

Inferenzmethoden

Einheit 2

Verdichtung des logischen Schließens I

Tableauxkalküle



1. Tableauxbeweise
2. Korrektheit und Vollständigkeit
3. Bezug zu Sequenzenkalkülen

SEQUENZENKALKÜLE SIND INEFFIZIENT

- **Viele Regeln haben sehr ähnliche Struktur**

$$\begin{array}{ccc} \text{orL } i & \Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \wedge B \text{ andR} \\ & \Gamma, A, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash A \\ & \Gamma, B, \Delta \vdash C & \Gamma \vdash B \end{array}$$

Kalkül sollte gleichartige Regeln zusammenfassen

- **Sequenzbeweise enthalten viel Redundanz**

- Jeder Knoten enthält alle gültigen Annahmen und die Konklusion
- Regeln zerlegen und kopieren Syntaxbaum von Formeln

Kalkül sollte direkt auf Syntaxbaum operieren

- **Beweissuche erfordert Vorausschau**

- Inferenzregeln basieren auf Konnektiven und Quantoren
 - Welche Hypothese soll zerlegt werden?
 - Welcher Teil einer Disjunktion soll gezeigt werden?
 - Welche Substitution soll bei Quantorenzerlegung benutzt werden?
- Auswahl hat Anwendbarkeit der Regel `hypothesis` zum Ziel

Beweissuche sollte auf Abschluß von Beweisästen abzielen

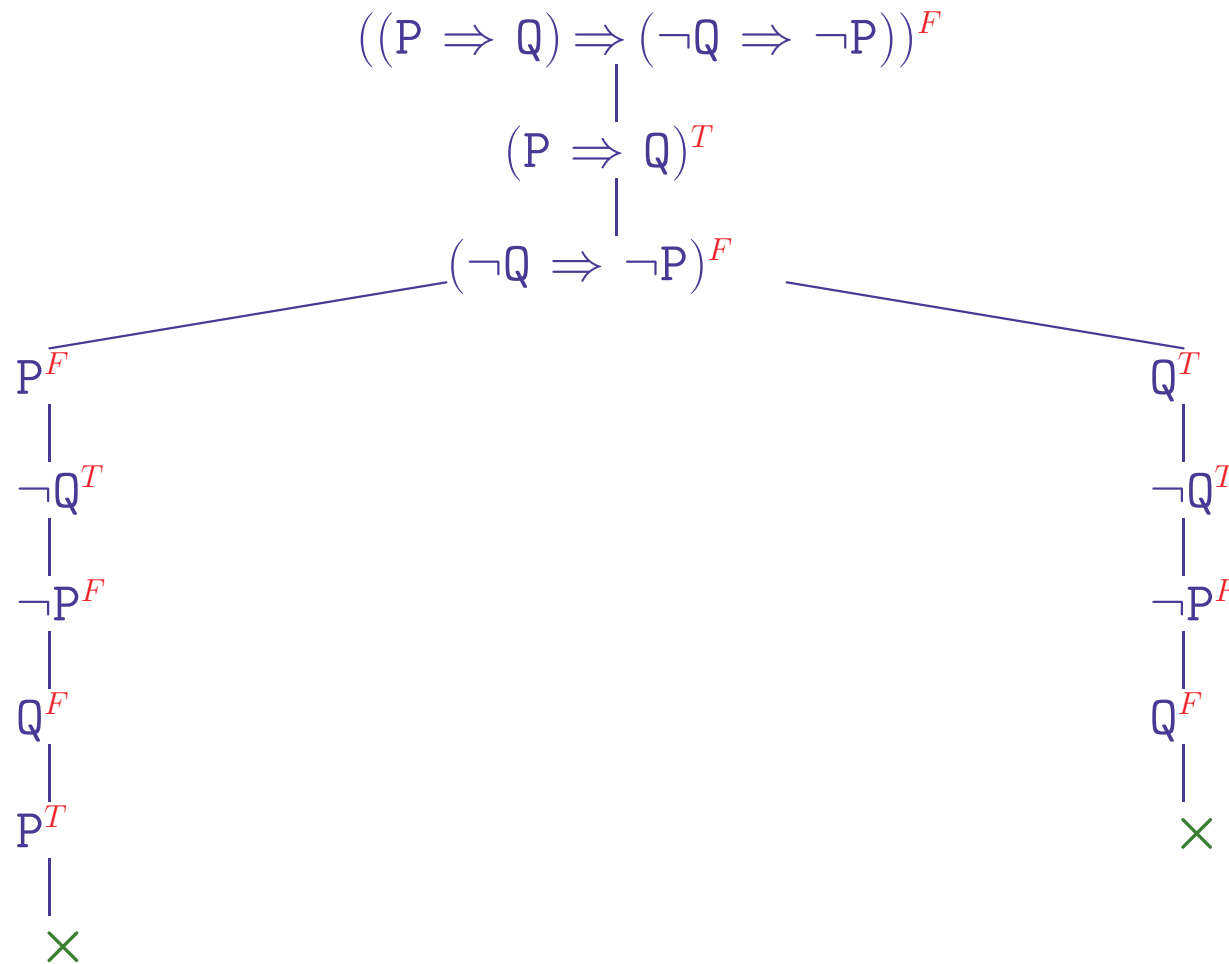
Kompakte Form des analytischen Sequenzenkalküls

