $g_i$  und Nutzen  $a_i$  sind jeweils gleich
- Gesamtnutzen  $G$  und Gesamtgewicht  $A$  sind gleich
- Wegen  $\sum_{i \in J} g_i \leq G$  und  $\sum_{i \in J} a_i \geq A$  gilt also  $\sum_{i \in J} g_i = G$

$$KP^* = \{(g_1..g_n, G) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in J} g_i = G\}$$

Manche Lehrbücher bezeichnen dies als “das Rucksackproblem”

# BEWEIS FÜR $3SAT \leq_p KP$

- **Reduktion nutzt Spezialfall des Rucksackproblems**

- Gewichte  $g_i$  und Nutzen  $a_i$  sind jeweils gleich
- Gesamtnutzen  $G$  und Gesamtgewicht  $A$  sind gleich
- Wegen  $\sum_{i \in J} g_i \leq G$  und  $\sum_{i \in J} a_i \geq A$  gilt also  $\sum_{i \in J} g_i = G$

$$KP^* = \{(g_1..g_n, G) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in J} g_i = G\}$$

Manche Lehrbücher bezeichnen dies als “das Rucksackproblem”

- **Reduktion  $KP^* \leq_p KP$  ist einfach**

e) Gegeben  $n$  Objekte mit Gewichten  $g_i$  und ein Gewichtslimit  $G$

Setze  $f(g_1..g_n, G) = (g_1..g_n, g_1..g_n, G, G)$

f) Dann gilt  $(g_1..g_n, G) \in KP^* \Leftrightarrow f(g_1..g_n, G) \in KP$  (siehe oben)

g) Der Aufwand ist linear, also ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar

# BEWEIS FÜR $3SAT \leq_p KP$

- **Reduktion nutzt Spezialfall des Rucksackproblems**

- Gewichte  $g_i$  und Nutzen  $a_i$  sind jeweils gleich
- Gesamtnutzen  $G$  und Gesamtgewicht  $A$  sind gleich
- Wegen  $\sum_{i \in J} g_i \leq G$  und  $\sum_{i \in J} a_i \geq A$  gilt also  $\sum_{i \in J} g_i = G$

$$KP^* = \{(g_1..g_n, G) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in J} g_i = G\}$$

Manche Lehrbücher bezeichnen dies als “das Rucksackproblem”

- **Reduktion  $KP^* \leq_p KP$  ist einfach**

e) Gegeben  $n$  Objekte mit Gewichten  $g_i$  und ein Gewichtslimit  $G$

Setze  $f(g_1..g_n, G) = (g_1..g_n, g_1..g_n, G, G)$

f) Dann gilt  $(g_1..g_n, G) \in KP^* \Leftrightarrow f(g_1..g_n, G) \in KP$  (siehe oben)

g) Der Aufwand ist linear, also ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar

- **Reduktion  $3SAT \leq_p KP^*$  folgt dem Beispiel**

- Codiere Anzahl der Vorkommen von Literalen in den Klauseln in Dezimalstellen der Gewichte (Details folgen)

# BEWEIS FÜR $3SAT \leq_p KP$

- **Reduktion nutzt Spezialfall des Rucksackproblems**

- Gewichte  $g_i$  und Nutzen  $a_i$  sind jeweils gleich
- Gesamtnutzen  $G$  und Gesamtgewicht  $A$  sind gleich
- Wegen  $\sum_{i \in J} g_i \leq G$  und  $\sum_{i \in J} a_i \geq A$  gilt also  $\sum_{i \in J} g_i = G$

$$KP^* = \{(g_1..g_n, G) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in J} g_i = G\}$$

Manche Lehrbücher bezeichnen dies als “das Rucksackproblem”

- **Reduktion  $KP^* \leq_p KP$  ist einfach**

e) Gegeben  $n$  Objekte mit Gewichten  $g_i$  und ein Gewichtslimit  $G$

Setze  $f(g_1..g_n, G) = (g_1..g_n, g_1..g_n, G, G)$

f) Dann gilt  $(g_1..g_n, G) \in KP^* \Leftrightarrow f(g_1..g_n, G) \in KP$  (siehe oben)

g) Der Aufwand ist linear, also ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar

- **Reduktion  $3SAT \leq_p KP^*$  folgt dem Beispiel**

- Codiere Anzahl der Vorkommen von Literalen in den Klauseln in Dezimalstellen der Gewichte (Details folgen)

- **Damit sind  $KP^*$  und  $KP$   $\mathcal{NP}$ -vollständig**

# TRANSFORMATION $3SAT \mapsto KP^*$

$$KP^* = \{(g_1..g_n, G) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in J} g_i = G\}$$

- **Gegeben:**  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \overline{x_n}\}$   
 Konstruiere Rucksackproblem  $f(F) \equiv (a_1..a_n, b_1..b_n, c_1..c_m, d_1..d_m, G)$
- **Gewichte sind  $m+n$ -stellige Dezimalzahlen:**
  - Die Stellen  $1..m$  codieren das Vorkommen der Literale in den Klauseln
  - Die Stellen  $m+1..m+n$  codieren die jeweilige Variable
- **Gewichte  $a_j$  ( $j \leq n$ ) für Vorkommen von  $x_j$  in den Klauseln:**  
 An Stelle  $i \leq m$  steht die Anzahl der  $x_j$  in  $k_i$ , 1 an Stelle  $m+j$ , sonst 0
- **Gewichte  $b_j$  ( $j \leq n$ ) für Vorkommen von  $\overline{x_j}$  in den Klauseln:**  
 An Stelle  $i \leq m$  steht Anzahl der  $\overline{x_j}$  in  $k_i$ , 1 an Stelle  $m+j$  ( $j \leq n$ ), sonst 0
- **Ausgleichsgewichte  $c_i$  und  $d_i$  ( $i \leq m$ ):**  
 $c_i$  hat eine 1 an Stelle  $i$ , sonst 0,  $d_i$  hat eine 2 an Stelle  $i$ , sonst 0
- **Gesamtgewicht:**  $G = \underbrace{4\dots4}_{m\text{-mal}} \underbrace{1\dots1}_{n\text{-mal}}$

# KORREKTHEIT: $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in KP$

- $a_j$ : Anzahl der  $x_j$  in  $k_i$  an Stelle  $i \leq m$ , 1 an Stelle  $m+j$ , sonst 0 ( $j \leq n$ )
- $b_j$ : Anzahl der  $\bar{x}_j$  in  $k_i$  an Stelle  $i \leq m$ , 1 an Stelle  $m+j$ , sonst 0 ( $j \leq n$ )
- $c_i$ : 1 an Stelle  $i$ , sonst 0      $d_i$ : 2 an Stelle  $i$ , sonst 0 ( $i \leq m$ )
- $G = \underbrace{4 \dots 4}_{m\text{-mal}} \underbrace{1 \dots 1}_{n\text{-mal}}$

## KORREKTHEIT: $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in KP$

- $a_j$ : Anzahl der  $x_j$  in  $k_i$  an Stelle  $i \leq m$ , 1 an Stelle  $m+j$ , sonst 0 ( $j \leq n$ )
- $b_j$ : Anzahl der  $\bar{x}_j$  in  $k_i$  an Stelle  $i \leq m$ , 1 an Stelle  $m+j$ , sonst 0 ( $j \leq n$ )
- $c_i$ : 1 an Stelle  $i$ , sonst 0      $d_i$ : 2 an Stelle  $i$ , sonst 0 ( $i \leq m$ )
- $G = \underbrace{4 \dots 4}_{m\text{-mal}} \underbrace{1 \dots 1}_{n\text{-mal}}$

Ist  $F \in 3SAT$ , so gibt es eine erfüllende Belegung der  $x_j$

– Für  $j \leq n$  wähle Gegenstand  $a_j$  falls  $x_j=1$  und  $b_j$  sonst

Dann haben in der Summe alle Stellen  $m+j$  den Wert 1

und die Stellen  $i \leq m$  einen Wert aus  $\{1..3\}$ , da jedes  $k_i$  erfüllt wird

– Ergänzung der Stellen  $i \leq m$  mit  $c_i$  und  $d_i$  zu 4 liefert  $G$

Also  $f(F) \in KP$

# KORREKTHEIT: $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in KP$

- $a_j$ : Anzahl der  $x_j$  in  $k_i$  an Stelle  $i \leq m$ , 1 an Stelle  $m+j$ , sonst 0 ( $j \leq n$ )
- $b_j$ : Anzahl der  $\bar{x}_j$  in  $k_i$  an Stelle  $i \leq m$ , 1 an Stelle  $m+j$ , sonst 0 ( $j \leq n$ )
- $c_i$ : 1 an Stelle  $i$ , sonst 0      $d_i$ : 2 an Stelle  $i$ , sonst 0 ( $i \leq m$ )
- $G = \underbrace{4 \dots 4}_{m\text{-mal}} \underbrace{1 \dots 1}_{n\text{-mal}}$

Ist  $F \in 3SAT$ , so gibt es eine erfüllende Belegung der  $x_j$

– Für  $j \leq n$  wähle Gegenstand  $a_j$  falls  $x_j=1$  und  $b_j$  sonst

Dann haben in der Summe alle Stellen  $m+j$  den Wert 1

und die Stellen  $i \leq m$  einen Wert aus  $\{1..3\}$ , da jedes  $k_i$  erfüllt wird

– Ergänzung der Stellen  $i \leq m$  mit  $c_i$  und  $d_i$  zu 4 liefert  $G$

Also  $f(F) \in KP$

Gilt  $f(F) \in KP$ , so gibt es eine Bepackung die genau den Wert  $G$  ergibt

– Diese enthält für Stelle  $m+j$  entweder  $a_j$  (setze  $x_j:=1$ ) oder  $b_j$  ( $x_j:=0$ )

– Wegen  $c_i+d_i=3$  muß die Summe der  $a_j$  und  $b_j$  in der Bepackung an jeder Stelle  $i \leq m$  mindestens den Wert 1 haben

– Also kommt in Klausel  $k_i$  mindestens ein Literal mit dem Wert 1 vor

Damit erfüllt die gewählte Belegung die Formel  $F$ , d.h.  $F \in 3SAT$

# $KP^*$ IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG (SUMMARISCHER BEWEIS)

$$KP^* = \{(g_1..g_n, G) \mid \exists J \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in J} g_i = G\}$$

## 1. $KP^* \in \mathcal{NP}$ :

- Generiere eine Auswahlliste von Gegenständen  $J \subseteq \{1..n\}$
- Prüfe  $\sum_{i \in J} g_i = G$
- Der Test ist in  $n$  Schritten, also in polynomieller Zeit, durchführbar

## 2. $3SAT \leq_p KP^*$ :

- e) Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \bar{x}_n\}$

Setze  $f(F) \equiv (a_1..a_n, b_1..b_n, c_1..c_m, d_1..d_m, G)$ , wobei

$a_j$ : Anzahl der  $x_j$  in  $k_i$  an Stelle  $i \leq m$ , 1 an Stelle  $m+j$ , sonst 0 ( $j \leq n$ )

$b_j$ : Anzahl der  $\bar{x}_j$  in  $k_i$  an Stelle  $i \leq m$ , 1 an Stelle  $m+j$ , sonst 0 ( $j \leq n$ )

$c_i$ : 1 an Stelle  $i$ , sonst 0  $d_i$ : 2 an Stelle  $i$ , sonst 0 ( $i \leq m$ )

$$G = \underbrace{4 \dots 4}_{m\text{-mal}} \underbrace{1 \dots 1}_{n\text{-mal}}$$

- f) Dann gilt  $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in KP^*$  (siehe vorige Folie)

- g) Die Gewichte sind jeweils mit linearem Aufwand konstruierbar  
also ist  $f$  in polynomieller Zeit berechenbar

**Wegen  $3SAT \in \mathcal{NPC}$  ist damit auch  $KP^* \in \mathcal{NPC}$**

## ● Independent Set

- Gegeben ein Graph  $G = (V, E)$  der Größe  $n$  und eine Zahl  $k \leq |V|$ .
- Gibt es in  $G$  eine unabhängige Knotenmenge der Größe  $k$ ?

$$IS = \{ (G, k) \mid G = (V, E) \text{ Graph} \wedge \exists V_i \subseteq V. |V_i| \geq k \wedge \forall u, v \in V_i. \{u, v\} \notin E \}$$

## ● Subgraph Isomorphism

- Gegeben zwei Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$ .
- Gibt es einen Subgraphen  $H$  von  $G_1$ , der isomorph zu  $G_2$  ist?

$$SGI = \{ (G_1, G_2) \mid G_1, G_2 \text{ Graphen} \wedge \exists H \text{ Graph. } H \subseteq G_1 \wedge H \cong G_2 \}$$

## ● Largest Common Subgraph

- Gegeben Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  und eine Zahl  $k \leq |G_1|$
- Gibt es isomorphe Subgraphen  $H_1$  von  $G_1$  und  $H_2$  von  $G_2$  der Größe  $k$ ?

$$LCS = \{ (G_1, G_2, k) \mid G_1, G_2 \text{ Graphen} \wedge k \leq |G_1| \wedge \exists H_1, H_2 \text{ Graphen.} \\ H_1 \subseteq G_1 \wedge H_2 \subseteq G_2 \wedge H_1 \cong H_2 \wedge |H_1| \geq k \}$$

# WEITERE $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIGE PROBLEME

## ● **Partitionsproblem**

- Gegeben  $n$  Objekte mit Wert  $b_1, \dots, b_n$ .
- Gibt es eine Aufteilung der Objekte in zwei gleichwertige Stapel?

$$\mathbf{PART} = \{ b_1, \dots, b_n \mid b_i \in \mathbb{N} \wedge \exists I \subseteq \{1..n\}. \sum_{i \in I} b_i = \sum_{i \in \bar{I}} b_i \}$$

## ● **Binpacking**

- Gegeben  $n$  Objekte der Größe  $a_1, \dots, a_n$  und  $k$  Behälter der Größe  $b$
- Kann man alle Objekte in den Behältern unterbringen?

$$\mathbf{BPP} = \{ (a_1, \dots, a_n, b, k) \mid \exists f: \{1..n\} \rightarrow \{1..k\}. \forall j \leq k. \sum_{i \in \{i \mid f(i)=j\}} a_i \leq b \}$$

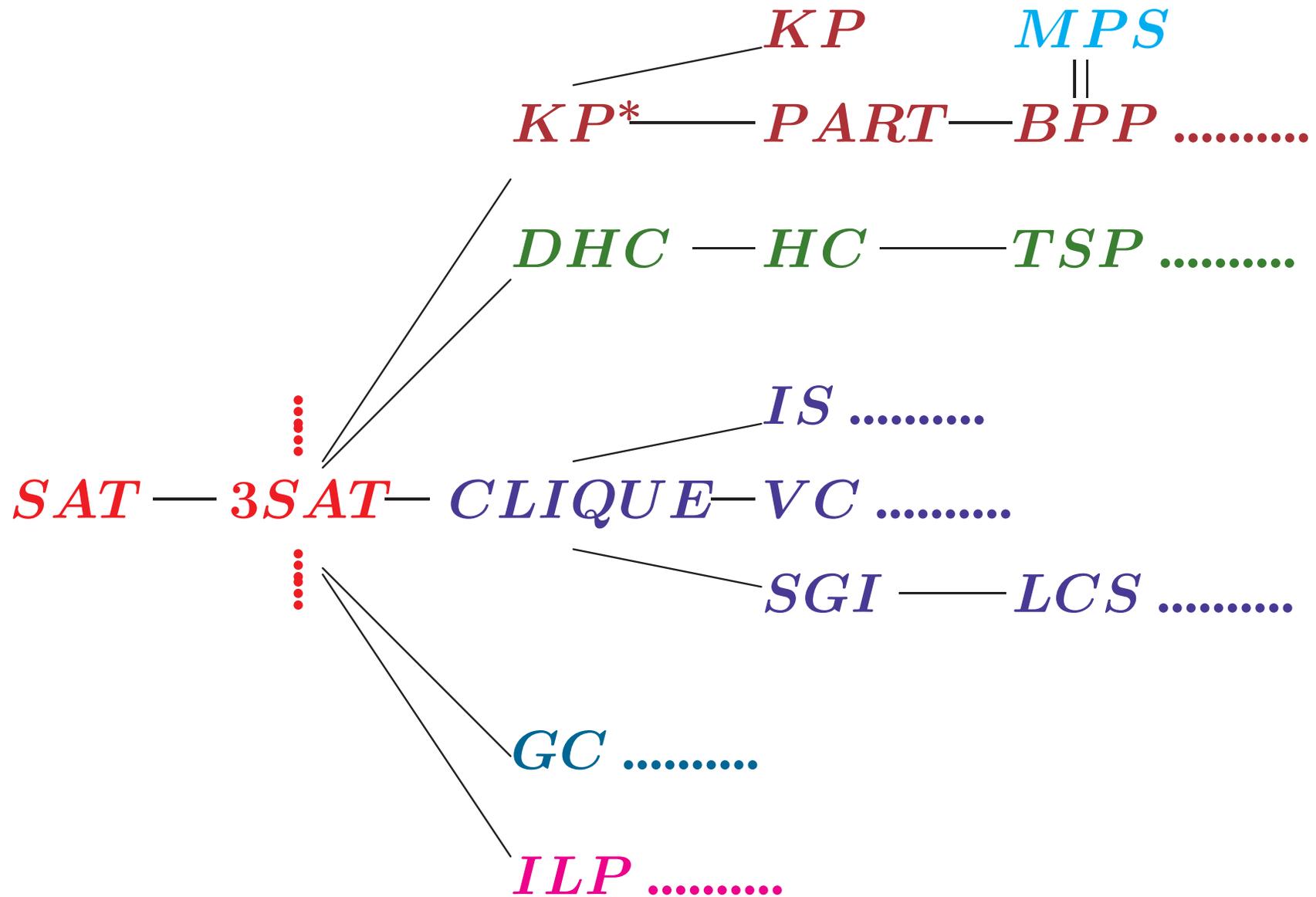
## ● **Multiprozessor-Scheduling (MPS)**

- Gegeben  $n$  Prozesse  $j_i$  mit Laufzeit  $t(j_i)$ ,  $m$  Prozessoren, Deadline  $t_D$ .
- Gibt es eine Verteilung der Prozesse auf die Prozessoren, so daß bei Startzeit  $t_0$  alle Prozesse vor der Zeit  $t_D$  beendet sind?

## ● **Integer Linear Programming (ILP)**

- Gegeben eine  $k \times k$  Matrix  $A$  und einen Vektor  $\vec{b} \in \mathbb{Z}^k$
- Gibt es ein  $\vec{x} \in \mathbb{Z}^k$ , welches das lineare Ungleichungssystem  $A * \vec{x} \geq \vec{b}$  löst?

