Inferenzmethoden

Einheit 5

Die Konnektionsmethode:

Ergänzungen für die Prädikatenlogik

1. Prädikatenlogischer Extensionsschritt
2. Prädikatenlogische Rücksetzung
3. Unifikation

Konnektionsmethode für die Prädikatenlogik

Liften der aussagenlogischen Methode

- **Zulässige Substitution muß bestimmt werden**
  – Verfahren muß partielle Substitution σ mitführen und erweitern
- **Erweiterung des Extensionsschrittes "$\vdash$"**
  – Konnektierte Literale müssen unifiziert werden
  – Alternativen werden komplexer
- **Bereinigungsschritt "$\sim$" i.w. unverändert**
- **(Implizite) Klauselkopien können nötig sein**
  – Erzeuge Klauselkopien bzw. Indizierung dynamisch
- **Erweiterung des Rücksetzungsschrittes "$\mapsto$"**
  – Alternative konnektierte Klauseln
  – Alternative Substitutionen und passende konnektierte Literale
  – Alternative Startklauseln (**ersetzt Separationsschritt**)
  – Zusätzliche Instanzen der Matrix

Prädikatenlogische Erweiterung des Extensionsschrittes

$$\left[\begin{array}{ccc} & Hx^{T} & Sx^{T} \quad Ac^{T} \\ \underset{\nearrow\;\uparrow}{Hc^{F}} & Sx^{F} & Ax^{F} \end{array}\right][\,] \quad \vdash \quad \left[\begin{array}{ccc} & Hx^{T}\,.\; Sx^{T} & Ac^{T} \\ \boxed{Hc^{F}} & \underset{\nearrow\;\uparrow}{Sx^{F}} & Ax^{F} \end{array}\right][c/x]$$

$\uparrow$ markiert **aktuelle Klausel**

$\boxed{P}$ markiert Literale des **aktuellen Pfades**

Aktuelle Substitution σ wird mitgeführt

$\nearrow$ markiert Startliterale der noch offenen Teilpfade

. markiert abgeschlossene Teilpfade

1. Wähle ein mit $\nearrow$ markiertes Literal $\boldsymbol{L}$ der aktuellen Klausel
2. Ersetze $\nearrow$ durch Box $\boxed{\boldsymbol{L}}$; wähle von $\boldsymbol{L}$ ausgehende Konnektion
   Falls es weitere Konnektionen gibt, vermerke diese in Alternativenmenge
3. Unifiziere die konnektierten (mit $\boldsymbol{\sigma}$ modifizierten) Terme und erweitere $\boldsymbol{\sigma}$
   Falls Terme nicht unifizierbar sind, breche den Extensionsschritt ab
4. Markiere alle Literale der konnektierten Klausel, die unter $\boldsymbol{\sigma}$ komplementär zu einem Literal des aktuellen Pfades sind, mit .
5. Markiere andere Literale der konnektierten Klausel mit $\nearrow$
6. Verschiebe $\uparrow$ auf die konnektierte Klausel

Einfacher prädikatenlogischer Extensionsbeweis

$$\begin{bmatrix} & Hx^T & Sx^T & Ac^T \\ Hc^F & Sx^F & Ax^F & \end{bmatrix} [\,] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hx^T . & Sx^T & Ac^T \\ \boxed{Hc^F} & Sx^F & Ax^F & \end{bmatrix} [c/x]$$

$$\vdash \quad \begin{bmatrix} & Hx^T . & Sx^T . & Ac^T \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & Ax^F & \end{bmatrix} [c/x] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hx^T . & Sx^T . & Ac^T . \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & \end{bmatrix} [c/x]$$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} & Hx^T . & Sx^T . & Ac^T \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & Ax^F . & \end{bmatrix} [c/x] \quad \sim \quad \begin{bmatrix} & Hx^T . & Sx^T & Ac^T \\ \boxed{Hc^F} & Sx^F . & Ax^F & \end{bmatrix} [c/x]$$

$$\sim \quad \begin{bmatrix} & Hx^T & Sx^T & Ac^T \\ Hc^F . & Sx^F & Ax^F & \end{bmatrix} [c/x] \quad \sim \quad \begin{bmatrix} & Hx^T & Sx^T & Ac^T \\ Hc^F & Sx^F & Ax^F & \end{bmatrix} [c/x]$$