- **Formelmengen repräsentieren Sequenzen**
 - **Polarität** (X^T/X^F) kennzeichnet Rolle der Formel X (links/rechts)
 - Keine strukturellen Regeln erforderlich
- **Regeln gruppiert in Klassen ähnlicher Struktur**
 - **andL** und **orR**: Dekomposition liefert ein Teilziel **Typ α**
 - **andR** und **orL**: Dekomposition verzweigt Beweis **Typ β**
 - **allL** und **exR**: Dekomposition instantiiert Variable mit Term **Typ γ**
 - **allR** und **exL**: Dekomposition deklariert neue Variable **Typ δ**
- **Komplementarität ersetzt hypothesis Regel**
 - Gleiche Formeln mit verschiedener Polarität schließen Beweisast ab
- **Effizientere Beweisführung**
 - Weniger Regeln – Komplementaritätstest für Menschen etwas schwerer

Unabhängig vom Sequenzenkalkül entstanden

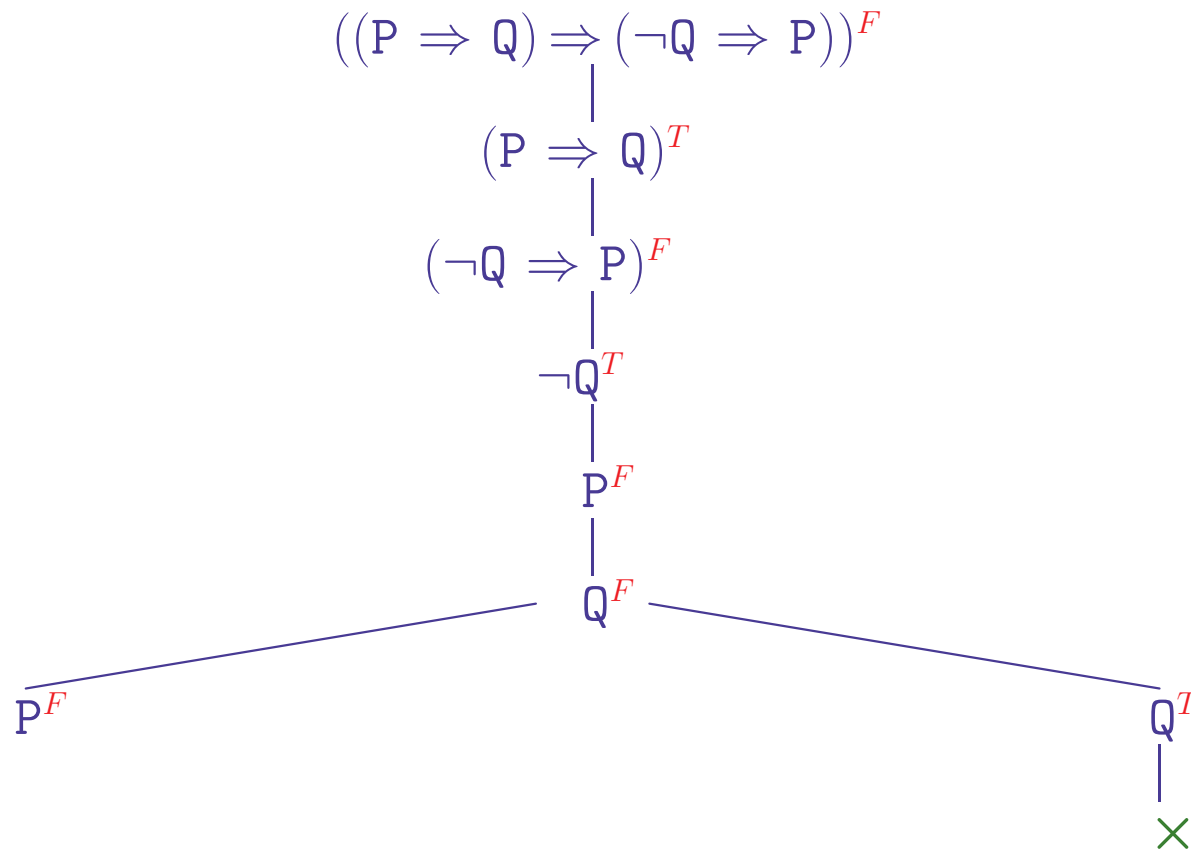
- **Begründung über indirekte Beweisführung**
 - Statt $\vdash F$ beweise, daß $\neg F$ nicht gelten kann
also daß alle möglichen Konsequenzen von $\neg F$ zum Widerspruch führen
- **Regeln beschreiben logische Gesetze**
 - Wenn $\neg X^T$, dann X^F
 - Wenn $\neg X^F$, dann X^T
 - Wenn $X \wedge Y^T$, dann X^T und Y^T
 - Wenn $X \vee Y^F$, dann X^F und Y^F
 - Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann X^T und Y^F
 - Wenn $X \wedge Y^F$, dann X^F oder Y^F
 - Wenn $X \vee Y^T$, dann X^T oder Y^T
 - Wenn $X \Rightarrow Y^T$, dann X^F oder Y^T
- **Polarität verkürzt Schreibweise**
 - $X^T \hat{=} X$ ist wahr, $X^F \hat{=} X$ ist falsch

TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P))$



Alle Zweige widersprüchlich, Originalformel gültig

TABLEAUXBEWEIS FÜR $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow P))$



Offener Zweig liefert Gegenbeispiel P^F, Q^F

AUSSAGENLOGISCHE TABLEAUXREGELN SCHEMATISIERT

- **Typ α (konjunktiv): Verlängerung des Beweiszeigs**

- Wenn $\neg X^T$, dann X^F
- Wenn $\neg X^F$, dann X^T
- Wenn $X \wedge Y^T$, dann X^T und Y^T
- Wenn $X \vee Y^F$, dann X^F und Y^F
- Wenn $X \Rightarrow Y^F$, dann X^T und Y^F

α
α_1
α_2

- **Typ β (disjunktiv): Verzweigung des Beweises**

- Wenn $X \wedge Y^F$, dann X^F oder Y^F
- Wenn $X \vee Y^T$, dann X^T oder Y^T
- Wenn $X \Rightarrow Y^T$, dann X^F oder Y^T

β
$\beta_1 \beta_2$

- **Teilformeln bestimmt durch Konnektiv und Polarität**

α	$(X \wedge Y)^T$	$(X \vee Y)^F$	$(X \Rightarrow Y)^F$	$\neg X^T$	$\neg X^F$
α_1	X^T	X^F	X^T	X^F	X^T
α_2	Y^T	Y^F	Y^F	–	–
β	$(X \wedge Y)^F$	$(X \vee Y)^T$	$(X \Rightarrow Y)^T$		
β_1	X^F	X^T	X^F		
β_2	Y^F	Y^T	Y^T		

PRÄDIKATENLOGISCHE TABLEAUXREGELN

- **Typ γ : Instantiierung einer Variablen**

- Wenn $\forall x A^T$, dann $A[t/x]^T$ für beliebiges t
- Wenn $\exists x A^F$, dann $A[t/x]^F$ für beliebiges t