# $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIGE PROBLEME – REDUKTIONSTRUKTUR



# ANHANG

DHC IST  $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG:  $3SAT \leq_p DHC$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \overline{x_n}\}$

# DHC IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG: $3SAT \leq_p DHC$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \overline{x_n}\}$

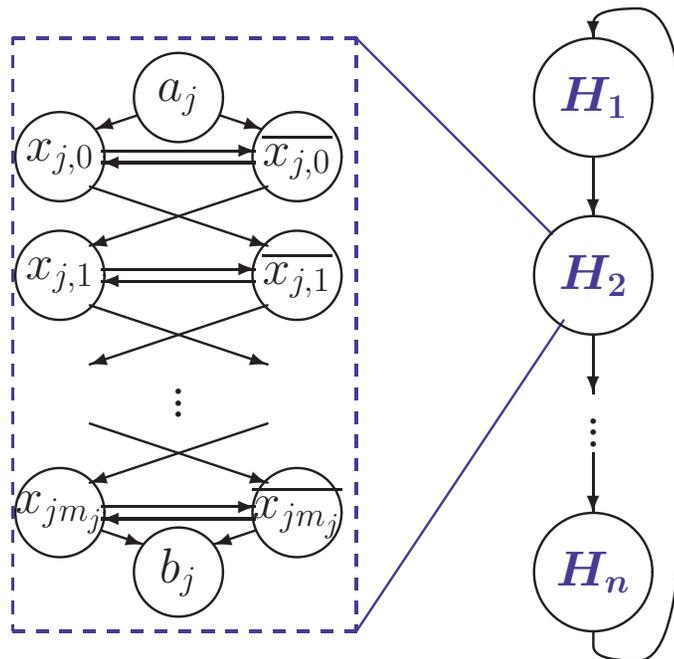
e) Konstruiere Graphen  $G_F \equiv f(F)$  aus drei Komponenten

# DHC IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG: $3SAT \leq_p DHC$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \bar{x}_n\}$

e) **Konstruiere Graphen  $G_F \equiv f(F)$  aus drei Komponenten**

- Teilgraphen  $H_j$  für Codierung der Variablenvorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$



$x_{j,i} \hat{=}$   $i$ -tes Vorkommen von  $x_j$  in  $F$   
 $m_j \hat{=}$  maximales Vorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$

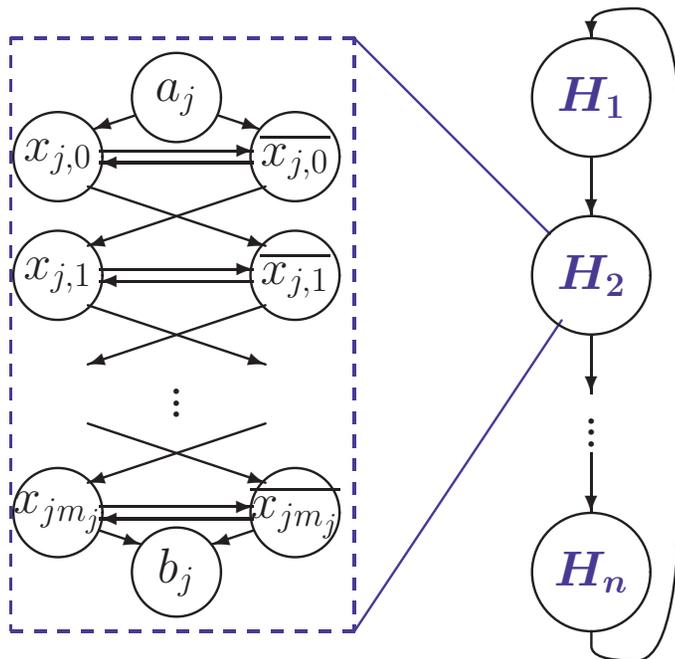
# DHC IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG: $3SAT \leq_p DHC$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \bar{x}_n\}$

e) Konstruiere Graphen  $G_F \equiv f(F)$  aus drei Komponenten

- Teilgraphen  $H_j$  für Codierung der Variablenvorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$

$x_{j,i} \hat{=}$   $i$ -tes Vorkommen von  $x_j$  in  $F$   
 $m_j \hat{=}$  maximales Vorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$



Zwei Rundwege möglich:  $a_j \rightarrow x_{j,0} \rightarrow \bar{x}_{j,0} \rightarrow \dots \rightarrow x_{j,i} \rightarrow \bar{x}_{j,i} \rightarrow \dots \rightarrow b_j$  oder  
 $a_j \rightarrow \bar{x}_{j,0} \rightarrow x_{j,0} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_{j,i} \rightarrow x_{j,i} \rightarrow \dots \rightarrow b_j$

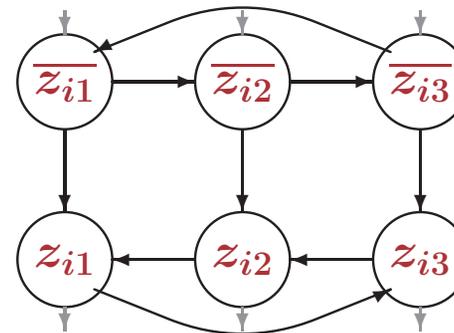
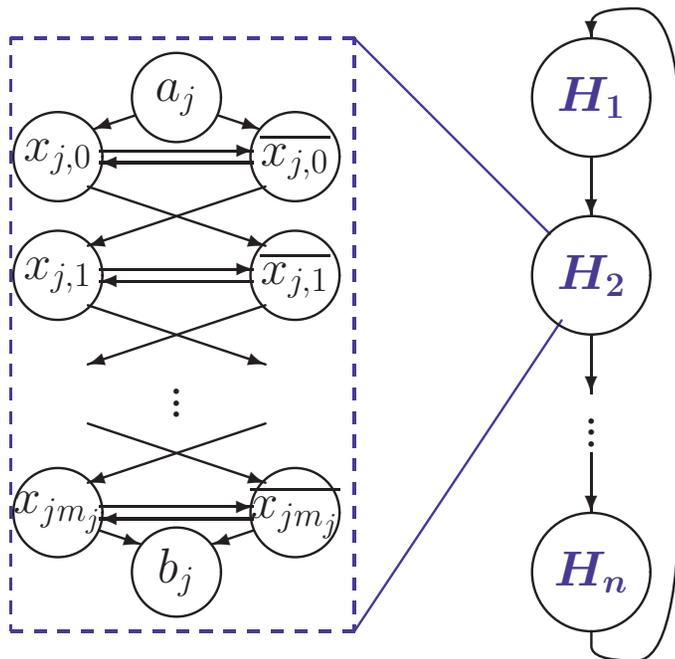
# DHC IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG: $3SAT \leq_p DHC$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \bar{x}_n\}$

e) **Konstruiere Graphen  $G_F \equiv f(F)$  aus drei Komponenten**

- Teilgraphen  $H_j$  für Codierung der Variablenvorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$

$x_{j,i} \hat{=}$   $i$ -tes Vorkommen von  $x_j$  in  $F$   
 $m_j \hat{=}$  maximales Vorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$



- Teilgraph für Codierung der Klauseln

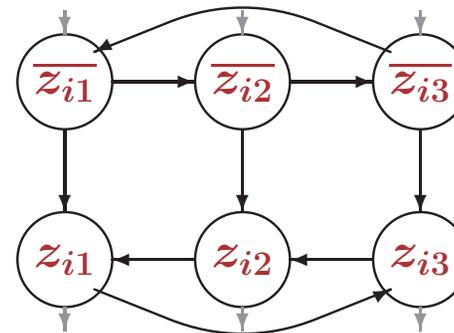
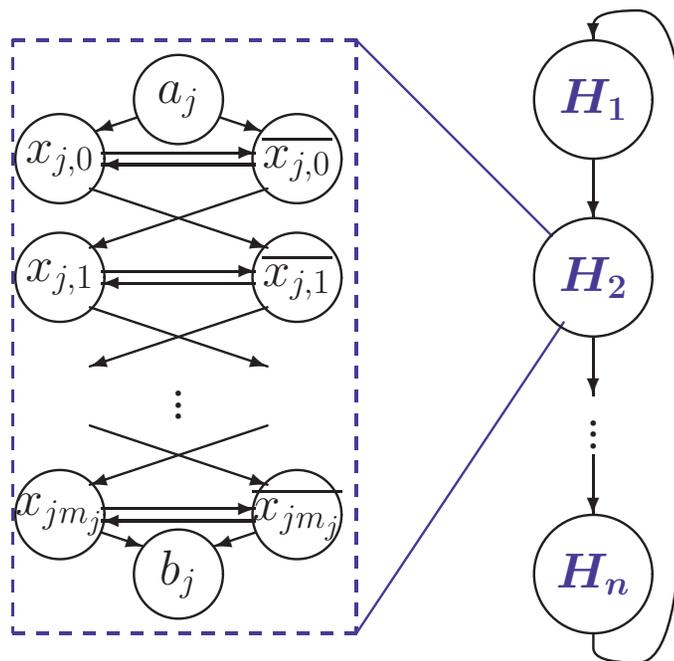
# DHC IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG: $3SAT \leq_p DHC$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \bar{x}_n\}$

e) **Konstruiere Graphen  $G_F \equiv f(F)$  aus drei Komponenten**

- Teilgraphen  $H_j$  für Codierung der Variablenvorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$

$x_{j,i} \hat{=}$   $i$ -tes Vorkommen von  $x_j$  in  $F$   
 $m_j \hat{=}$  maximales Vorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$



- Teilgraph für **Codierung der Klauseln**

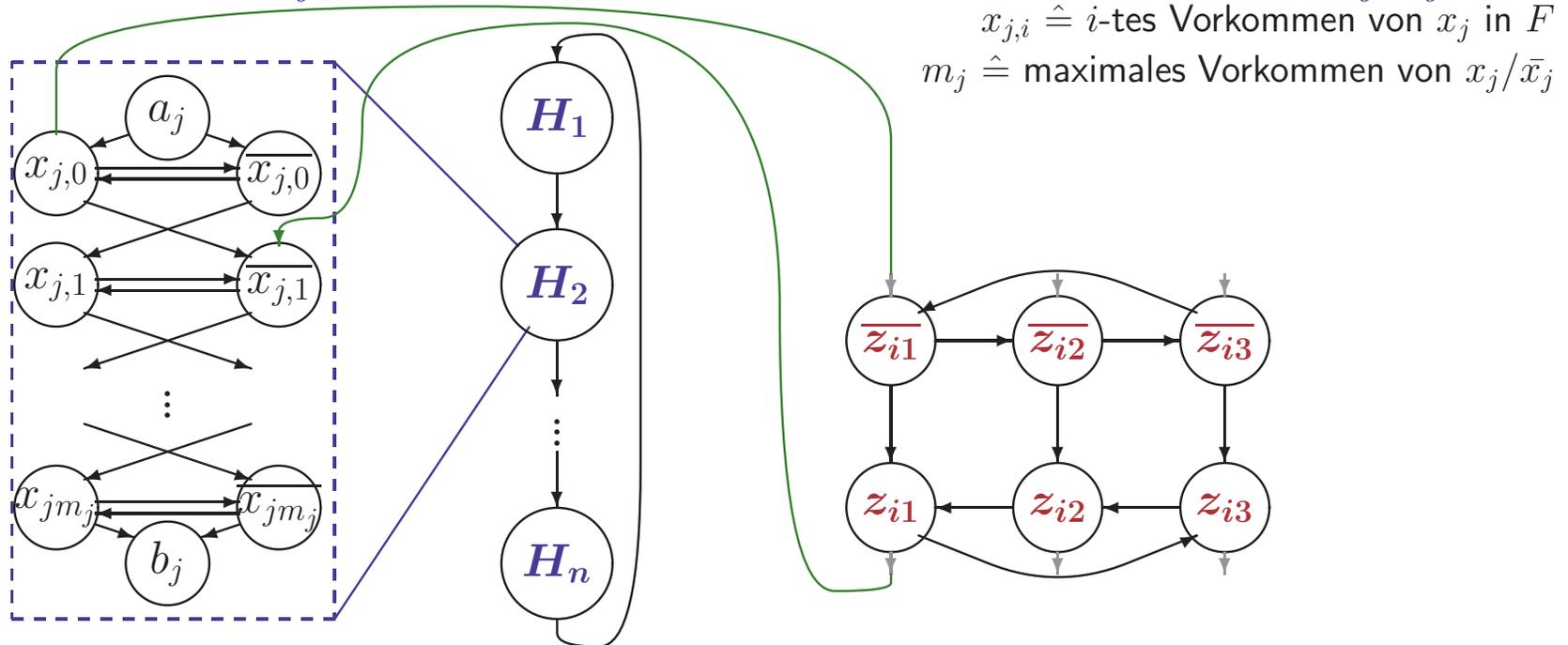
Rundweg nur möglich, wenn man bei einem  $\bar{z}_{ik}$  einsteigt und bei  $z_{ik}$  herausgeht

# DHC IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG: $3SAT \leq_p DHC$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \bar{x}_n\}$

e) **Konstruiere Graphen  $G_F \equiv f(F)$  aus drei Komponenten**

- Teilgraphen  $H_j$  für Codierung der Variablenvorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$



- Teilgraph für **Codierung der Klauseln**
- Verbindungskanten **zwischen Variablen und Klauselliteralen**

Für  $z_{ik} = x_j$  verbinde erstes ungenutzte Vorkommen  $x_{j,p}$  mit  $\bar{z}_{ik}$  und  $z_{i,k}$  mit  $\bar{x}_{j,p+1}$

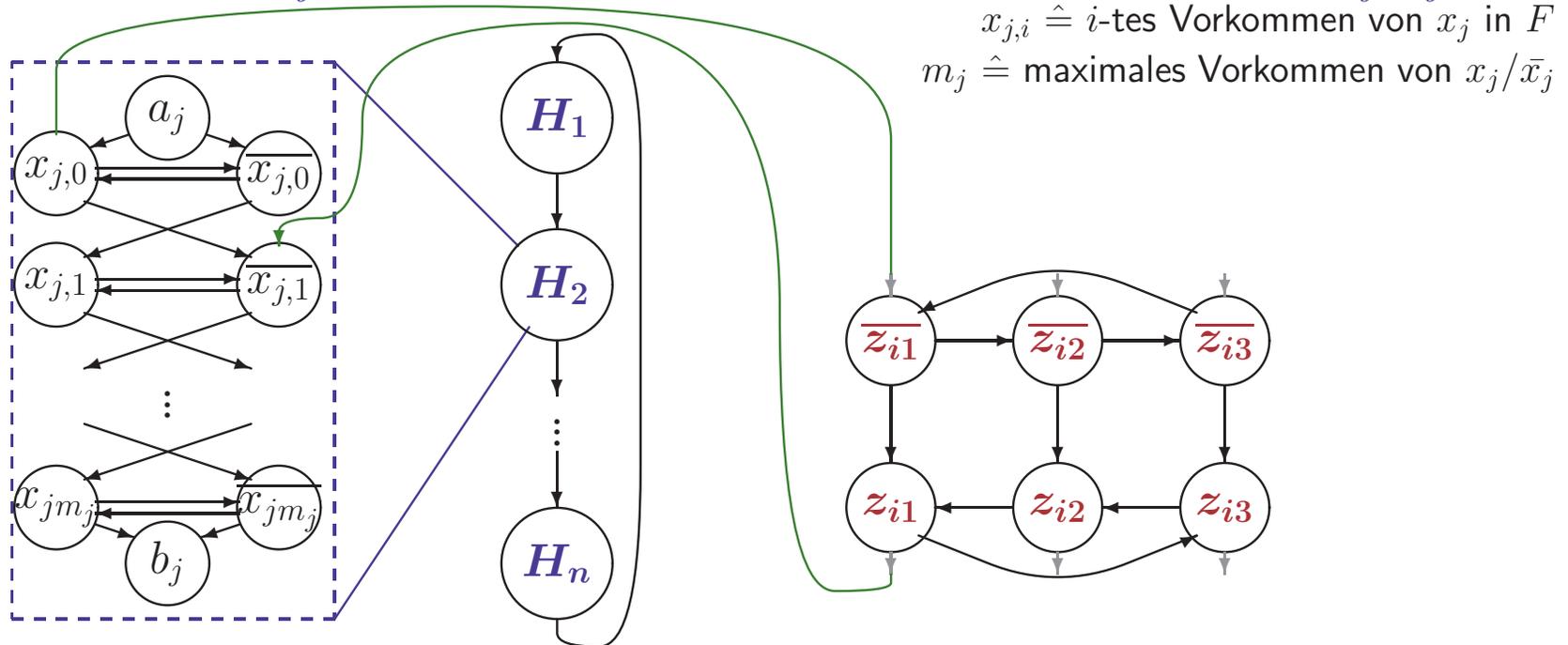
Für  $z_{ik} = \bar{x}_j$  verbinde erstes ungenutzte Vorkommen  $\bar{x}_{j,p}$  mit  $\bar{z}_{ik}$  und  $z_{ik}$  mit  $x_{j,p+1}$

# DHC IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG: $3SAT \leq_p DHC$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \bar{x}_n\}$

e) **Konstruiere Graphen  $G_F \equiv f(F)$  aus drei Komponenten**

- Teilgraphen  $H_j$  für Codierung der Variablenvorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$



- Teilgraph für **Codierung der Klauseln**
- Verbindungskanten **zwischen Variablen und Klauselliteralen**

Für  $z_{ik} = x_j$  verbinde erstes ungenutzte Vorkommen  $x_{j,p}$  mit  $\bar{z}_{ik}$  und  $z_{i,k}$  mit  $\bar{x}_{j,p+1}$

Für  $z_{ik} = \bar{x}_j$  verbinde erstes ungenutzte Vorkommen  $\bar{x}_{j,p}$  mit  $\bar{z}_{ik}$  und  $z_{ik}$  mit  $x_{j,p+1}$