Verallgemeinerungen des Extensionsschrittes I

Alle neuen Konnektionen müssen komplementär sein

$$\begin{bmatrix} & Hy^T \cdot & Sx^T \\ \boxed{Hc^F} & Sx^F & Hx^T \end{bmatrix}[c/y] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hy^T \cdot & Sx^T \cdot \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & Hx^T \cdot \end{bmatrix}[c/y, c/x]$$

Hx^T ist konnektiert mit Hc^F

– Konnektion nicht komplementär unter (erweiterter) Substitution σ

– Konnektion wird aber komplementär, wenn σ nochmals erweitert wird

$$\Downarrow$$

Verallgemeinere Schritt 4 auf unifizierbare Konnektionen

“Markiere alle Literale der konnektierten Klausel, die unter einer Erweiterung von σ komplementär zu einem Literal des aktuellen Pfades sind, mit $\cdot$.”

Verallgemeinerungen des Extensionsschrittes II

$$\begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & Ax^F & Hx^T \\ & & & Sd^T \end{bmatrix}[c/y] \vdash \begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T \\ & & & Sd^T \end{bmatrix}[c/y, c/x]$$

$$\vdash \begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T \\ & & & Sd^T \end{bmatrix}[c/y, d/x]$$

Hx^T* ist konnektiert mit *Hc^F*, *Sx^F* mit *Sd^T

– (Hx^T, Hc^F) ist unifizierbar durch Erweiterung von σ auf $[c/y, c/x]$

– (Sx^F, Sd^T) ist unifizierbar durch Erweiterung von σ auf $[c/y, d/x]$

– Mehrere alternative Extensionen mit verschiedenen Substitutionen möglich

$$\Downarrow$$

Verallgemeinere Schritte 3 und 4 und den Rücksetzungsschritt

– Bilde Unifikatoren für alle Teilmengen konnektierter Literale

– Verfolge eine Alternative und speichere die anderen

Allgemeiner prädikatenlogischer Extensionsschritt

1. Wähle ein mit $\nearrow$ markiertes Literal L der aktuellen Klausel
2. Ersetze $\nearrow$ durch Box $\boxed{L}$; wähle von L ausgehende Konnektion
   Falls es weitere Konnektionen gibt, vermerke diese in Alternativenmenge
3. Wähle Teilmenge der Literale der konnektierten Klausel, die mit dem aktuellen Pfad konnektiert sind, und eine Substitution ρ, welche die mit σ modifizierten Konnektionen komplementär macht
   Erweitere σ mit der zusätzlich generierten Substitution ρ
   Vermerke weitere Teilmengen und Substitutionen in Alternativenmenge
   Falls es keine solche Teilmenge gibt, breche den Extensionsschritt ab
4. Markiere alle gewählten Literale der konnektierten Klausel mit $\bullet$
5. Markiere andere Literale der konnektierten Klausel mit $\nearrow$
6. Verschiebe $\uparrow$ auf die konnektierte Klausel

Prädikatenlogische Rücksetzung

Keine Extension oder Bereinigung mehr möglich

$$\left[\begin{array}{cccc} & Hx^T . & Sx^T . & Ax^T \;.\; Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T \;. \\ & & & Sd^T \end{array}\right] [c/y, c/x] \;\mapsto\; \left[\begin{array}{cccc} & Hy^T . & Sx^T . & Ax^T \;.\; Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T \\ & & & Sd^T \;. \end{array}\right] [c/y, d/x]$$

- **Alternativenmengen nicht leer?**
  1. Gehe zurück auf Literal des aktuellen Pfades, von dem aus
     (a) eine alternative Unifikation möglich war oder
     (b) eine alternative Konnektion beginnt
  2. Stelle die damalige Konfiguration und Substitution wieder her
  3. Streiche die neu betrachtete Konnektion / Unifikation
     aus der entsprechenden Alternativenmenge
- **Alternativenmengen leer?**