γ
$\gamma(t)$

- **Typ δ : Deklaration einer neuen Variablen**

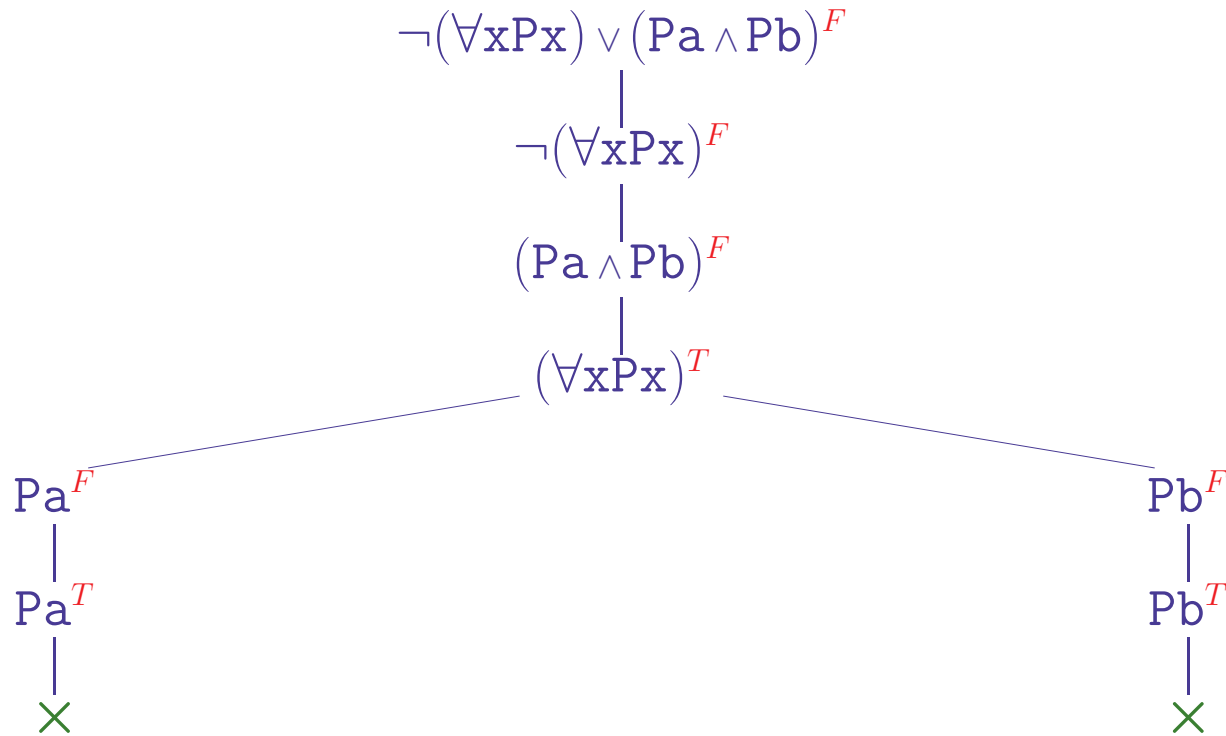
- Wenn $\forall x A^F$, dann $A[a/x]^F$ für ein gewisses, festes a
- Wenn $\exists x A^T$, dann $A[a/x]^T$ für ein gewisses, festes a
- Da a unbekannt ist, muß eine **neue Variable** gewählt werden