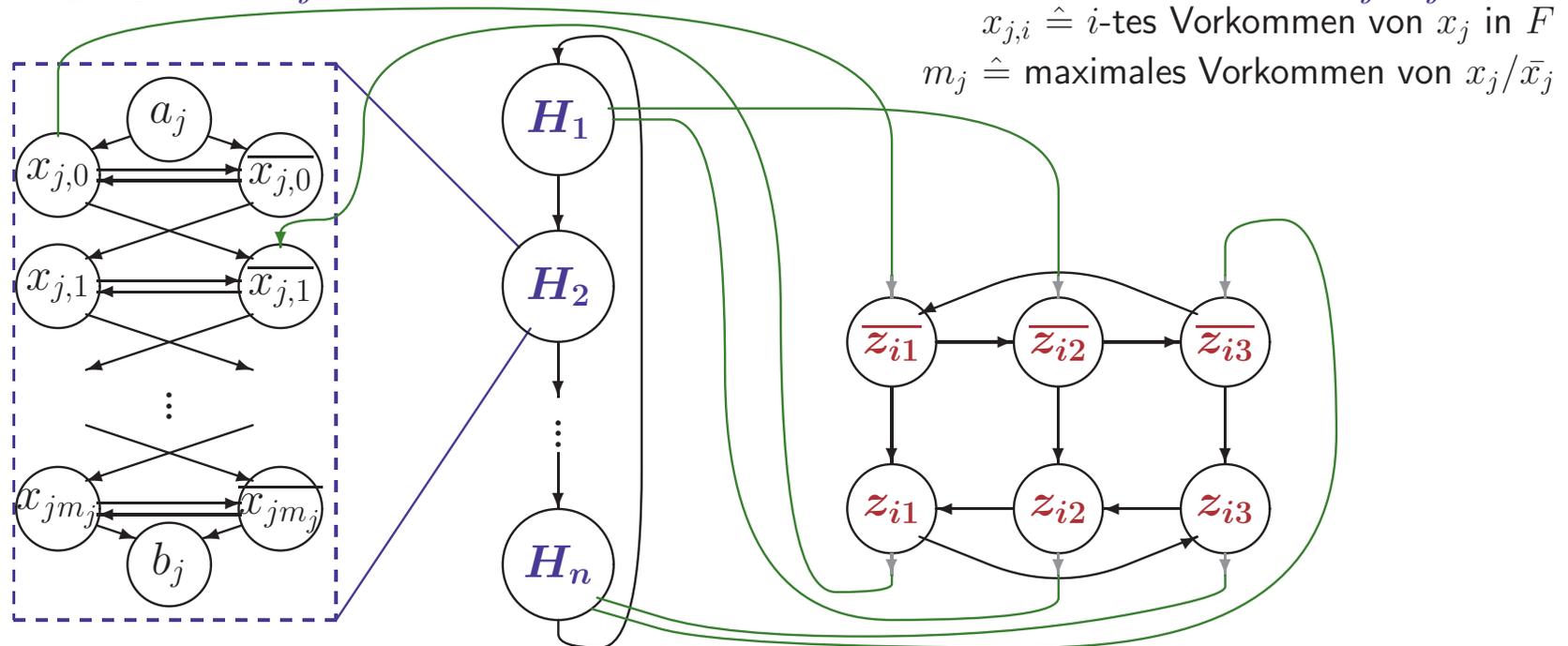
Rundweg durch  $H_j$  möglich, wenn man **nur Verbindungskanten durch  $x_{j,p}$  ( $x_j \hat{=} 1$ )** oder **nur Verbindungskanten durch  $\bar{x}_{j,p}$  ( $x_j \hat{=} 0$ )** durchläuft

# DHC IST $\mathcal{NP}$ -VOLLSTÄNDIG: $3SAT \leq_p DHC$

Gegeben  $F = (k_1, \dots, k_m)$  mit  $k_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$  und  $z_{ij} \in \{x_1, \dots, \bar{x}_n\}$

e) **Konstruiere Graphen  $G_F \equiv f(F)$  aus drei Komponenten**

- Teilgraphen  $H_j$  für Codierung der Variablenvorkommen von  $x_j/\bar{x}_j$



- Teilgraph für **Codierung der Klauseln**
- Verbindungskanten **zwischen Variablen und Klauselliteralen**

Für  $z_{ik} = x_j$  verbinde erstes ungenutzte Vorkommen  $x_{j,p}$  mit  $\bar{z}_{ik}$  und  $z_{i,k}$  mit  $\bar{x}_{j,p+1}$

Für  $z_{ik} = \bar{x}_j$  verbinde erstes ungenutzte Vorkommen  $\bar{x}_{j,p}$  mit  $\bar{z}_{ik}$  und  $z_{ik}$  mit  $x_{j,p+1}$

g)  **$f$  ist in polynomieller Zeit berechenbar**

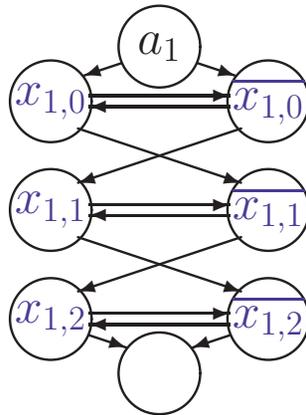
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

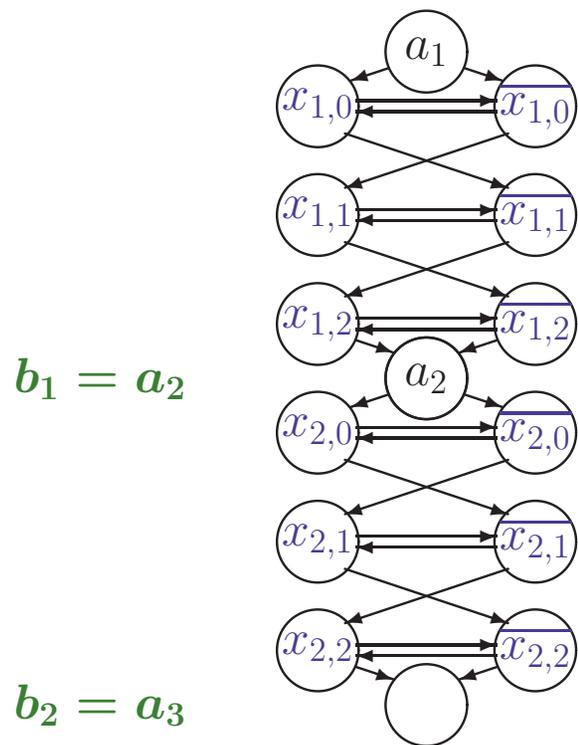
$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

$$b_1 = a_2$$



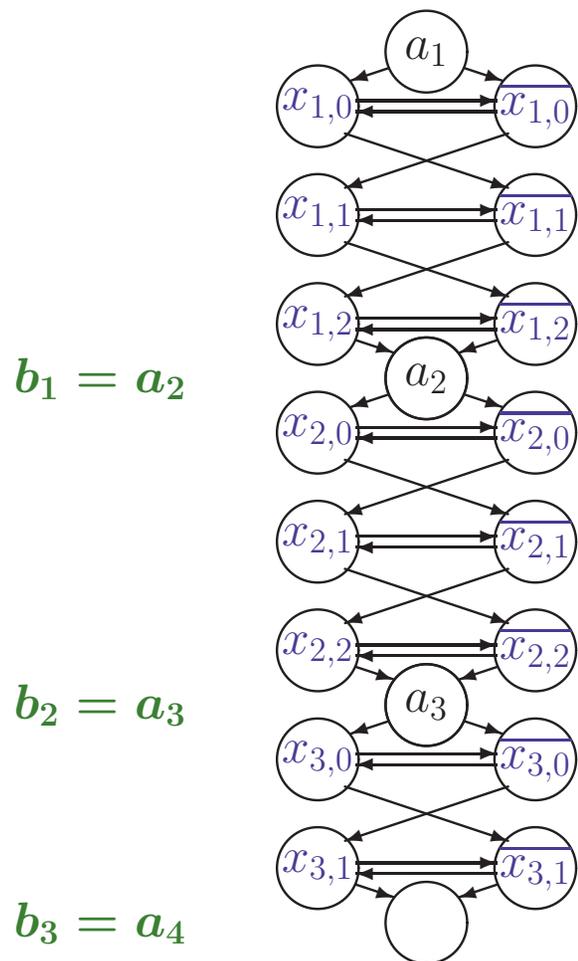
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



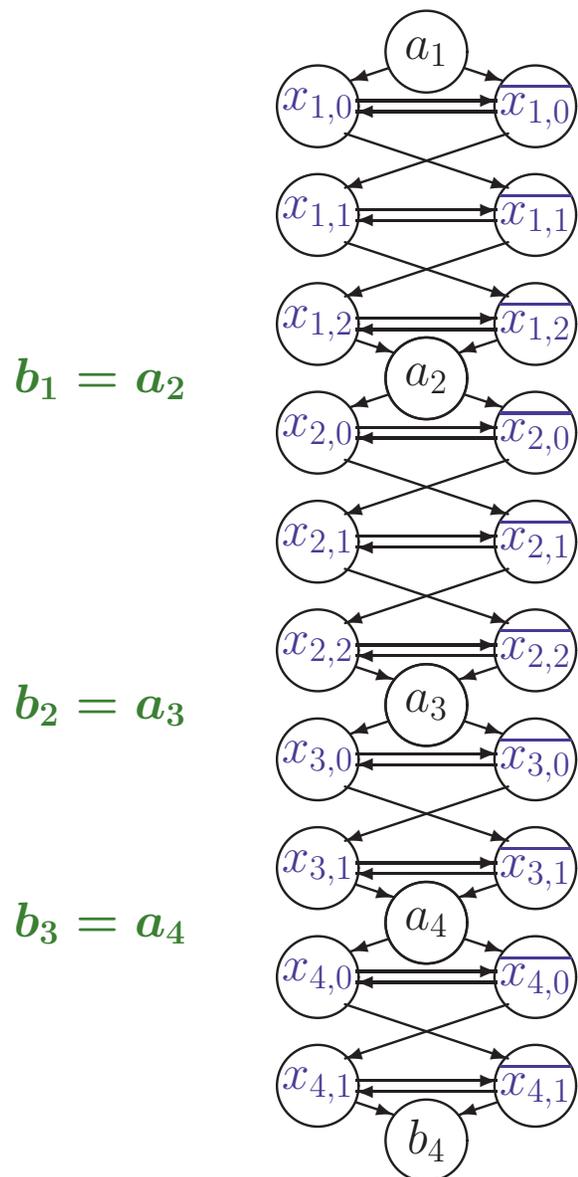
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



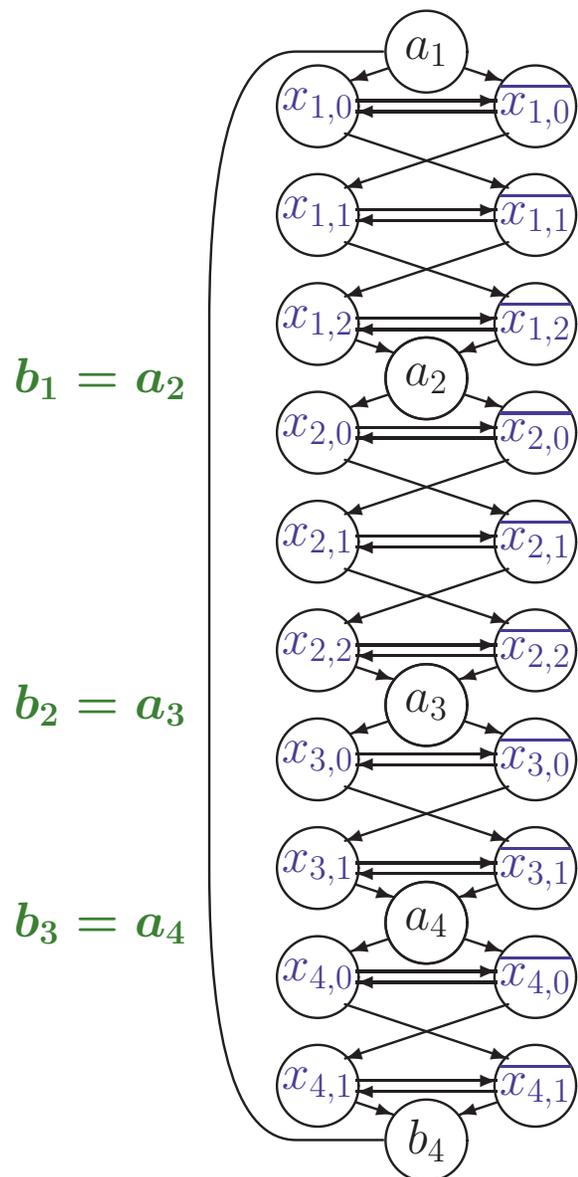
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



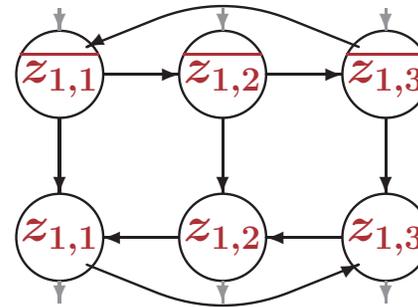
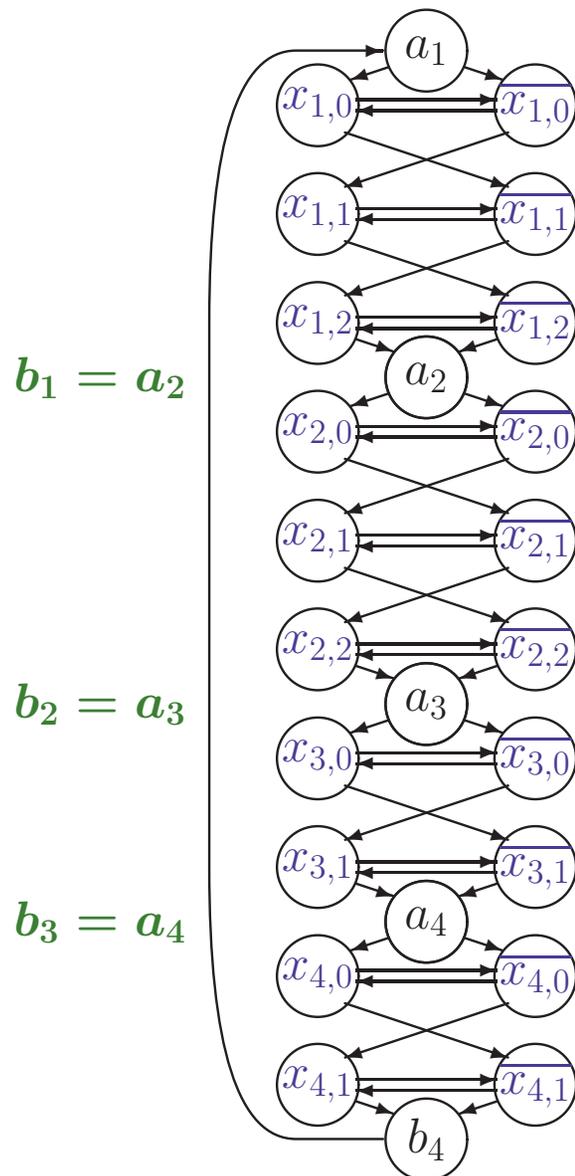
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



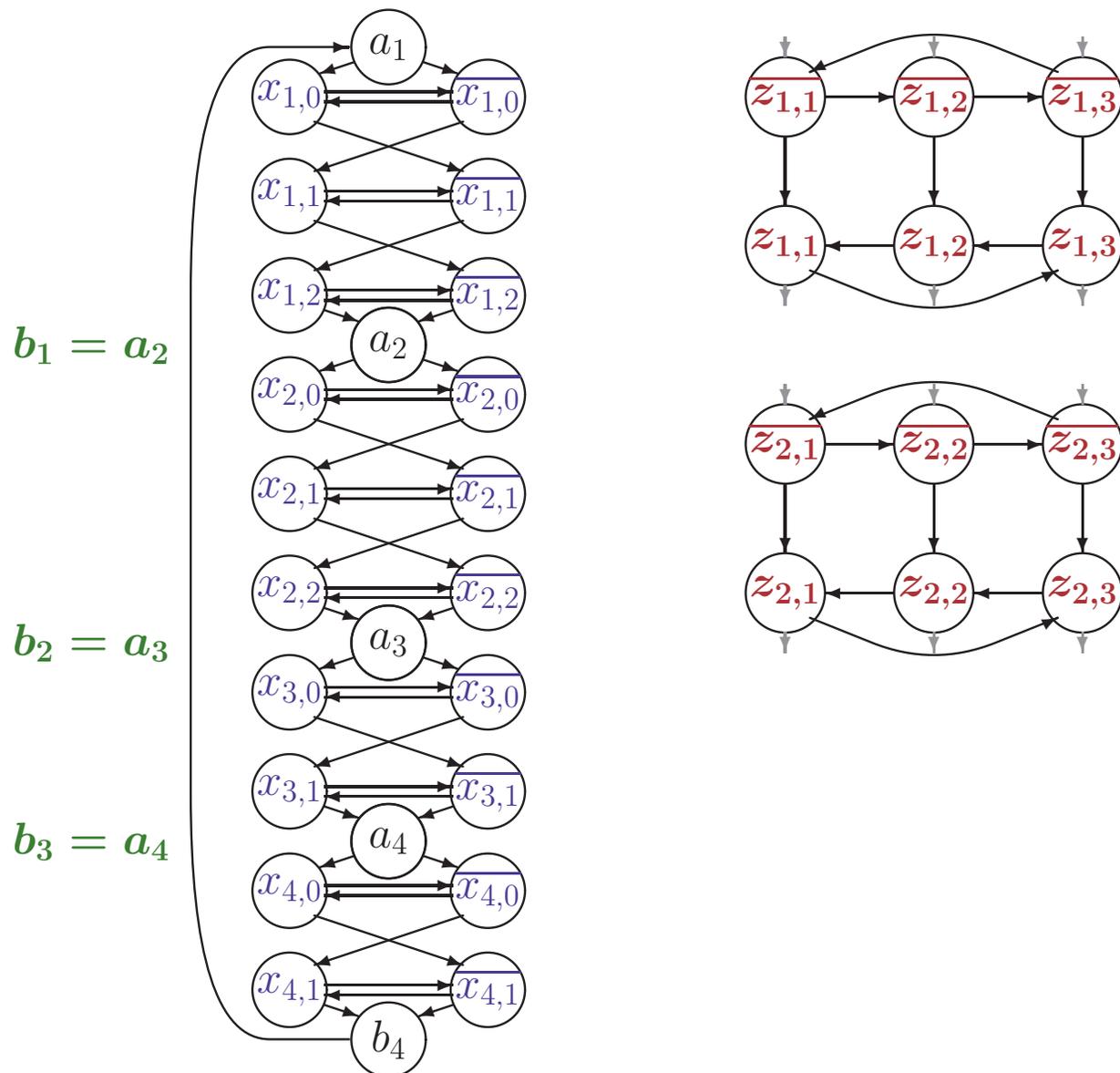
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