  Versuche Neustart mit alternativer Startklausel oder Klauselkopie

Prädikatenlogischer Extensionsbeweis

$$\begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ Hc^F & Sx^F & Ax^F & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{bmatrix} [\,] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & Sx^F & Ax^F & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{bmatrix} [c/y]$$

$$\vdash \begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & Ax^F & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{bmatrix} [c/y] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{bmatrix} [c/y, c/x]$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{bmatrix} [c/y, d/x] \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & \boxed{Hx^T} & \\ & & & Sd^T & \end{bmatrix} [c/y, d/x]$$

$$\sim \begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ \boxed{Hc^F} & \boxed{Sx^F} & \boxed{Ax^F} & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{bmatrix} [c/y, d/x] \quad \sim^4 \quad \begin{bmatrix} & Hy^T & Sx^T & Ax^T & Hd^F \\ Hc^F & Sx^F & Ax^F & Hx^T & \\ & & & Sd^T & \end{bmatrix} [c/y, d/x]$$

Allgemeine Rücksetzung: Klauselkopie

$$\begin{bmatrix} \boxed{Pc^T} & Pfx^T \; Pffy^F \\ & Px^F \end{bmatrix}_{[c/x]} \quad \overset{\mapsto}{\vdash} \quad \begin{bmatrix} \boxed{Pc^T} & \boxed{Pfx_1{}^T} & \boxed{Pfx_2{}^T} & Pffy^F \\ & Px_1{}^F & Px_2{}^F & \end{bmatrix}_{[c/x_1,\, fc/x_2,\, c/y]}$$

- **Extensionsschritt undurchführbar**
  - $[c/x]$ widerspricht $[fy/x]$
- **Formel $(\forall x\, Px \Rightarrow Pfx) \land Pc \;\Rightarrow\; \exists y\, Pffy$ gültig**
  - Argument $\forall x\,(Px \Rightarrow Pfx)$ kann doppelt verwendet werden
- **Extensionsbeweis benötigt Klauselkopie**
- **Offene Fragen**
  - Automatische Erzeugung von Kopien bei Rücksetzung?
    - Tiefensuche: Kopien frühzeitig dynamisch erzeugen
    - Breitensuche: Kopien nach erfolgloser Beweisführung
  - **Suche terminiert nicht immer**, da Prädikatenlogik unentscheidbar

PRÄDIKATENLOGISCHER EXTENSIONSBEWEIS MIT KLAUSELKOPIE

$$\begin{bmatrix} Pc^T & Pfx_1^T & Pfx_2^T & Pffy^F \\ & Px_1^F & Px_2^F & \end{bmatrix}_{[]} \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} \boxed{Pc^T} & Pfx_1^T & Pfx_2^T & Pffy^F \\ & Px_1^F\,. & Px_2^F & \end{bmatrix}_{[c/x_1]}$$

$$\vdash \begin{bmatrix} \boxed{Pc^T} & \boxed{Pfx_1^T} & \boxed{Pfx_2^T} & Pffy^F \\ & Px_1^F\,. & Px_2^F\,. & \end{bmatrix}_{[c/x_1,\, fc/x_2]} \quad \vdash \quad \begin{bmatrix} \boxed{Pc^T} & \boxed{Pfx_1^T} & \boxed{Pfx_2^T} & Pffy^F\,. \\ & Px_1^F\,. & Px_2^F\,. & \end{bmatrix}_{[c/x_1,\, fc/x_2,\, c/y]}$$

$$\sim^3 \begin{bmatrix} Pc^T & Pfx_1^T & Pfx_2^T & Pffy^F \\ & Px_1^F & Px_2^F & \end{bmatrix}_{[c/x_1,\, fc/x_2,\, c/y]}$$

Klauselkopien und Konnektionen implizit verwaltet

Allgemeine Prädikatenlogische Rücksetzung

$$\begin{bmatrix} \boxed{Pc^T} & Pfx^T & Pffy^F & Pfz^T \\ & Px^F & & \end{bmatrix}_{[c/x]} \quad \overset{\mapsto}{\vdash} \quad \begin{bmatrix} Pc^T & Pfx^T & Pffy^F & \boxed{Pfz^T} \\ & Px^F & & \end{bmatrix}_{[fy/z]}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{Pc^T} & Pfx^T & Pffy^F \\ & Px^F & \end{bmatrix}_{[c/x]} \quad \overset{\mapsto}{\vdash} \quad \begin{bmatrix} \boxed{Pc^T} & \boxed{Pfx_1^T} & \boxed{Pfx_2^T} & Pffy_1^F & Pffy_2^F \\ & Px_1^F & Px_2^F & & \end{bmatrix}_{[c/x_1,\, fc/x_2,\, c/y_1]}$$