δ
$\delta(a)$

- **Teilformeln tabellarisch bestimmt**

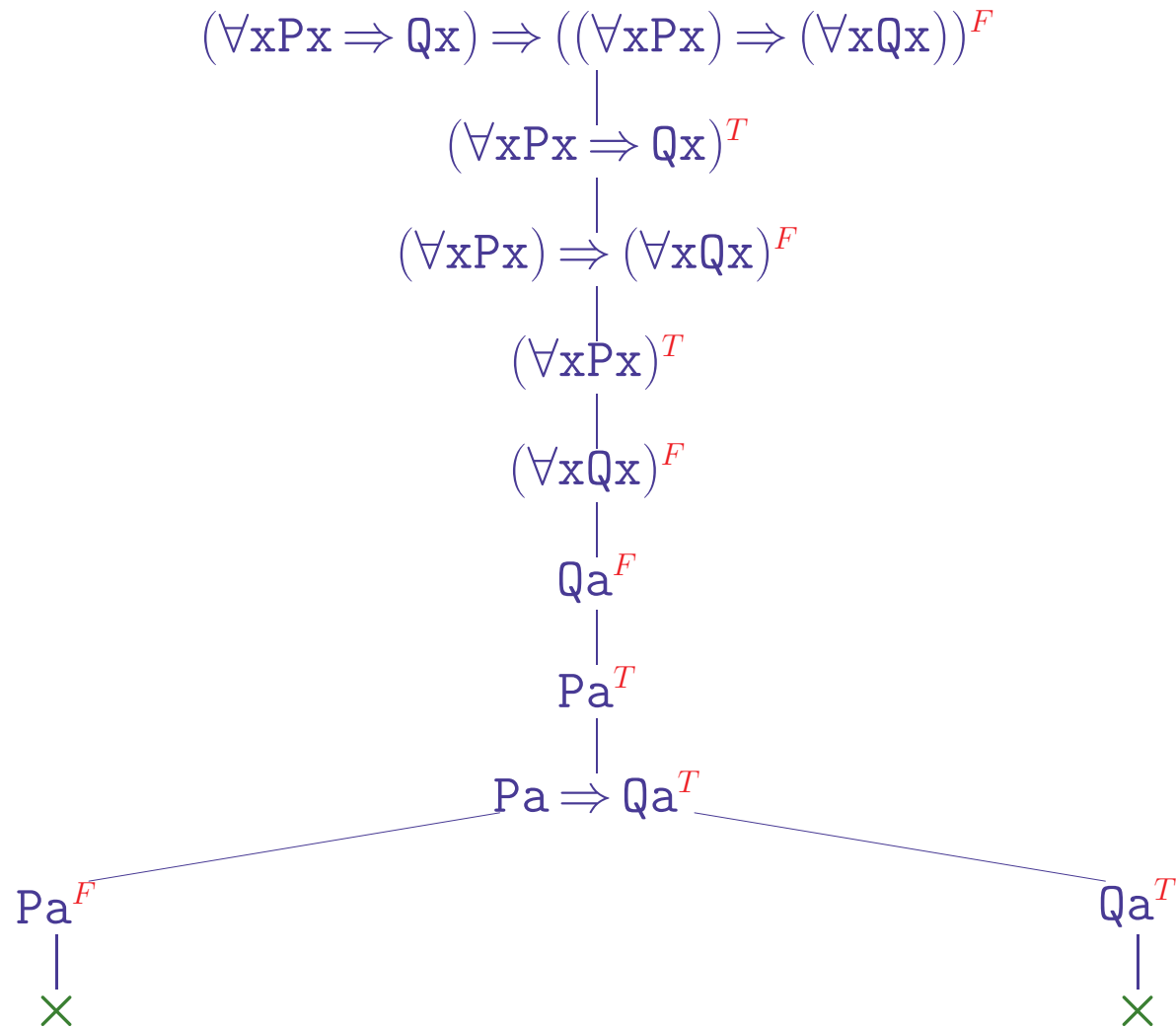
γ	$\forall x A^T$	$\exists x A^F$	δ	$\forall x A^F$	$\exists x A^T$
$\gamma(t)$	$A[t/x]^T$	$A[t/x]^F$	$\delta(a)$	$A[a/x]^F$	$A[a/x]^T$

TABLEAUXBEWEIS FÜR $\neg(\forall x Px) \vee (Pa \wedge Pb)$



Zwei verschiedene Instanzen derselben Formel

BEWEIS FÜR $(\forall x Px \Rightarrow Qx) \Rightarrow ((\forall x Px) \Rightarrow (\forall x Qx))$



$\forall x Qx$ muß vor den γ -Knoten zerlegt werden

TABLEAUX PRÄZISIERT

- **Signierte Formel**

- Formel X mit Vorzeichen T oder F , geschrieben als X^T bzw. X^F
- Interpretation: $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- X^T und X^F sind komplementär zueinander

- **Analytisches Tableau für signierte Formel F**

- Binärer geordneter Baum \mathcal{T} mit Wurzel F
- Für jeden Knoten y mit Nachfolger z gibt es einen Vorfahren x mit
 - Ist x vom Typ α , so ist z entweder α_1 oder α_2
 - Ist x vom Typ γ , so ist $z = \gamma(t)$ für einen Term t
 - Ist x vom Typ δ , so ist $z = \delta(a)$ für eine neue Variable a .
- Für jeden Knoten y mit Nachfolgern z_1 und z_2 gibt es einen Vorfahren x vom Typ β mit $z_1 = \beta_1$ und $z_2 = \beta_2$

- **\mathcal{T}_1 direkte Erweiterung von \mathcal{T}**

- \mathcal{T}_1 entsteht aus \mathcal{T} durch Anwendung einer Regel auf einen Zweig ϑ von \mathcal{T}

TABLEAUXBEWEISE

- **Zweig $\vartheta=[F_0,F_1,\dots,F_n]$ im Tableau**
 - Liste der (signierten) Formeln zwischen Wurzel F_0 und Blatt F_n
 - Interpretation: $\iota(\vartheta) = \begin{cases} \text{wahr} & \iota(F)=\text{wahr für alle } F \in \vartheta \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- **Geschlossenes Tableau \mathcal{T}**
 - Zweig ϑ ist geschlossen, wenn er ein komplementäres Formelpaar $Y^F Y^T$ enthält
 - Geschlossene Zweige sind unerfüllbar
 - \mathcal{T} ist geschlossen, wenn jeder Zweig geschlossen ist
- **Tableaubeweis für Formel X**
 - Geschlossenes Tableau für X^F

Sind beweisene Formeln semantisch gültig?