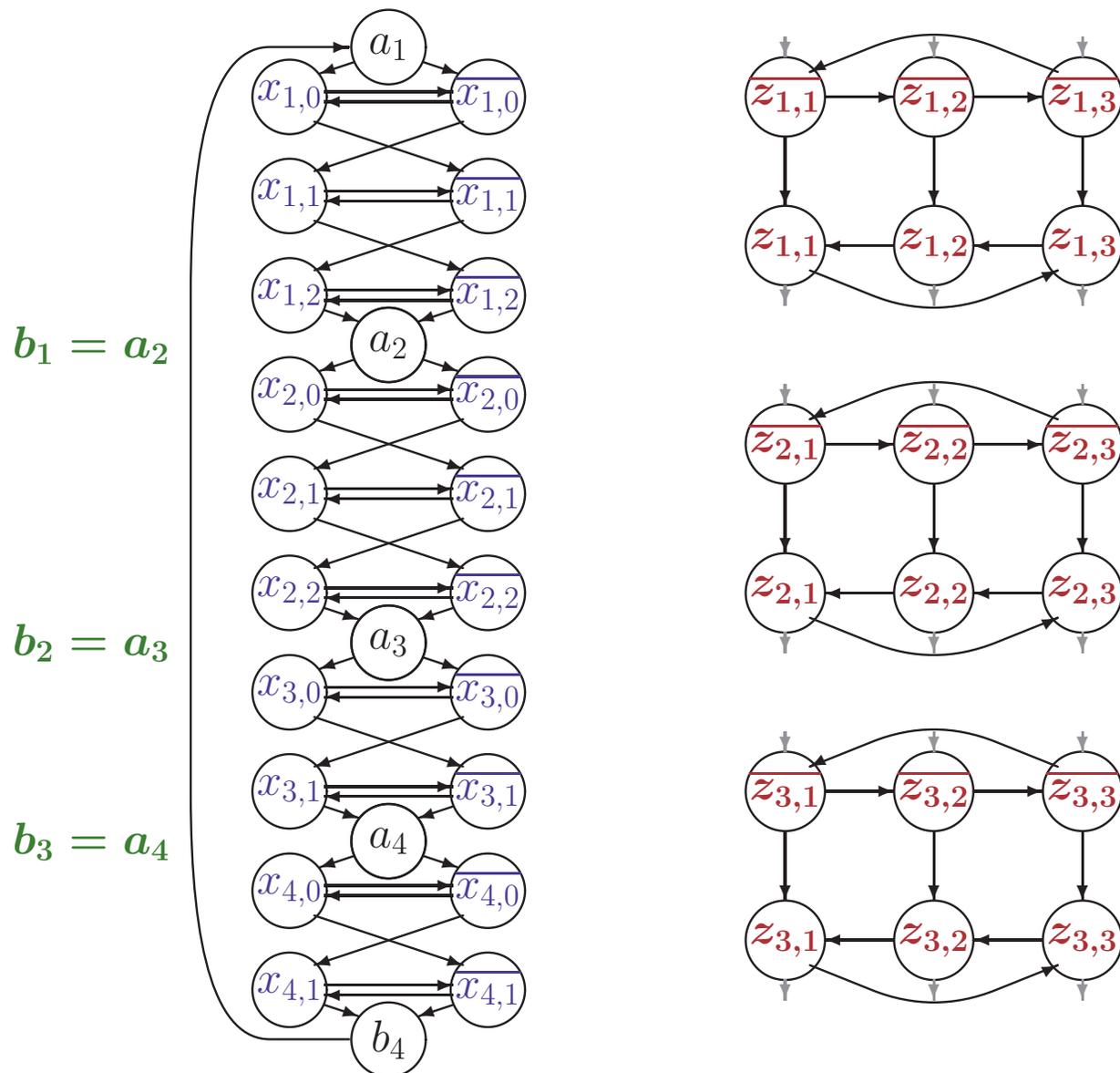
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



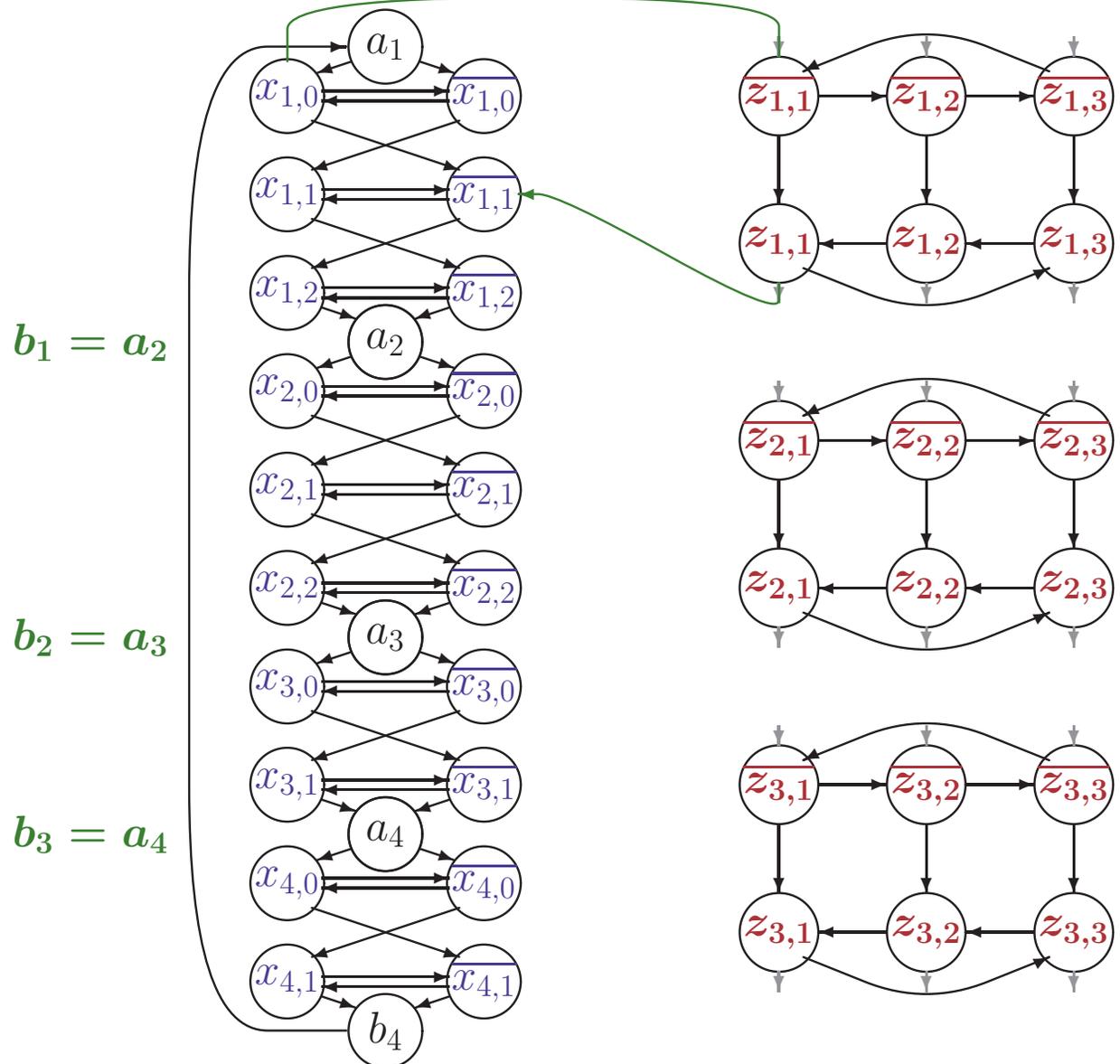
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



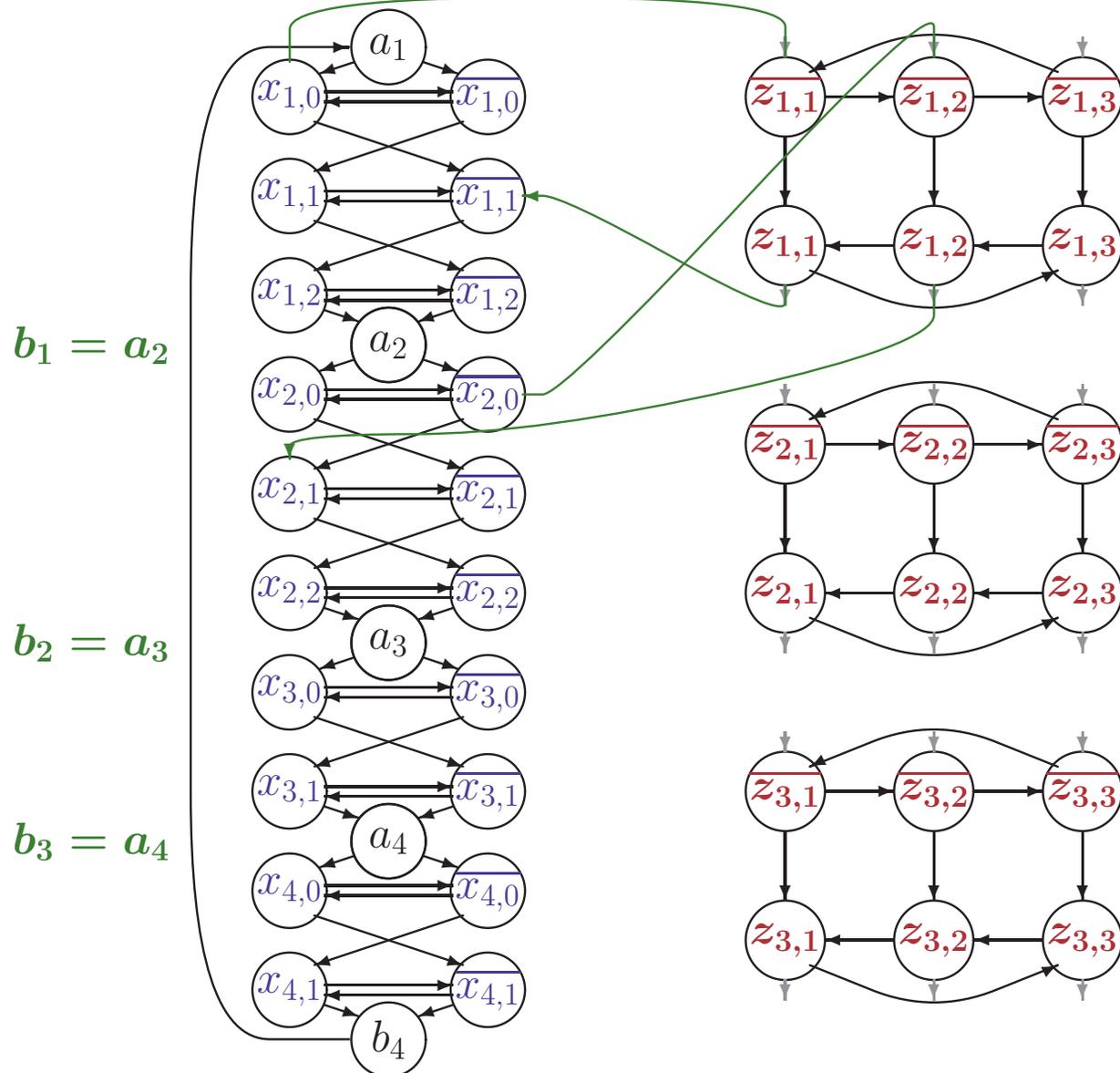
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



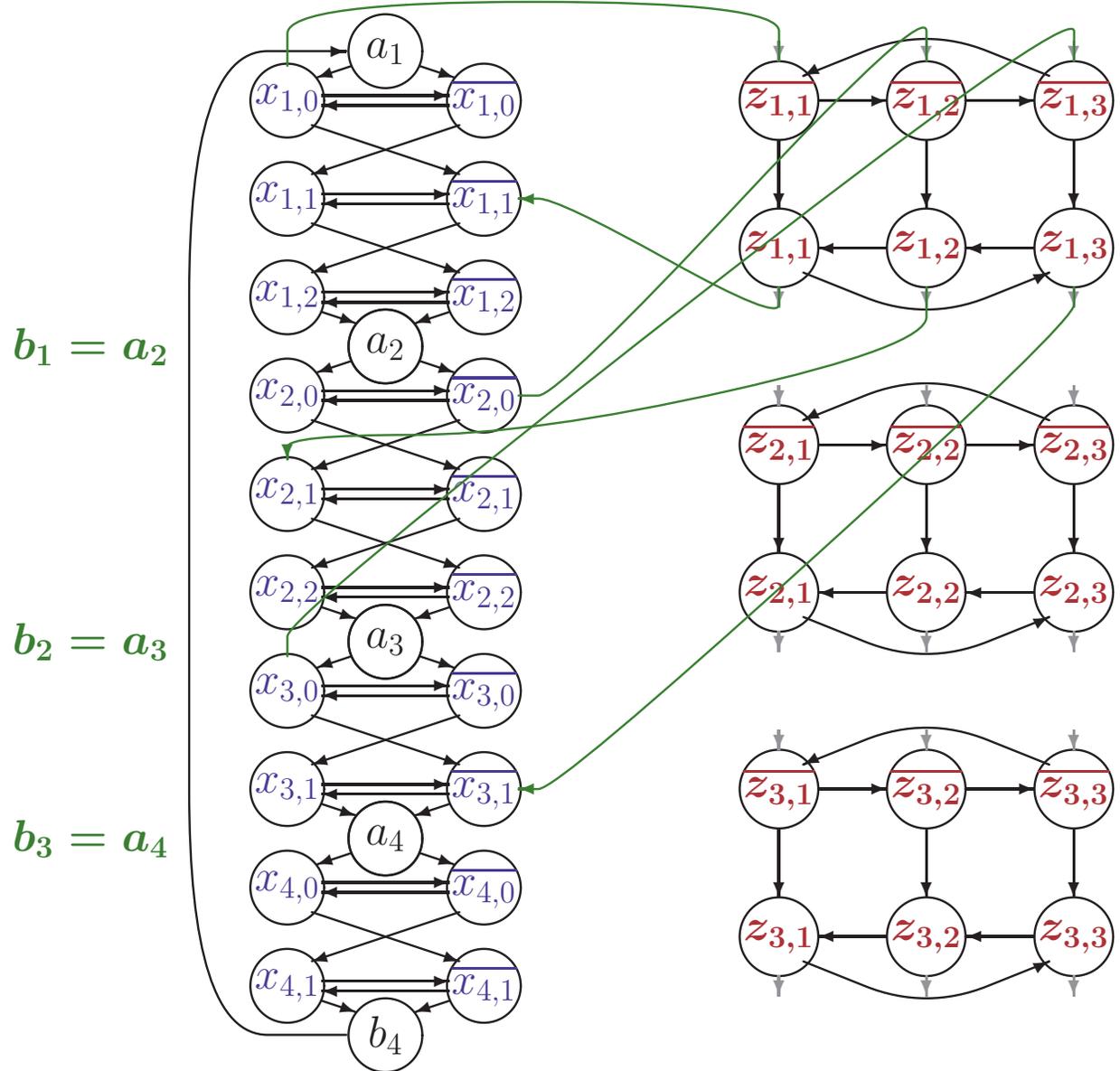
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



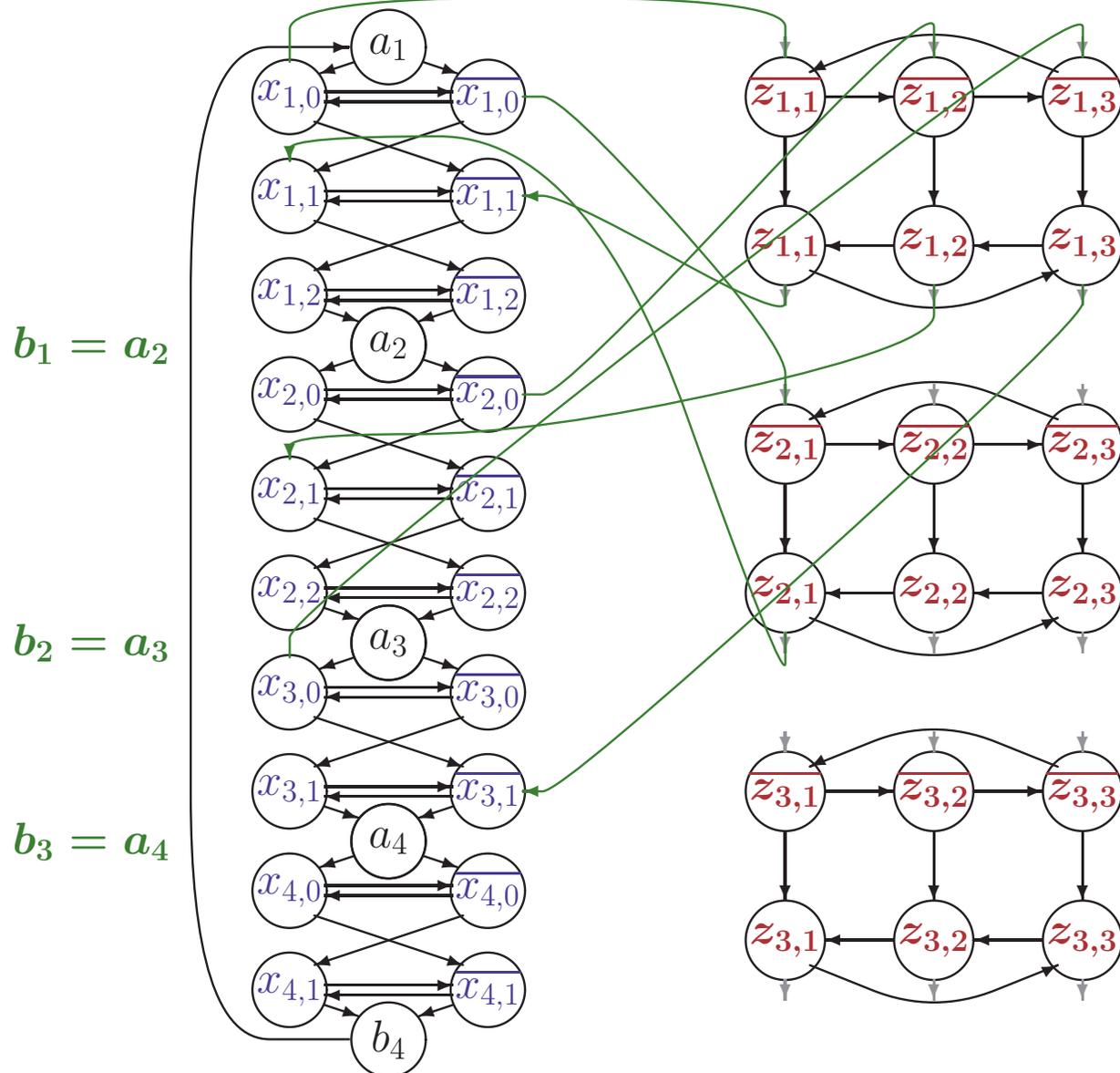
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