- **Alternativenmengen nicht leer?**
  1. Gehe zurück auf Literal des aktuellen Pfades, von dem aus
     (a) eine alternative Unifikation möglich war oder
     (b) eine alternative Konnektion beginnt
  2. Stelle die damalige Konfiguration und Substitution wieder her
  3. Streiche neu betrachtete Konnektion / Unifikation aus entsprechender Alternativenmenge
- **Alternativenmengen leer?**

  (a) Wähle alternative Startklausel, falls vorhanden, und beginne neu

  (b) Erzeuge Kopie aller (γ-)Klauseln und starte Verfahren erneut

UNIFIKATION

- **Prädikatenlogische Beweise brauchen Substitutionen**
  – Konnektierte Literale müssen “gleich” gemacht werden können
  – Substitution darf γ-Variablen durch Terme ersetzen
  – Dieselbe Substitution muß alle Konnektionen komplementär machen
  – Technisches Problem: **Unifikation** (“Gleichmachen von Termen”)
- **Substitution: endliche Abbildung $\boldsymbol{\sigma : \mathcal{V} \rightarrow}$ Term**
  – $\boldsymbol{\sigma = [t_1, .., t_n/x_1, .., x_n]} \mathrel{\hat{=}} \sigma(x_1){=}t_1, \ldots, \sigma(x_n){=}t_n$
  – $\boldsymbol{A\sigma}$: Anwendung von σ auf Ausdruck A
- **Unifikationsproblem**
  – Gegeben Gleichungsmenge $E = \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$
  Finde Substitution σ mit $\sigma(t_i) = \sigma(t_i)$ für alle $i \leq n$
  – σ heißt Unifikator der Menge E (bzw. von s und t für $E = \{s \doteq t\}$)
  – σ ist Allgemeinster Unifikator von $\boldsymbol{E}$ (mgu)
  wenn σ Unifikator und $\tau = \sigma\ \tau$ für jeden Unifikator τ von S gilt

Wie kann man Unifikatoren effizient bestimmen?

UNIFIKATION – INTUITIV

- **Schrittweises Angleichen der Terme von außen**
  - Eine Variable x unifiziert mit jedem Term t und liefert σ=$[t/x]$
  - Zwei Funktionsanwendungen $f(s_1, .., s_n)$ und $g(t_1, .., t_n)$ unifizieren nur, wenn f=g und jedes s_i mit t_i unter derselben Substitution σ unifiziert

    σ kann Erweiterung aller Einzelsubstitutionen sein
    - $f(gx, ha)$ und $f(z, y)$ unifiziert mit $[gx/z]$ und $[ha/y]$ $\quad\sigma$=$[gx/z, ha/y]$
    - $f(gx, ha)$ und $f(z, x)$ unifiziert mit $[gx/z]$ und $[ha/x]$ $\quad\sigma$=$[g(ha)/z, ha/x]$
    - $f(gx, ha)$ und $f(g(hz), x)$ unifiziert mit $[hz/x]$ und $[ha/x]$ $\quad\sigma$=$[ha/x, a/z]$
    - $f(gx, ha)$ und $f_1(z, y)$ unifiziert nicht, da $f \neq f_1$
    - $f(gx, ha)$ und $f(hz, y)$ unifiziert nicht, da gx nicht mit hz unifiziert
    - $f(gx, ha)$ und $f(ga, x)$ unifiziert nicht, da $[a/x]$ und $[ha/x]$ nicht kompatibel
    - $f(gx, ha)$ und $f(x, y)$ unifiziert nicht, da $[gx/x]$ zyklische Substitution

- **Aufgaben eines Unifikationsverfahrens**
  - Dekomposition von Termen bis zur Ebene der Variablen
  - Sequentieller Aufbau einer Substitution ersetzt Kompatibilitätstest
  - Occurs-Check: Test, ob Variable x in $\sigma(x)$ erscheint