Analysiere Interpretation signierter Formeln

- $\iota(X^T) = \iota(X)$, $\iota(X^F) = \iota(\neg X)$
- Wenn $\iota(\alpha)$, dann $\iota(\alpha_1)$ und $\iota(\alpha_2)$
- Wenn $\iota(\beta)$, dann $\iota(\beta_1)$ oder $\iota(\beta_2)$
- Wenn $\iota(\gamma)$, dann $\iota(\gamma(t))$ für jeden Term t
- Wenn $\iota(\delta)$, dann $\iota_a^u(\delta(a))$ für ein neues a und $u \in \mathcal{U}$
Wichtig: wenn a in einer Formel Y nicht vorkommt, dann ist $\iota_a^u(Y) = \iota(Y)$

Klassifizierung vereinfacht Tableaux-Verfahren und Nachweis seiner Eigenschaften

NACHWEIS DER KORREKTHEIT

- **Zu zeigen: X gültig, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F**
 - $\hat{=}$ X^F unerfüllbar, wenn \mathcal{T} geschlossenes Tableaux für X^F
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann ist jedes Tableaux für X^F offen
 - $\hat{=}$ X^F erfüllbar, dann hat jedes Tableaux für X^F einen erfüllbaren Zweig
- **Zeige durch strukturelle Induktion: \mathcal{T} Tableaux für F ,**
 - Ist F erfüllbar, dann ist ein Zweig ϑ in \mathcal{T} erfüllbar**

Basisfall: Hat \mathcal{T} nur einen Knoten F , dann wähle $\vartheta = [F]$

Schrittfall: Sei \mathcal{T}_1 direkte Erweiterung von \mathcal{T} mit Wurzel F und $\iota(F)=\text{wahr}$

Sei ϑ der Zweig in \mathcal{T} mit $\iota(\vartheta)=\text{wahr}$

1. Falls \mathcal{T}_1 nicht am Zweig ϑ erweitert, wähle $\vartheta_1 = \vartheta$
2. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit α_i erweitert, ist der zugehörige α -Knoten auf ϑ und damit $\iota(\alpha_i)=\text{wahr}$. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\alpha_i]$
3. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit β_1 und β_2 erweitert, ist $\beta \in \vartheta$ damit $\iota(\beta_1)=\text{wahr}$ oder $\iota(\beta_2)=\text{wahr}$. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\beta_i]$ entsprechend.
4. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit $\gamma(t)$ erweitert, ist $\gamma \in \vartheta$. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\gamma(t)]$
5. Falls \mathcal{T}_1 am Zweig ϑ mit $\delta(a)$ erweitert, ist $\delta \in \vartheta$, a neu und damit $\iota_a^u(\delta(a))=\text{wahr}$ für ein $u \in \mathcal{U}$. Wähle $\vartheta_1 = \vartheta \circ [\delta(a)]$. Dann $\iota_a^u(\vartheta_1)=\text{wahr}$.

VOLLSTÄNDIGKEIT

X gültig, dann hat X^F ein geschlossenes Tableau

• Betrachte **vollständige Tableaux**

- Zweig ϑ ist eine **Hintikka-Folge**, wenn für alle $x \in \vartheta$ gilt
 - Das **Komplement** \bar{x} von x ist nicht in ϑ (H0)
 - Ist x vom Typ α , so ist $\alpha_1 \in \vartheta$ und $\alpha_2 \in \vartheta$ (H1)
 - Ist x vom Typ β , so ist $\beta_1 \in \vartheta$ oder $\beta_2 \in \vartheta$ (H2)
 - Ist x vom Typ γ , so ist $\gamma(t) \in \vartheta$ für jeden Term t (H3)
 - Ist x vom Typ δ , so ist $\delta(a) \in \vartheta$ für eine Variable a (H4)
- Zweig ϑ ist **vollständig**, wenn ϑ geschlossen oder eine Hintikka-Folge
Das Tableauxverfahren kann ϑ nicht mehr um neue Formeln erweitern
- \mathcal{T} ist **vollständig**, wenn jeder Zweig von \mathcal{T} vollständig ist

• **Indirektes Argument auf Ebene der Zweige**

1. **Für jede Formel X hat X^F ein vollständiges Tableau**
2. Ist X gültig, dann ist jedes vollständige Tableau für X^F geschlossen
 - $\Leftarrow X^F$ erfüllbar, falls X^F vollständiges und offenes Tableau hat
 - $\Leftarrow \vartheta$ **vollständiger offener Tableauxzweig, dann ϑ erfüllbar**