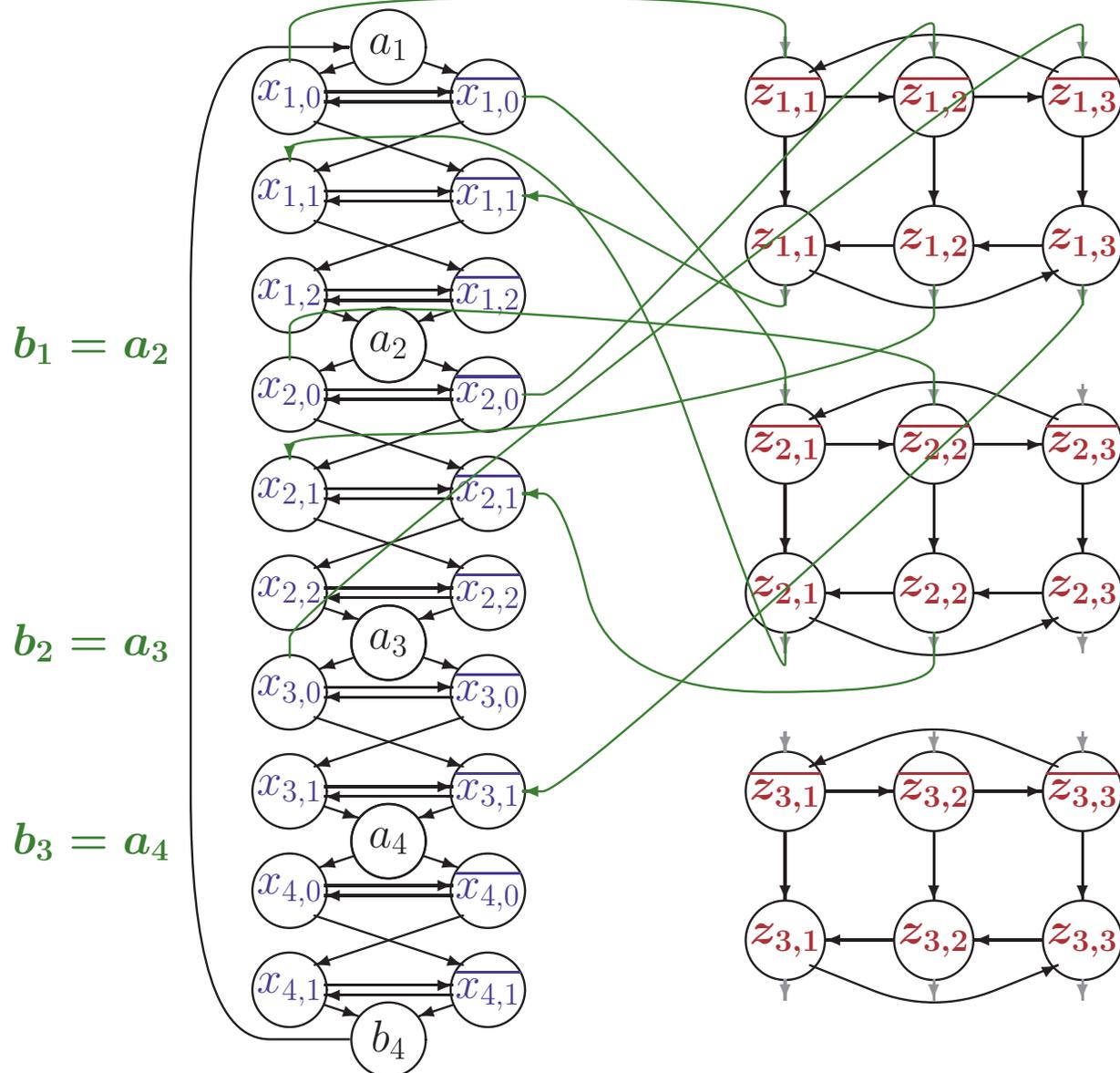
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



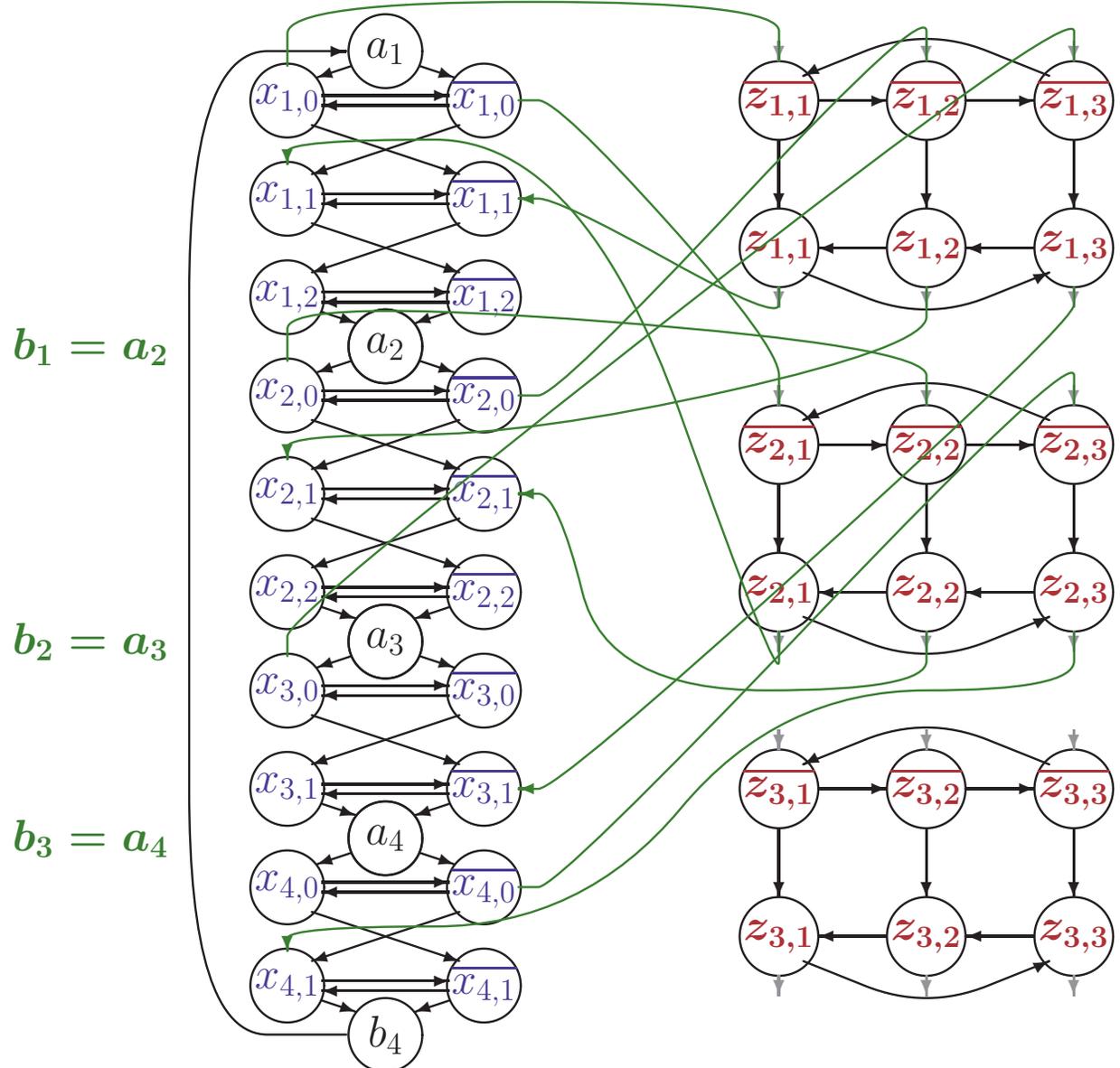
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



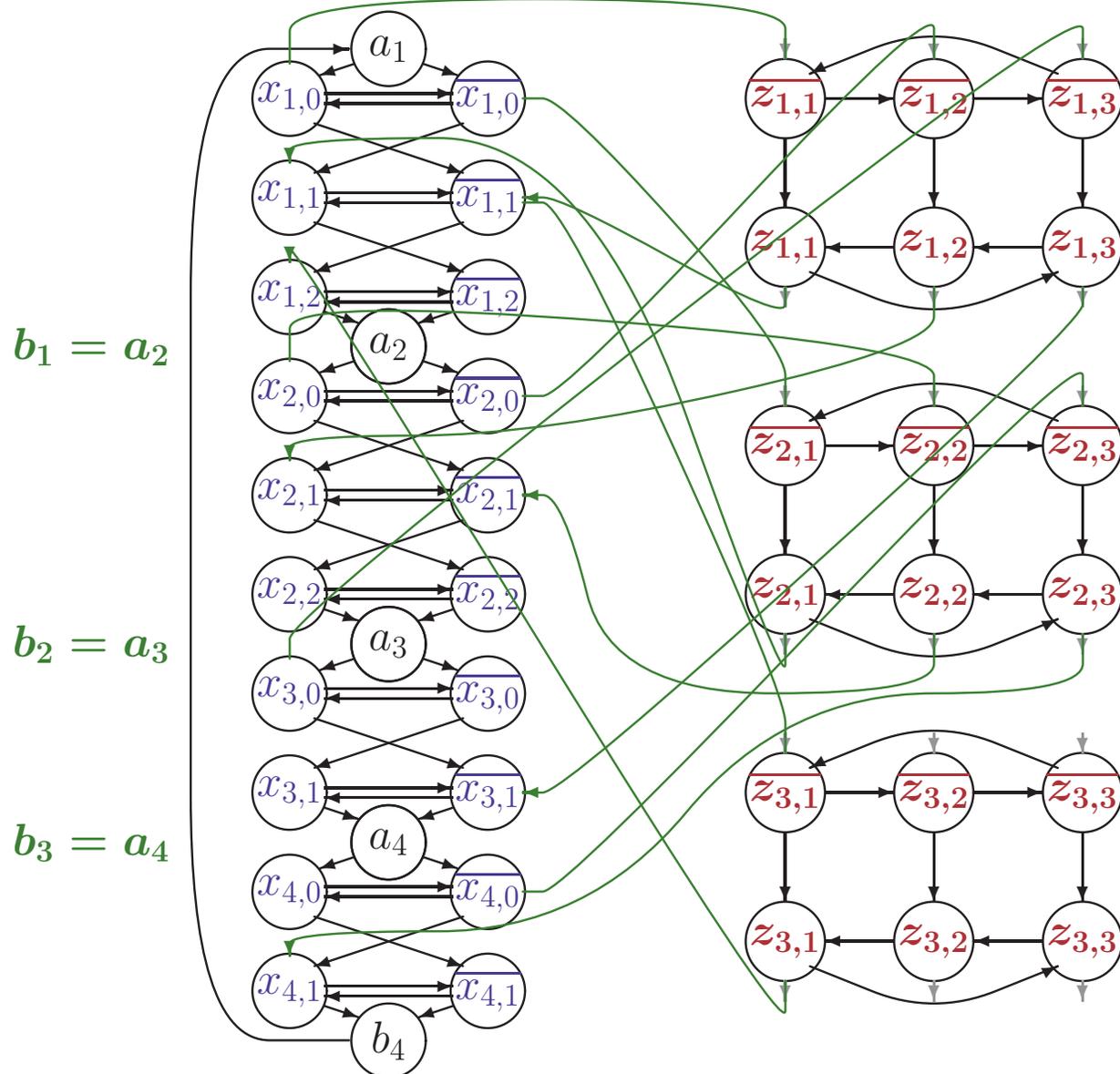
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



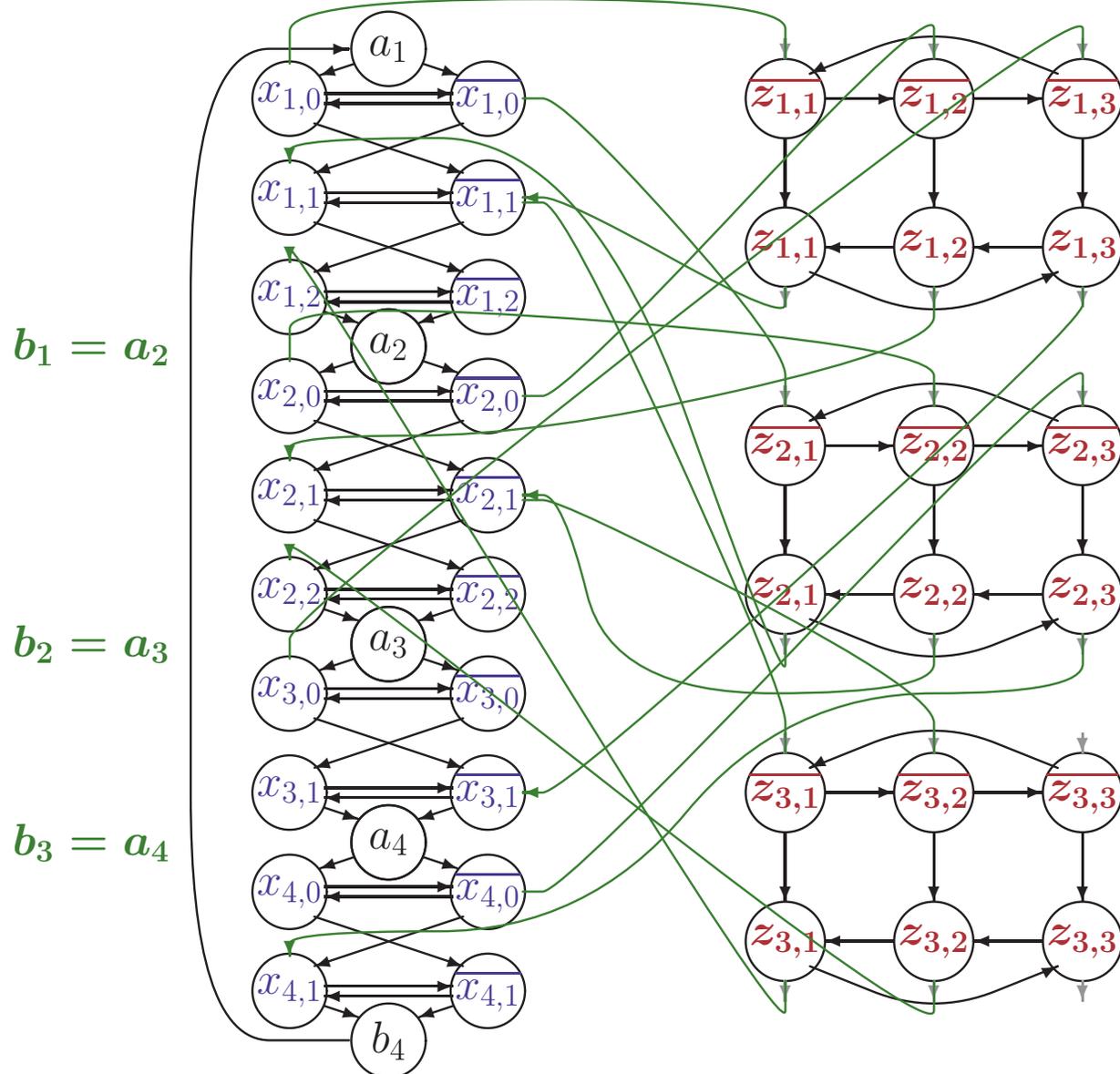
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



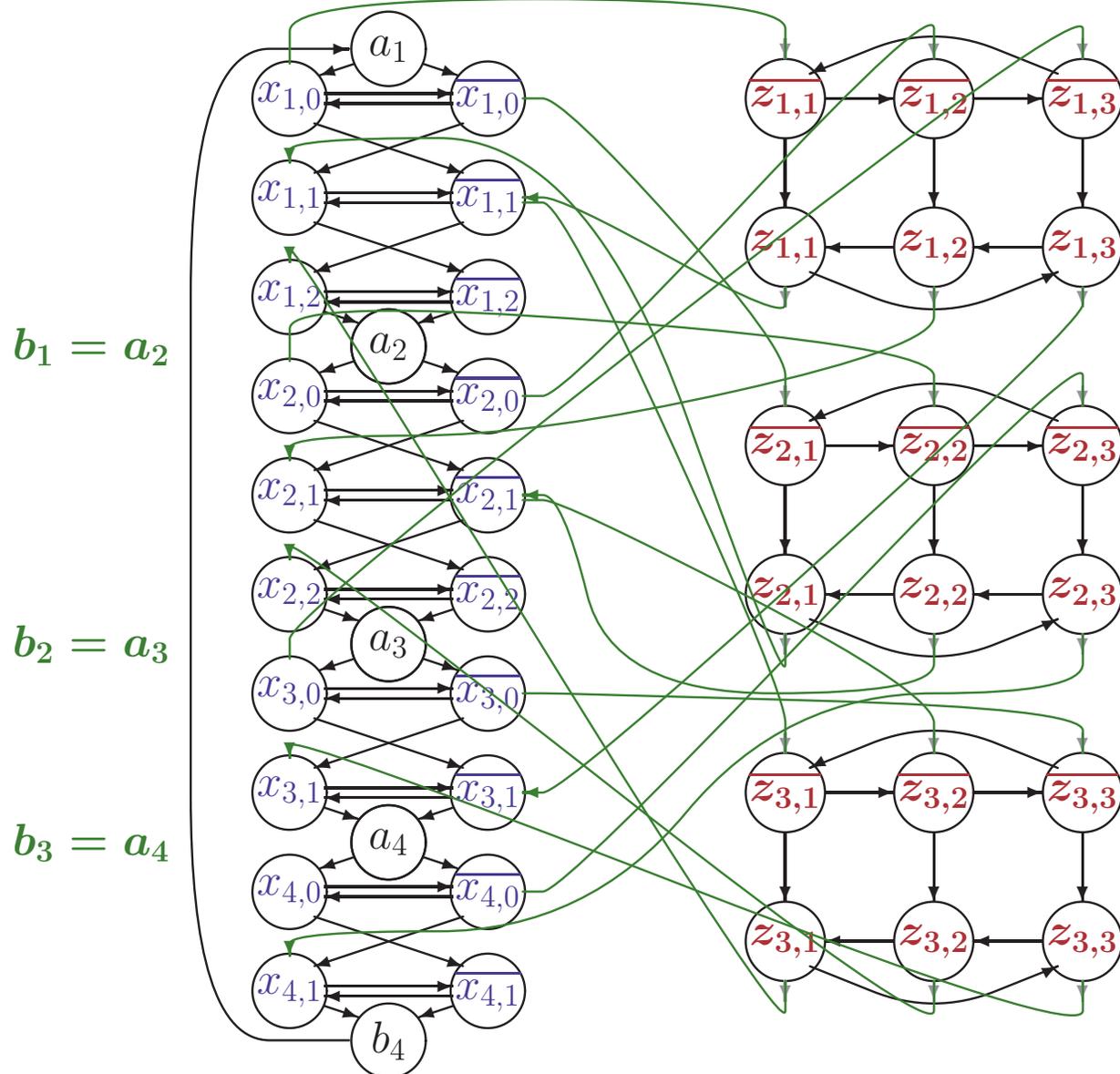
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