Berechnung von Unifikatoren

Schrittweises Auflösen der Unterschiede zwischen Termen

- **Differenz $\mathsf{DIFF}(s,t)$ der Terme s und t**

  Menge ungeordneter Termpaare mit der Eigenschaft

  – $\mathsf{DIFF}(s,t) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } s{=}t \\ \mathsf{DIFF}(s_1,t_1)\cup..\cup\mathsf{DIFF}(s_n,t_n) & \text{falls } s = f(s_1,..,s_n) \text{ und } t = f(t_1,..,t_n) \\ \{\{s,t\}\} & \text{sonst} \end{cases}$

  – $\mathsf{DIFF}(s_1,..,s_n,\;\; t_1,..,t_n) = \mathsf{DIFF}(s_1,t_1)\cup..\cup\mathsf{DIFF}(s_n,t_n)$

- **$\mathsf{DIFF}(s,t)$ ist verhandlungsfähig**

  – Elemente sind Paare $\{x,t_0\}$ mit $x\in\mathcal{V}$ und x erscheint nicht in t_0

- **Reduktion einer verhandlungsfähigen Differenz $\mathsf{DIFF}(s,t)$**

  – Substitution $[t_0/x]$ mit $\{x,t_0\}\in\mathsf{DIFF}(s,t)$

  Unifikation ist beschreibbar als Reduktion verhandlungsfähiger Differenzen

UNIFIKATIONSALGORITHMUS VON HERBRAND–ROBINSON

Eingabe		*Terme* s *und* t
Initialisierung		$\sigma \leftarrow []$
Reduktion	*Solange*	DIFF$(s\sigma, t\sigma)$ *verhandlungsfähig*
		wähle Reduktion ρ von DIFF$(s\sigma, t\sigma)$
		$\sigma \leftarrow \sigma\rho$
Ergebnis	*Falls*	DIFF$(s\sigma,t\sigma) = \emptyset$
	dann	σ *ist mgu von* $\{s, t\}$
	sonst	$\{s, t\}$ *ist nicht unifizierbar*

Herbrand–Robinson Unifikation am Beispiel

$P(x, f(gy), fx)^T$ und $P(h(y,z), fz, f(h(u,v)))^F$

	σ	DIFF($s\sigma$, $t\sigma$)
0	$[]$	$\{\{x, h(y,z)\}, \{z, gy\}, \{x, h(u,v)\}\}$
1	$[gy/z]$	$\{\{x, h(y,gy)\}, \{x, h(u,v)\}\}$
2	$[gy/z,\ h(u,v)/x]$	$\{\{u, y\}, \{v, gy\}\}$
3	$[gu/z,\ h(u,v)/x,\ u/y]$	$\{\{v, gu\}\}$
4	$[gu/z,\ h(u,v)/x,\ u/y,\ gu/v]$	$\{\}$

$P(x, fc)^T$ und $P(fd, x)^F$

	σ	DIFF($s\sigma$, $t\sigma$)
0	$[]$	$\{\{x, fd\}, \{x, fc\}\}$
1	$[fd/x]$	$\{\{d, c\}\}$
2		nicht verhandlungsfähig (keine Variable)

$P(x)^T$ und $P(fx)^F$

	σ	DIFF($s\sigma$, $t\sigma$)
0	$[]$	$\{\{x, fx\}\}$
1		nicht verhandlungsfähig (occurs-check)

Herbrand–Robinson Unifikation am Beispiel

$P(fxx, fyy, fzz)^T$ und $P(y, z, v)^F$		
	σ	DIFF$(s\sigma, t\sigma)$
0	$[]$	$\{\{fxx, y\}, \{fyy, z\}, \{fzz, v\}\}$
1	$[fxx/y]$	$\{\{f(fxx, fxx), z\}, \{fzz, v\}\}$
2	$[fxx/y,\ f(fxx, fxx)/z]$	$\{\{f(f(fxx, fxx), f(fxx, fxx)), v\}\}$
3	$[fxx/y,\ f(fxx, fxx)/z,$ $f(f(fxx, fxx), f(fxx, fxx))/v]$	$\{\}$

Zeit für Occurs-check wächst exponentiell

Eigenschaften des Herbrand–Robinson Verfahrens

- **Exponentiell im schlimmsten Fall**
  - Occurs-check kann für große Terme extrem zeitaufwendig werden