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT I

Für jede Formel X hat X^F ein vollständiges Tableau

- **Beschreibe systematische Beweismethode**

- Kritische Bedingung ist Axiom (H3): kann \mathcal{T} nicht geschlossen werden, dann müssen *alle* Instanzen von γ -Formeln erzeugt werden

Beginne mit $\mathcal{T} = X^F$ und erweitere \mathcal{T} rekursiv wie folgt

- Ist \mathcal{T} geschlossen, dann ist X gültig und die Prozedur hält

- Ansonsten wähle einen noch nicht benutzten Knoten Y minimaler Tiefe und erweitere jeden offenen Zweig ϑ mit $Y \in \vartheta$ wie folgt

- Ist Y vom Typ α , dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$

- Ist Y vom Typ β , dann verzweige ϑ in $\vartheta \cup \{\beta_1\}$ und $\vartheta \cup \{\beta_2\}$

- Ist Y vom Typ γ , dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\gamma(t), \gamma\}$, wobei t der “erste” Term ist, der noch nicht in ϑ vorkommt

- Ist Y vom Typ δ , dann erweitere ϑ zu $\vartheta \cup \{\delta(a)\}$, wobei a die erste Variable ist, die nicht in ϑ vorkommt

Vollständigkeit: γ -Formeln werden kopiert und immer wieder neu instantiiert

Verfahren erzeugt unendliches Tableau, wenn X nicht gültig ist

Verfahren ist **sehr ineffizient**, nur für theoretische Betrachtungen relevant

NACHWEIS DER VOLLSTÄNDIGKEIT II

\mathcal{V} vollständig und offen $\Rightarrow \mathcal{V}$ erfüllbar

- **Konstruiere erfüllende Interpretation ι**

- Ist vollständig und offen, dann ist \mathcal{V} eine Hintikka-Folge
- Wähle \mathcal{U} als Menge aller Terme und interpretiere Terme durch sich selbst
- Definiere $\iota(P)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } P(t_1, \dots, t_n)^T \in \mathcal{V} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$
- ι ist wohldefiniert wegen Axiom H0

- **Zeige $\iota(F)=\text{wahr}$ für alle $F \in \mathcal{V}$**

Strukturelle Induktion über Aufbau der (signierten) Formel F

Basisfall: F atomar, dann $\iota(F)=\text{wahr}$ per Konstruktion

Schrittfall: Es gelte $\iota(X)=\text{wahr}$ für alle Teilformeln X von F mit $X \in \mathcal{V}$

- Ist F vom Typ α , so ist $\alpha_1 \in \mathcal{V}$ und $\alpha_2 \in \mathcal{V}$ wegen Axiom H1
Nach Induktionsannahme ist $\iota(\alpha_1)=\iota(\alpha_2)=\text{wahr}$ und damit $\iota(F)=\text{wahr}$
- Für F vom Typ β folgt $\iota(\beta_1)=\text{wahr}$ oder $\iota(\beta_2)=\text{wahr}$, also $\iota(F)=\text{wahr}$
- Für F vom Typ γ folgt $\iota(\gamma(t))=\text{wahr}$ für jeden Term t , also $\iota(F)=\text{wahr}$
- Für x vom Typ δ folgt $\iota(\delta(a))=\text{wahr}$ für eine Variable a , also $\iota(F)=\text{wahr}$

VARIANTEN VON TABLEAUXBEWEISEN

● Atomar geschlossene Tableaux

- \mathcal{T} **atomar geschlossen**, wenn jeder Zweig ein komplementäres Paar atomarer Formeln enthält
- Ist X gültig, dann gibt es ein atomar geschlossenes Tableau für X^F
- Es reicht, atomare Formeln (**Literale**) auf Komplementarität zu prüfen

● Block Tableaux

- **Lokale Sicht**: Knoten im Beweis enthalten alle unverarbeiteten Formeln
- Modifizierte Beweisregeln verarbeiten Menge von signierten Formeln

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{S, \alpha}{S, \alpha_1, \alpha_2} & \frac{S, \beta}{S, \beta_1 \mid S, \beta_2} & \frac{S, \gamma}{S, \gamma, \gamma(t)} & \frac{S, \delta}{S, \delta(a)} & \frac{S, X^T, X^F}{\times}
 \end{array}$$