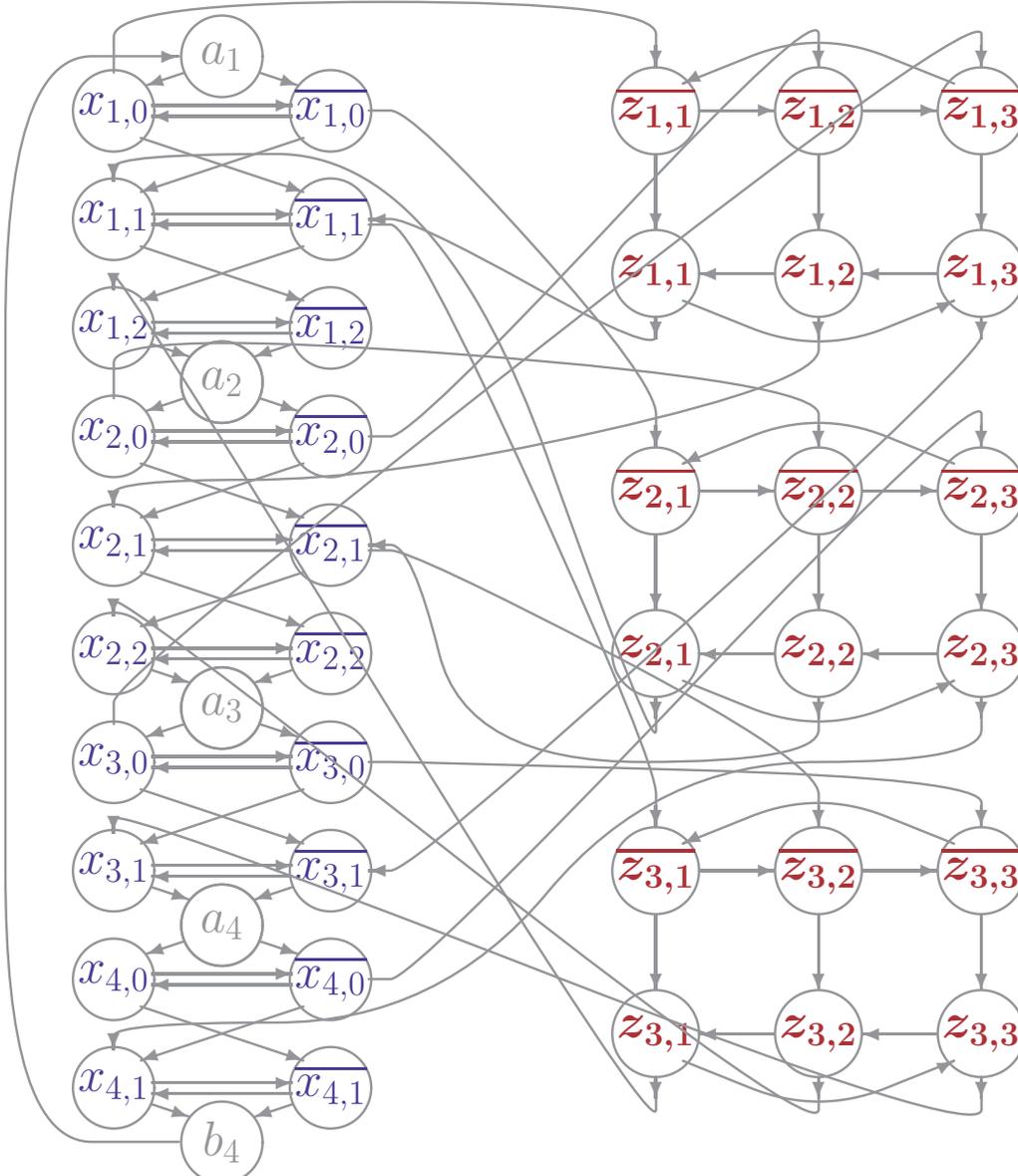
# CODIERUNG EINER FORMEL ALS DHC PROBLEM

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

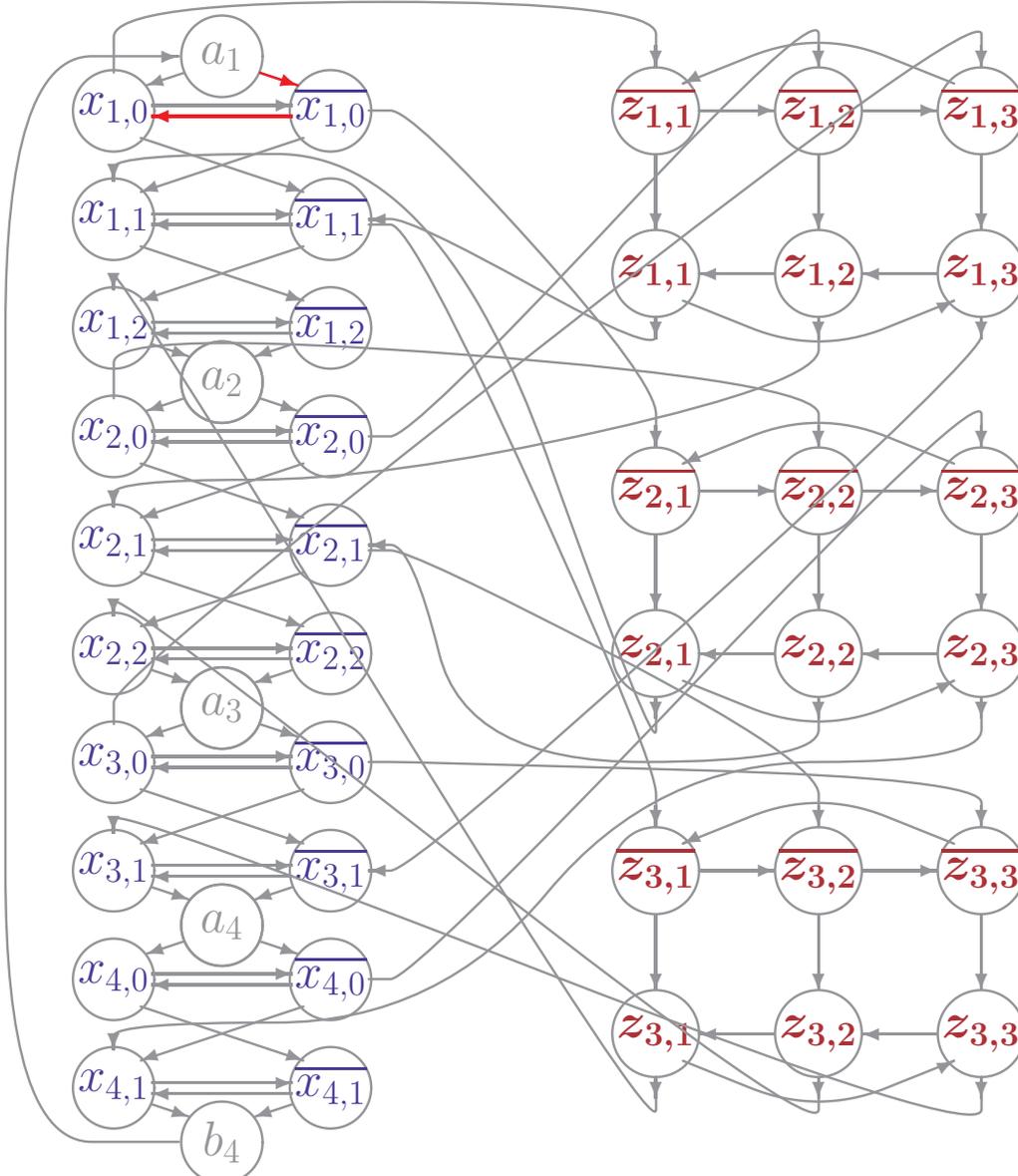
$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$

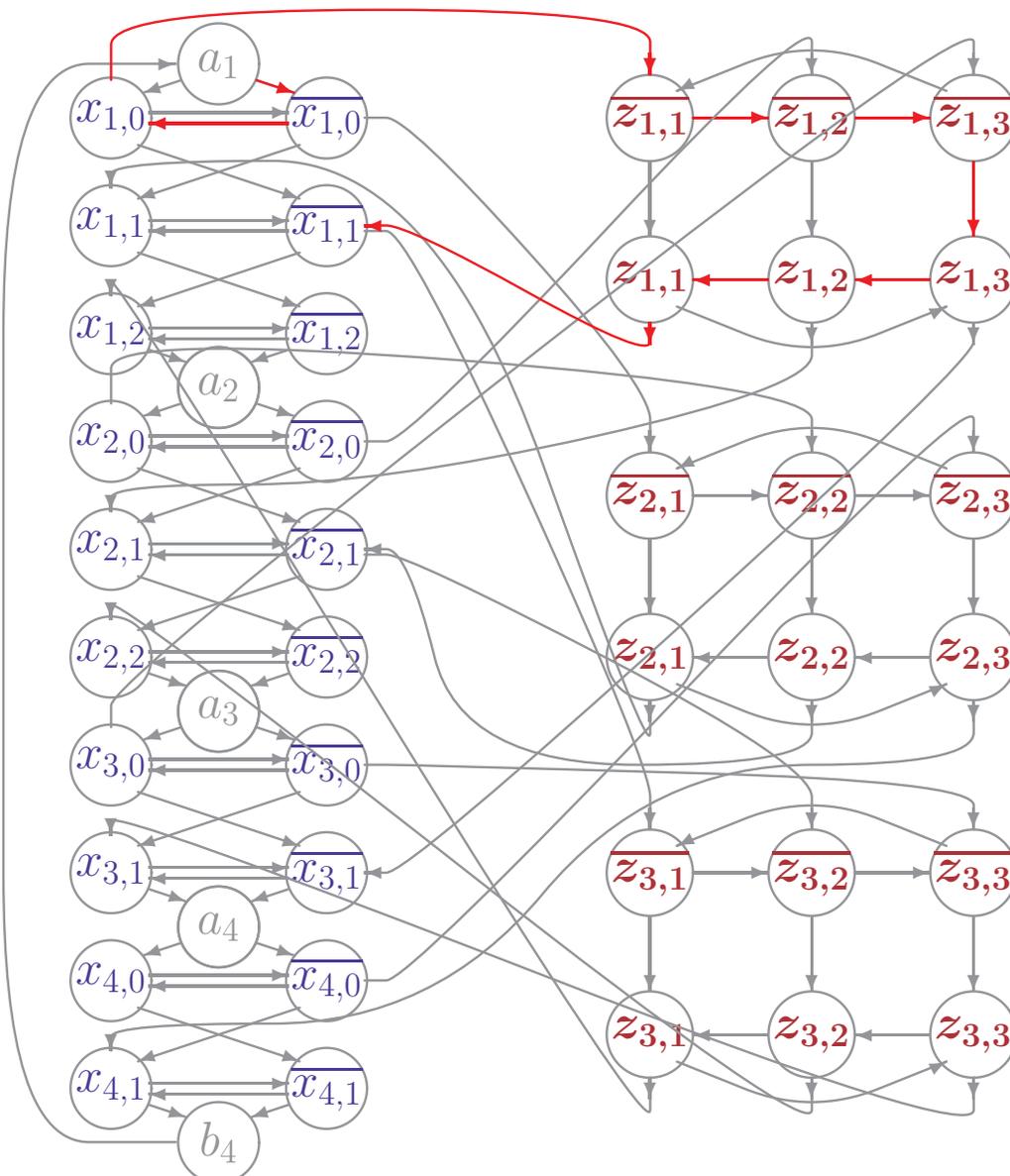


**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

Beginne mit Teilpfad  $a_1 \rightarrow \overline{x_{1,0}} \rightarrow x_{1,0}$

# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



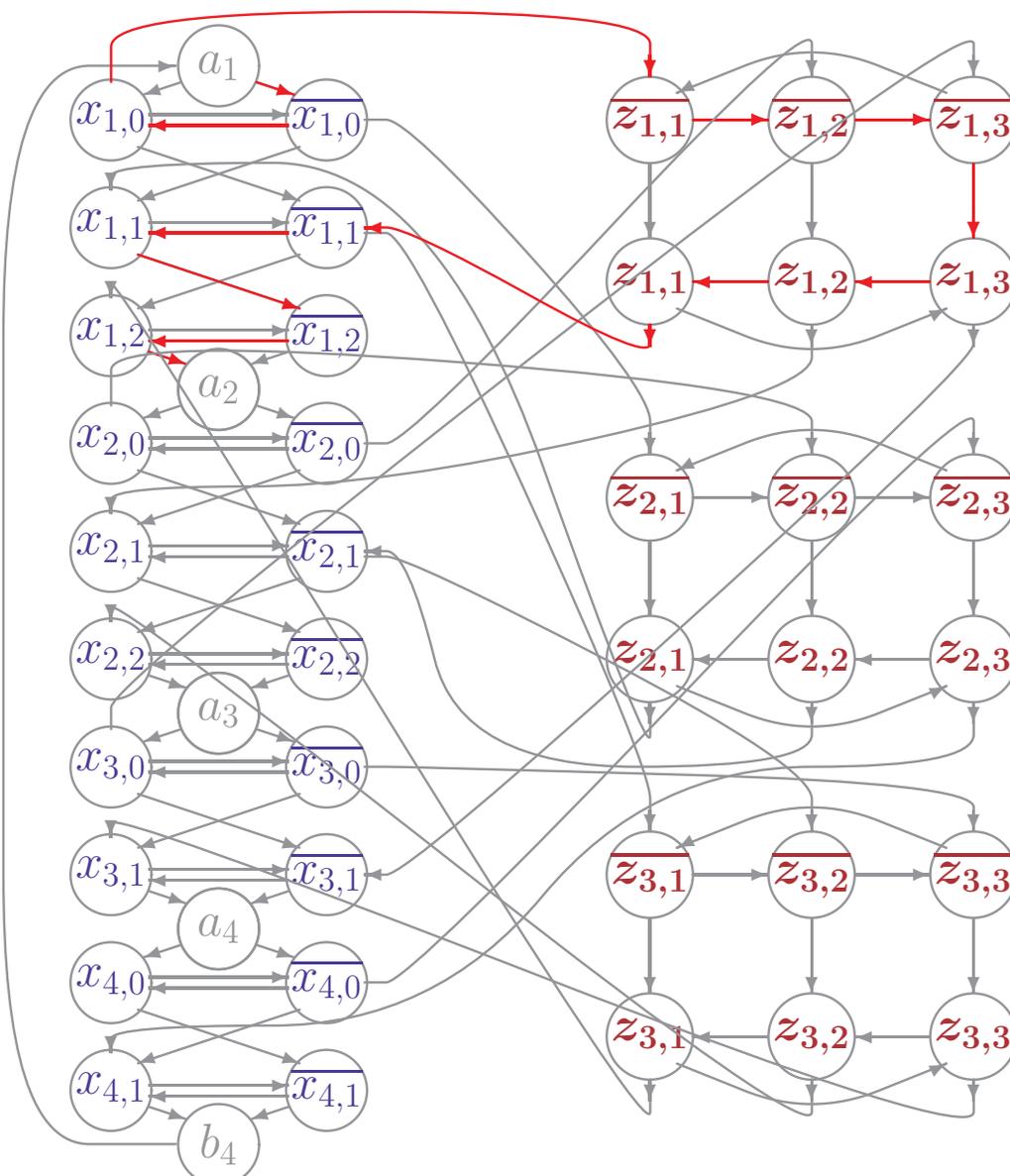
**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

Beginne mit Teilpfad  $a_1 \rightarrow \overline{x_{1,0}} \rightarrow x_{1,0}$

Verbinde  $x_{1,0}$  mit Klausel 1

# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

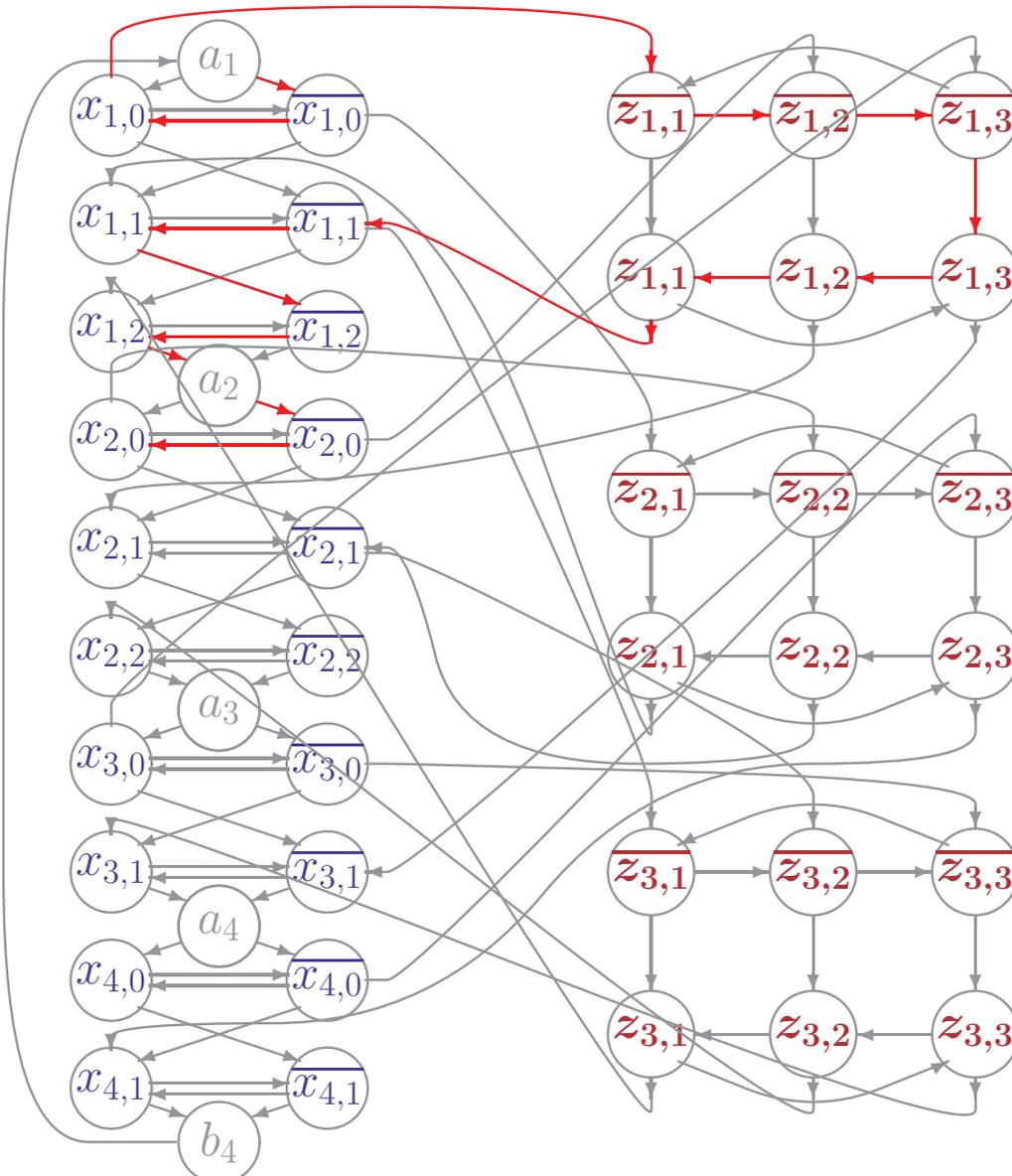
Beginne mit Teilpfad  $a_1 \rightarrow \overline{x_{1,0}} \rightarrow x_{1,0}$

Verbinde  $x_{1,0}$  mit Klausel 1

Laufe von  $\overline{x_{1,1}}$  durch  $H_1$  bis  $a_2$

# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

Beginne mit Teilpfad  $a_1 \rightarrow \overline{x_{1,0}} \rightarrow x_{1,0}$

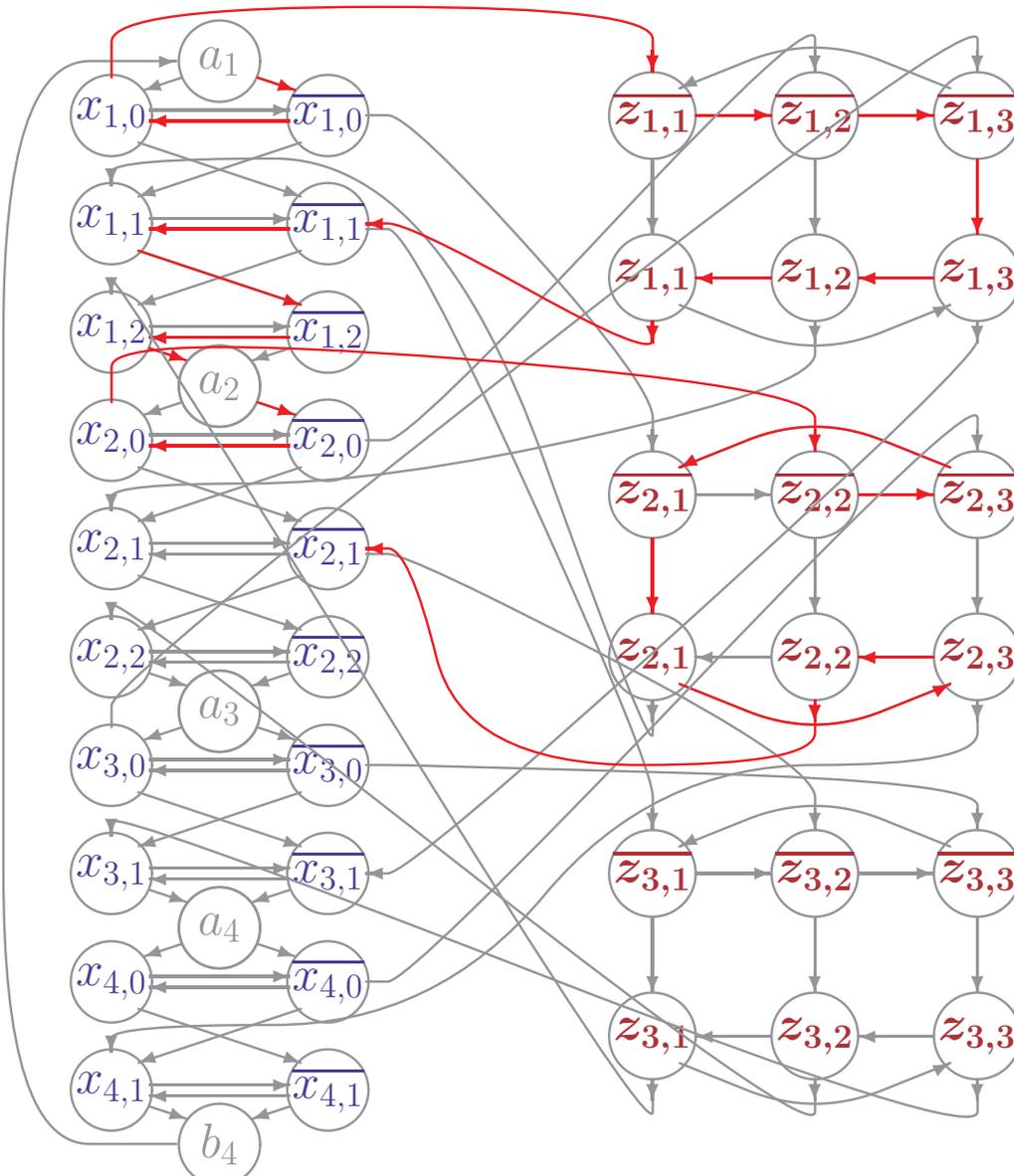
Verbinde  $x_{1,0}$  mit Klausel 1

Laufe von  $\overline{x_{1,1}}$  durch  $H_1$  bis  $a_2$

Weiter mit Teilpfad  $a_2 \rightarrow \overline{x_{2,0}} \rightarrow x_{2,0}$

# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

Beginne mit Teilpfad  $a_1 \rightarrow \overline{x_{1,0}} \rightarrow x_{1,0}$

Verbinde  $x_{1,0}$  mit Klausel 1

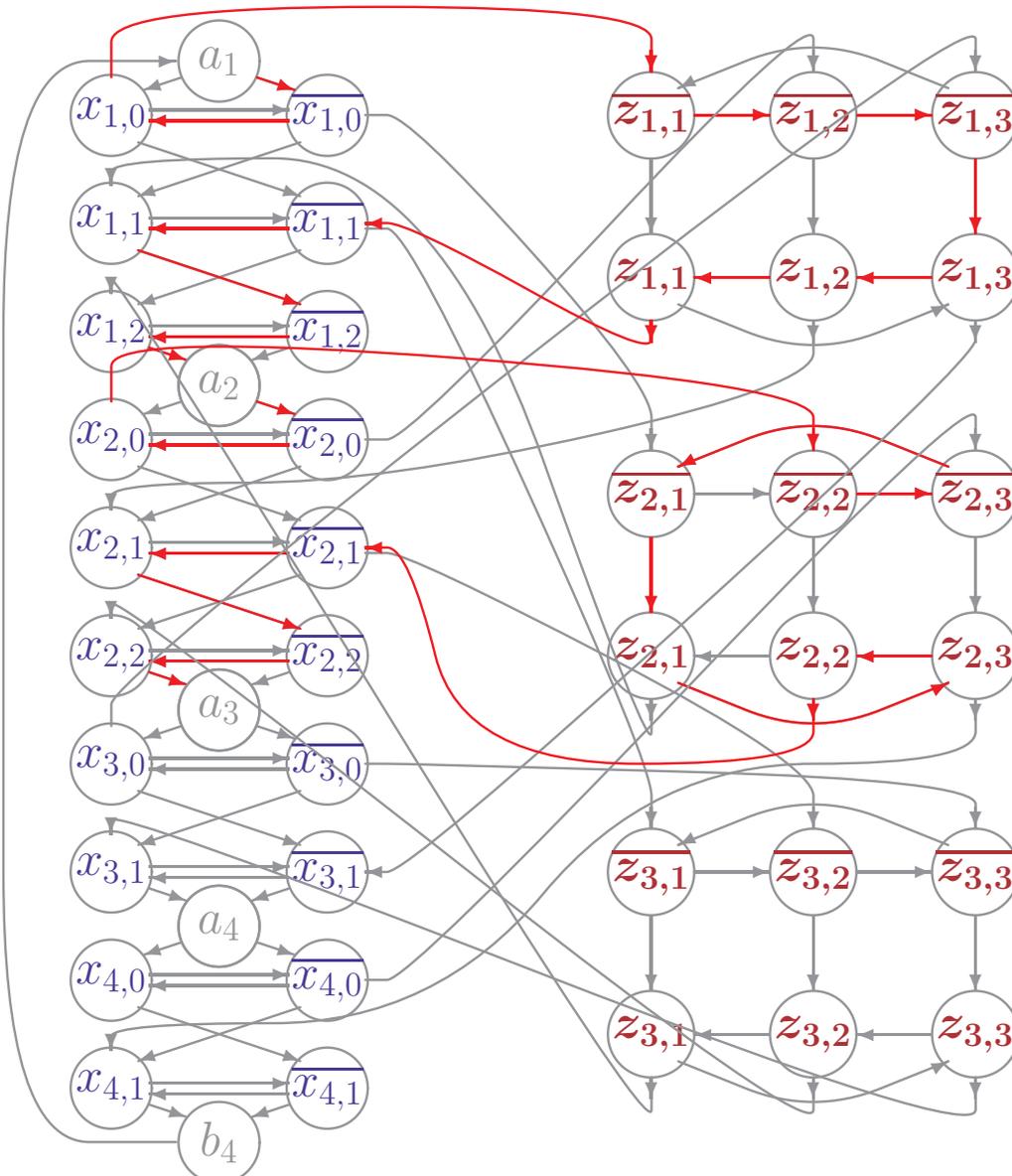
Laufe von  $\overline{x_{1,1}}$  durch  $H_1$  bis  $a_2$

Weiter mit Teilpfad  $a_2 \rightarrow \overline{x_{2,0}} \rightarrow x_{2,0}$

Verbinde  $x_{2,0}$  mit Klausel 2

# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

Beginne mit Teilpfad  $a_1 \rightarrow \overline{x_{1,0}} \rightarrow x_{1,0}$

Verbinde  $x_{1,0}$  mit Klausel 1

Laufe von  $\overline{x_{1,1}}$  durch  $H_1$  bis  $a_2$

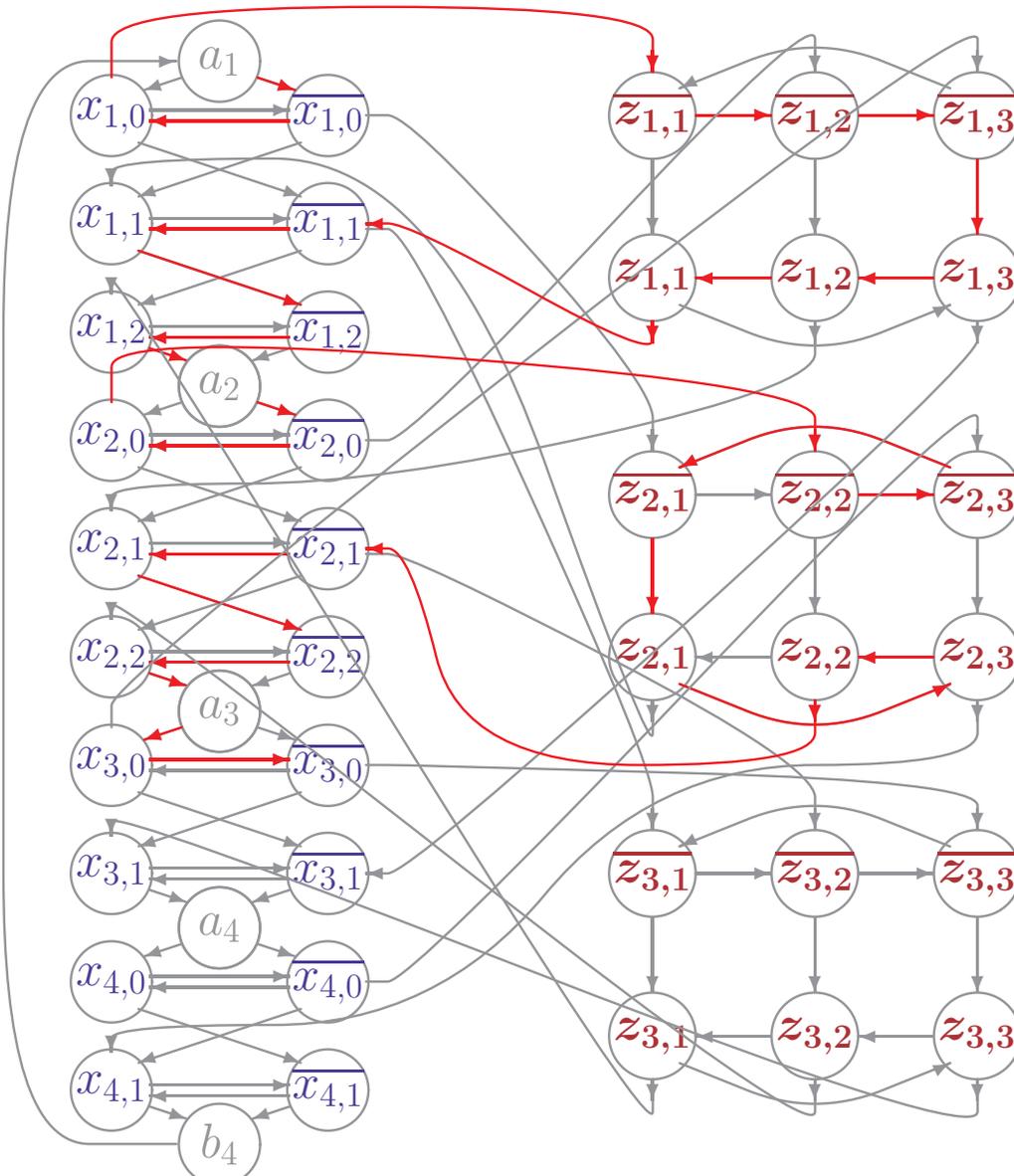
Weiter mit Teilpfad  $a_2 \rightarrow \overline{x_{2,0}} \rightarrow x_{2,0}$