- **Block Tableaux können analytische Tableaux simulieren und umgekehrt**
- Block Tableaux sind isomorph zu analytischen Sequenzenbeweisen
- **Der Sequenzenkalkül ist korrekt und vollständig**

BLOCK TABLEAUX REGELN VS. SEQUENZENREGELN

T	F	$-L$	$-R$
$\frac{S, A \wedge B^T}{S, A^T, B^T}$	$\frac{S, A \wedge B^F}{S, A^F \mid S, B^F}$	$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \wedge B}{\Gamma \vdash \Phi, A \mid \Gamma \vdash \Phi, B}$
$\frac{S, A \vee B^T}{S, A^T \mid S, B^T}$	$\frac{S, A \vee B^F}{S, A^F, B^F}$	$\frac{\Gamma, A \vee B \vdash \Phi}{\Gamma, A \vdash \Phi \mid \Gamma, B \vdash \Phi}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B}{\Gamma \vdash \Phi, A, B}$
$\frac{S, A \Rightarrow B^T}{S, A^F \mid S, B^T}$	$\frac{S, A \Rightarrow B^F}{S, A^T, B^F}$	$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, A \mid \Gamma, B \vdash \Phi}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \Rightarrow B}{\Gamma, A \vdash \Phi, B}$
$\frac{S, \neg A^T}{S, A^F}$	$\frac{S, \neg A^F}{S, A^T}$	$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, A}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, \neg A}{\Gamma, A \vdash \Phi}$
$\frac{S, \forall x A^T}{S, A[t/x]^T}$	$\frac{S, \forall x A^F}{S, A[a/x]^F}$	$\frac{\Gamma, \forall x A \vdash \Phi}{\Gamma, A[t/x] \vdash \Phi}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, \forall x A}{\Gamma \vdash \Phi, A[a/x]}$
$\frac{S, \exists x A^T}{S, A[a/x]^T}$	$\frac{S, \exists x A^F}{S, A[t/x]^F}$	$\frac{\Gamma, \exists x A \vdash \Phi}{\Gamma, A[a/x] \vdash \Phi}$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, \exists x A}{\Gamma \vdash \Phi, A[t/x]}$
$\frac{S, X^T, X^F}{\times}$		$\frac{\Gamma, X \vdash \Phi, X}{\times}$	

SEQUENZENKALKÜL VS. BLOCK TABLEAUX

• Formal ineinander übersetzbar

- Block Tableaux verwalten nur eine Menge von (signierten) Formeln
- Antezedentformel X wird zu Vorzeichen T
- Sukzedentformel X wird zu Vorzeichen F
- Logische Regeln werden identisch
- Strukturelle Regeln werden durch Verarbeitung von Mengen erfaßt

• Grundlegende Ideen sehr verschieden

	Tableaux – indirekter Beweis	Sequenzen – direkter Beweis
Ziel	X^F : Suche Widerlegung für X	$\vdash X$: Suche Beweis für X
α -Schritt	Widerlegung braucht α_1 und α_2	Beweis muß α_1 oder α_2 zeigen
β -Schritt	Widerlegung braucht β_1 oder β_2	Beweis muß β_1 und β_2 zeigen
Abschluß	Keine Widerlegung möglich	(Partieller) Beweis erfolgreich
Offenes Blatt	Gegenbeispiel gefunden	Kein Beweis möglich

AUTOMATISCHES BEWEISEN MIT TABLEAUX

- **Systematische Prozedur ist unpraktikabel**
 - Auswahl zu zerlegender Formeln mit Breitensuche
 - γ -Formeln werden “der Reihe nach” instantiiert
 - **Extrem lange Beweise** auch für kleine Formeln
 - Menschen gehen erheblich zielorientierter / effizienter vor
- **Viele Schritte sind schematisch**
 - Ziel der Regelanwendungen ist **Erzeugung komplementärer Formelpaare**
 - **Identifizierung komplementärer Formelteile** bestimmt, welche Teilformeln wann zerlegt werden und mit welchen Termen γ -Formeln instantiiert werden
 - Da auf jede Formel nur eine Regel anwendbar ist, liegen alle Beweisschritte fest, sobald komplementäre Formelteile und Substitutionen bekannt sind
 - Bestimmung dieser Information ist das Ziel von **Matrixmethoden**
- **Alternativ: Analytische Tableaux mit freien Variablen**
 - Formeln werden bis zu Literalen zerlegt
 - γ -Formeln werden mit freien Variablen instantiiert
 - **Substitution für freie Variablen wird im Komplementaritätstest bestimmt**