Verbinde  $x_{2,0}$  mit Klausel 2

Laufe von  $\overline{x_{2,1}}$  durch  $H_2$  bis  $a_3$

# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

Beginne mit Teilpfad  $a_1 \rightarrow \overline{x_{1,0}} \rightarrow x_{1,0}$

Verbinde  $x_{1,0}$  mit Klausel 1

Laufe von  $\overline{x_{1,1}}$  durch  $H_1$  bis  $a_2$

Weiter mit Teilpfad  $a_2 \rightarrow \overline{x_{2,0}} \rightarrow x_{2,0}$

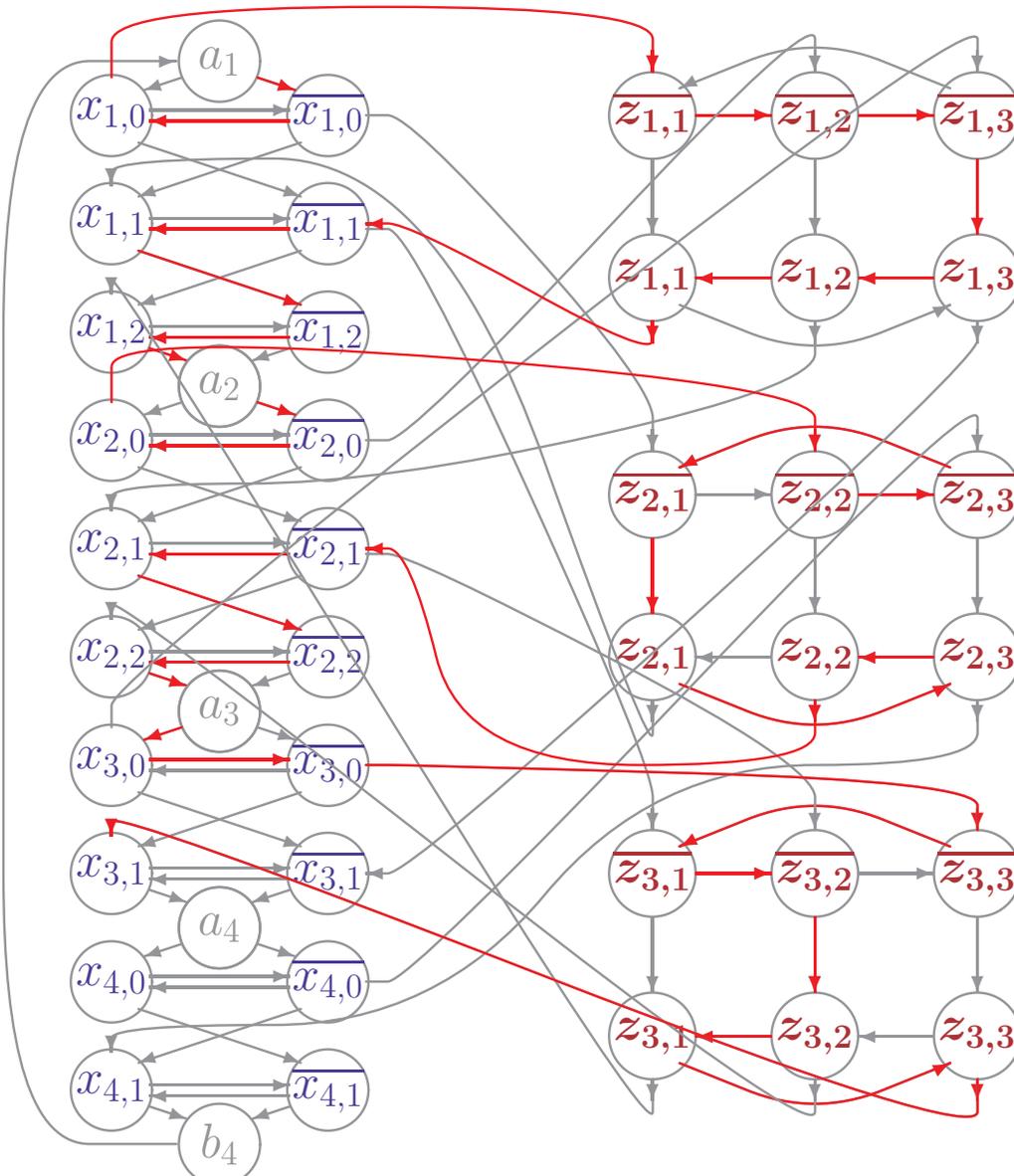
Verbinde  $x_{2,0}$  mit Klausel 2

Laufe von  $\overline{x_{2,1}}$  durch  $H_2$  bis  $a_3$

Weiter mit Teilpfad  $a_3 \rightarrow x_{3,0} \rightarrow \overline{x_{3,0}}$

# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

Beginne mit Teilpfad  $a_1 \rightarrow \overline{x_{1,0}} \rightarrow x_{1,0}$

Verbinde  $x_{1,0}$  mit Klausel 1

Laufe von  $\overline{x_{1,1}}$  durch  $H_1$  bis  $a_2$

Weiter mit Teilpfad  $a_2 \rightarrow \overline{x_{2,0}} \rightarrow x_{2,0}$

Verbinde  $x_{2,0}$  mit Klausel 2

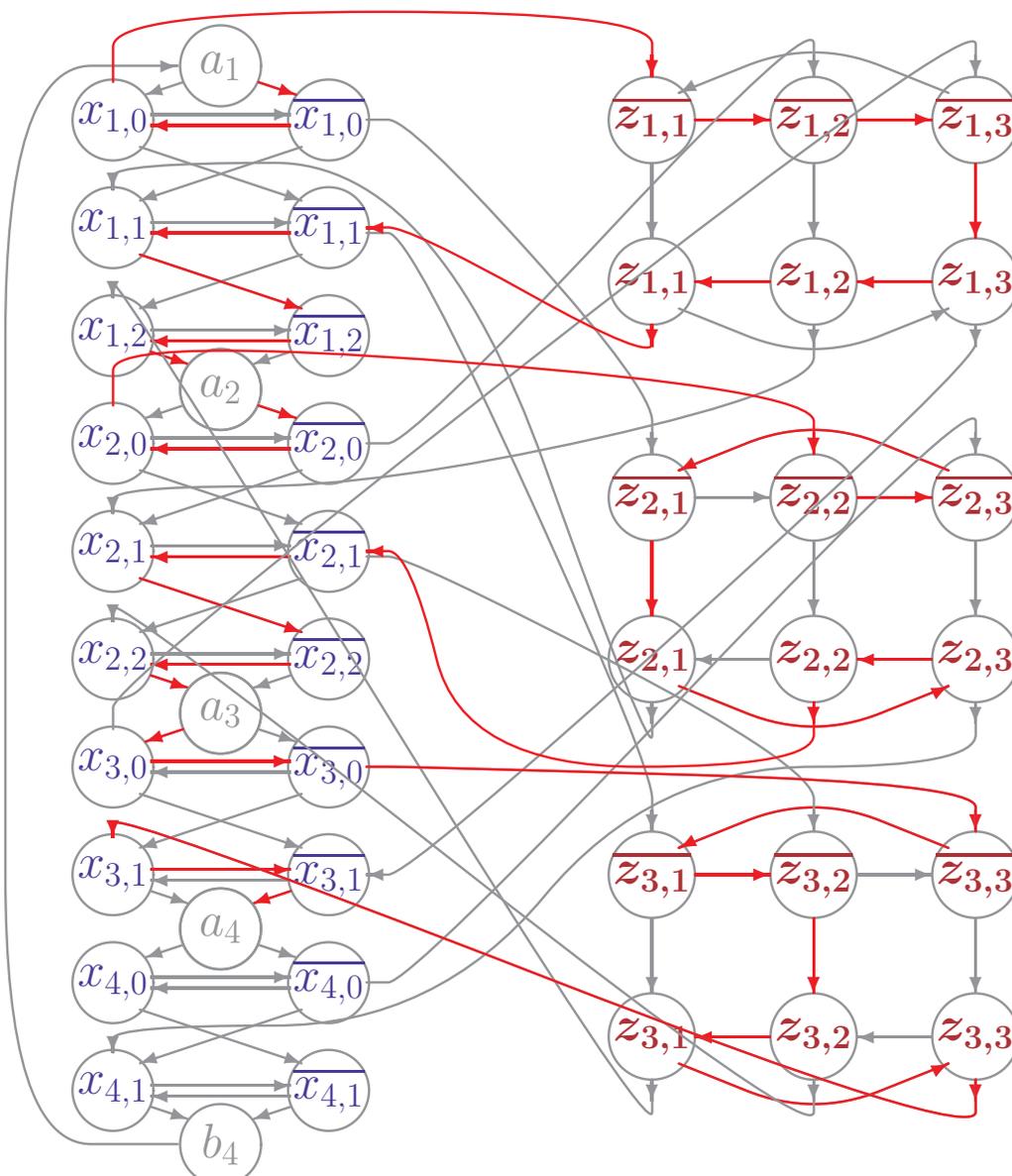
Laufe von  $\overline{x_{2,1}}$  durch  $H_2$  bis  $a_3$

Weiter mit Teilpfad  $a_3 \rightarrow x_{3,0} \rightarrow \overline{x_{3,0}}$

Verbinde  $\overline{x_{3,0}}$  mit Klausel 3

# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

Beginne mit Teilpfad  $a_1 \rightarrow \overline{x_{1,0}} \rightarrow x_{1,0}$

Verbinde  $x_{1,0}$  mit Klausel 1

Laufe von  $\overline{x_{1,1}}$  durch  $H_1$  bis  $a_2$

Weiter mit Teilpfad  $a_2 \rightarrow \overline{x_{2,0}} \rightarrow x_{2,0}$

Verbinde  $x_{2,0}$  mit Klausel 2

Laufe von  $\overline{x_{2,1}}$  durch  $H_2$  bis  $a_3$

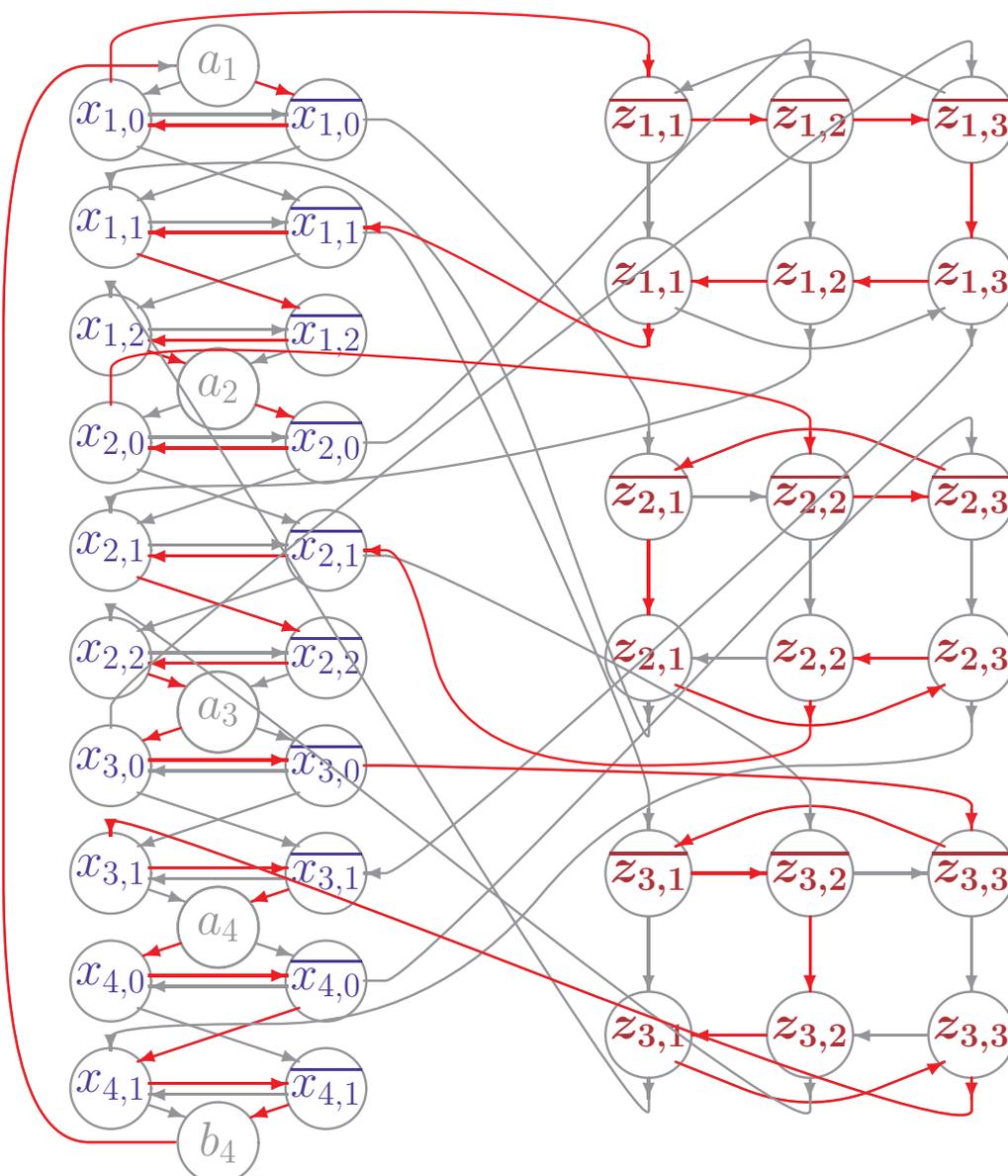
Weiter mit Teilpfad  $a_3 \rightarrow x_{3,0} \rightarrow \overline{x_{3,0}}$

Verbinde  $\overline{x_{3,0}}$  mit Klausel 3

Laufe von  $x_{3,1}$  durch  $H_3$  bis  $a_4$

# ERFÜLLENDE BELEGUNG ALS DHC

$$F = (k_1, k_2, k_3) \text{ mit } k_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \quad k_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \quad k_3 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$$



**Erfüllende Belegung: (1, 1, 0, 0)**

Beginne mit Teilpfad  $a_1 \rightarrow \overline{x_{1,0}} \rightarrow x_{1,0}$

Verbinde  $x_{1,0}$  mit Klausel 1

Laufe von  $\overline{x_{1,1}}$  durch  $H_1$  bis  $a_2$

Weiter mit Teilpfad  $a_2 \rightarrow \overline{x_{2,0}} \rightarrow x_{2,0}$

Verbinde  $x_{2,0}$  mit Klausel 2

Laufe von  $\overline{x_{2,1}}$  durch  $H_2$  bis  $a_3$

Weiter mit Teilpfad  $a_3 \rightarrow x_{3,0} \rightarrow \overline{x_{3,0}}$

Verbinde  $\overline{x_{3,0}}$  mit Klausel 3

Laufe von  $x_{3,1}$  durch  $H_3$  bis  $a_4$

Beliebig weiter durch  $H_3$  bis  $b_4$  und  $a_1$

KORREKTHEIT (SKIZZE):  $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

- Es gelte  $F \in 3SAT$

# KORREKTHEIT (SKIZZE): $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

- **Es gelte  $F \in 3SAT$**

Sei  $c_1, ..c_n$  eine erfüllende Belegung von  $F$ .

Konstruiere einen Hamiltonschen Kreis wie folgt

# KORREKTHEIT (SKIZZE): $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

- **Es gelte  $F \in 3SAT$**

Sei  $c_1, \dots, c_n$  eine erfüllende Belegung von  $F$ .

Konstruiere einen Hamiltonschen Kreis wie folgt

– In  $H_j$  beginne mit  $a_j$  und  $\overline{x_{j,0}}$  falls  $c_j = 1$ , sonst mit  $a_j$  und  $x_{j,0}$

# KORREKTHEIT (SKIZZE): $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

- **Es gelte  $F \in 3SAT$**

Sei  $c_1, \dots, c_n$  eine erfüllende Belegung von  $F$ .

Konstruiere einen Hamiltonschen Kreis wie folgt

- In  $H_j$  beginne mit  $a_j$  und  $\overline{x_{j,0}}$  falls  $c_j = 1$ , sonst mit  $a_j$  und  $x_{j,0}$
- Verbinde  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p}$  und dann mit  $\overline{x_{j,p+1}}$ .

Wenn möglich, gehe dabei über die Knoten einer verbundenen Klausel  $z_i$

- Analog verbinde  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p}}$  und dann mit  $x_{j,p+1}$ , evtl. mit Umweg

# KORREKTHEIT (SKIZZE): $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

- **Es gelte  $F \in 3SAT$**

Sei  $c_1, \dots, c_n$  eine erfüllende Belegung von  $F$ .

Konstruiere einen Hamiltonschen Kreis wie folgt

- In  $H_j$  beginne mit  $a_j$  und  $\overline{x_{j,0}}$  falls  $c_j = 1$ , sonst mit  $a_j$  und  $x_{j,0}$
- Verbinde  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p}$  und dann mit  $\overline{x_{j,p+1}}$ .

Wenn möglich, gehe dabei über die Knoten einer verbundenen Klausel  $z_i$

- Analog verbinde  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p}}$  und dann mit  $x_{j,p+1}$ , evtl. mit Umweg
- Verlasse  $H_j$  in  $b_j$  und verbinde mit  $H_{j+1}$

# KORREKTHEIT (SKIZZE): $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

- **Es gelte  $F \in 3SAT$**

Sei  $c_1, ..c_n$  eine erfüllende Belegung von  $F$ .

Konstruiere einen Hamiltonschen Kreis wie folgt

- In  $H_j$  beginne mit  $a_j$  und  $\overline{x_{j,0}}$  falls  $c_j = 1$ , sonst mit  $a_j$  und  $x_{j,0}$
- Verbinde  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p}$  und dann mit  $\overline{x_{j,p+1}}$ .

Wenn möglich, gehe dabei über die Knoten einer verbundenen Klausel  $z_i$

- Analog verbinde  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p}}$  und dann mit  $x_{j,p+1}$ , evtl. mit Umweg
- Verlasse  $H_j$  in  $b_j$  und verbinde mit  $H_{j+1}$

Da  $c_1, ..c_n$  die Formel  $F$  erfüllt, **wird jedes  $H_j$  und  $z_i$  durchlaufen.**

## KORREKTHEIT (SKIZZE): $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

- **Es gelte  $F \in 3SAT$**

Sei  $c_1, \dots, c_n$  eine erfüllende Belegung von  $F$ .

Konstruiere einen Hamiltonschen Kreis wie folgt

- In  $H_j$  beginne mit  $a_j$  und  $\overline{x_{j,0}}$  falls  $c_j = 1$ , sonst mit  $a_j$  und  $x_{j,0}$
- Verbinde  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p}$  und dann mit  $\overline{x_{j,p+1}}$ .

Wenn möglich, gehe dabei über die Knoten einer verbundenen Klausel  $z_i$

- Analog verbinde  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p}}$  und dann mit  $x_{j,p+1}$ , evtl. mit Umweg
- Verlasse  $H_j$  in  $b_j$  und verbinde mit  $H_{j+1}$

Da  $c_1, \dots, c_n$  die Formel  $F$  erfüllt, **wird jedes  $H_j$  und  $z_i$  durchlaufen.**

- **Es gelte  $G_F \in DHC$**

## KORREKTHEIT (SKIZZE): $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

- **Es gelte  $F \in 3SAT$**

Sei  $c_1, \dots, c_n$  eine erfüllende Belegung von  $F$ .

Konstruiere einen Hamiltonschen Kreis wie folgt

- In  $H_j$  beginne mit  $a_j$  und  $\overline{x_{j,0}}$  falls  $c_j = 1$ , sonst mit  $a_j$  und  $x_{j,0}$
- Verbinde  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p}$  und dann mit  $\overline{x_{j,p+1}}$ .

Wenn möglich, gehe dabei über die Knoten einer verbundenen Klausel  $z_i$

- Analog verbinde  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p}}$  und dann mit  $x_{j,p+1}$ , evtl. mit Umweg
- Verlasse  $H_j$  in  $b_j$  und verbinde mit  $H_{j+1}$

Da  $c_1, \dots, c_n$  die Formel  $F$  erfüllt, **wird jedes  $H_j$  und  $z_i$  durchlaufen.**

- **Es gelte  $G_F \in DHC$**

Verbindet der Kreis  $a_j$  mit  $x_{j,0}$  wähle  $c_j = 0$ , sonst  $c_j = 1$

# KORREKTHEIT (SKIZZE): $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

- **Es gelte  $F \in 3SAT$**

Sei  $c_1, ..c_n$  eine erfüllende Belegung von  $F$ .

Konstruiere einen Hamiltonschen Kreis wie folgt

- In  $H_j$  beginne mit  $a_j$  und  $\overline{x_{j,0}}$  falls  $c_j = 1$ , sonst mit  $a_j$  und  $x_{j,0}$
- Verbinde  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p}$  und dann mit  $\overline{x_{j,p+1}}$ .

Wenn möglich, gehe dabei über die Knoten einer verbundenen Klausel  $z_i$

- Analog verbinde  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p}}$  und dann mit  $x_{j,p+1}$ , evtl. mit Umweg
- Verlasse  $H_j$  in  $b_j$  und verbinde mit  $H_{j+1}$

Da  $c_1, ..c_n$  die Formel  $F$  erfüllt, **wird jedes  $H_j$  und  $z_i$  durchlaufen.**

- **Es gelte  $G_F \in DHC$**

Verbindet der Kreis  $a_j$  mit  $x_{j,0}$  wähle  $c_j = 0$ , sonst  $c_j = 1$

- Betritt der Kreis Klausel  $z_i$  bei  $\overline{z_{i,k}}$ , so muß er sie bei  $z_{i,k}$  verlassen
- Damit verbindet der Kreis immer ein  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p+1}}$  ( $c_j = 1$ ) oder  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p+1}$  ( $c_j = 0$ ), bis er  $H_j$  verläßt.

# KORREKTHEIT (SKIZZE): $F \in 3SAT \Leftrightarrow f(F) \in DHC$

## • Es gelte $F \in 3SAT$

Sei  $c_1, \dots, c_n$  eine erfüllende Belegung von  $F$ .

Konstruiere einen Hamiltonschen Kreis wie folgt

- In  $H_j$  beginne mit  $a_j$  und  $\overline{x_{j,0}}$  falls  $c_j = 1$ , sonst mit  $a_j$  und  $x_{j,0}$
- Verbinde  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p}$  und dann mit  $\overline{x_{j,p+1}}$ .

Wenn möglich, gehe dabei über die Knoten einer verbundenen Klausel  $z_i$

- Analog verbinde  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p}}$  und dann mit  $x_{j,p+1}$ , evtl. mit Umweg
- Verlasse  $H_j$  in  $b_j$  und verbinde mit  $H_{j+1}$

Da  $c_1, \dots, c_n$  die Formel  $F$  erfüllt, **wird jedes  $H_j$  und  $z_i$  durchlaufen.**

## • Es gelte $G_F \in DHC$

Verbindet der Kreis  $a_j$  mit  $x_{j,0}$  wähle  $c_j = 0$ , sonst  $c_j = 1$

- Betritt der Kreis Klausel  $z_i$  bei  $\overline{z_{i,k}}$ , so muß er sie bei  $z_{i,k}$  verlassen
- Damit verbindet der Kreis immer ein  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p+1}}$  ( $c_j = 1$ )  
oder  $x_{j,p}$  mit  $\overline{x_{j,p}}$  mit  $x_{j,p+1}$  ( $c_j = 0$ ), bis er  $H_j$  verläßt.
- Bei Umweg über  $z_i$  muß das verbundene Literal  $z_{i,k} \in \{x_j, \overline{x_j}\}$  erfüllt sein
- Da alle Klauseln durchlaufen werden, **sind alle Klauseln erfüllt.**