    Beispiel: $P(fx_1x_1, fx_2x_2, ..., fx_nx_n)^T$ und $P(x_2, ..x_n, y)^F$
- **Im Mittel konstanter Aufwand**
  - Nur wenige Terme sind überhaupt unifizierbar (früher Abbruch)
  - "pathologische Fälle" unifizierbarer Terme sind extrem selten
  - In Theorembeweisern dominiert Aufwand für Suche die Unifikation

    Prolog hat fast linearen Suchaufwand, keine Selbstreferenzen $\mapsto$ kein Occurs-check
- **Optimierung durch Pointerverwaltung**
  - Terme werden bei Differenzenbildung nicht explizit eingesetzt
  - Exponentielle Aufblähung wird durch Dag-Darstellung vermieden
  - Occurs-check verfolgt Pointer
  - Fast lineare worst-case Komplexität, aufwendig zu implementieren

Martelli-Montanari Unifikationsalgorithmus

Gegeben: **Zu lösende Gleichung** $s\doteq t$

Ziel: **Gleichungsmenge** $\{x_1\doteq t_1, \ldots, x_k\doteq t_k\}$ **mit** $x_i \not\in t_j$

Methode: **Anwendung von Transformationsregeln**

Regeln: **Termdekomposition**

$$\{f(s_1,\ldots,s_n)\doteq f(t_1,\ldots,t_n)\}\cup E \;\leadsto\; \{s_1\doteq t_1,\ldots,s_n\doteq t_n\}\cup E$$

Entfernung trivialer Gleichungen

$$\{x\doteq x\}\cup E \;\leadsto\; E$$

Umstellung

$$\{t\doteq x\}\cup E \;\leadsto\; \{x\doteq t\}\cup E, \qquad \text{wenn } t \not\in \mathcal{V}$$

Variablenelimination

$$\{x\doteq t\}\cup E \;\leadsto\; \{x\doteq t\}\cup E[t/x], \qquad \text{wenn } x \not\in t \text{ und } x \in E$$

Eigenschaften des Martelli-Montanari Verfahrens

- **Korrektheit** ↦ “Angewandte Logik”
  - Termdekomposition zerlegt Gleichungen, bis ein Term Variable ist oder Terme als nicht unifizierbar identifiziert
  - Umstellung stellt Variablen auf linke Seite
  - Variablenelimination instantiiert restliche Gleichungen
  - Iteration ergibt Menge von Gleichungen $x_i \doteq t_i$ mit $x_i \in \mathcal{V}$ und $x_i \notin t_j$
- **Effizienz durch Datenstruktur Multigleichung**
  - Dag-Darstellung (Structure-Sharing) von Termen und Gleichungen $\{u, v, w\} \doteq hxy$ ersetzt mehrere Gleichungen $u \doteq hxy, v \doteq hxy, w \doteq hxy$
  - Optimierungseffekt ähnlich zur Pointerverwaltung
  - Liefert fast lineare worst-case Komplexität
- **Gut zu verallgemeinern und leicht zu implementieren**
  - Wenn Unifikation mehr als syntaktische Gleichheit verarbeiten soll z.B. Unifikation modulo Assoziativität, Kommutativität, Gleichheit,...

Martelli-Montanari Unifikation am Beispiel

$P(x, fgy, fx)^T$ und $P(h(y,z), fz, fh(u,v))^F$	
	$\{x \doteq h(y,z),\ fgy \doteq fz,\ fx \doteq fh(u,v)\}$
Termdekomposition	$\{x \doteq h(y,z),\ gy \doteq z,\ x \doteq h(u,v)\}$
Variablenelimination	$\{x \doteq h(y,z),\ gy \doteq z,\ h(y,z) \doteq h(u,v)\}$
Termdekomposition	$\{x \doteq h(y,z),\ gy \doteq z,\ y \doteq u,\ z \doteq v\}$
Umstellung	$\{x \doteq h(y,z),\ z \doteq gy,\ y \doteq u,\ z \doteq v\}$
Variablenelimination	$\{x \doteq h(y,gy),\ z \doteq gy,\ y \doteq u,\ gy \doteq v\}$
Umstellung	$\{x \doteq h(y,gy),\ \{z,v\} \doteq gy,\ y \doteq u\}$
Variablenelimination	$\{x \doteq h(u,gu),\ \{z,v\} \doteq gu,\ y \doteq u\}$

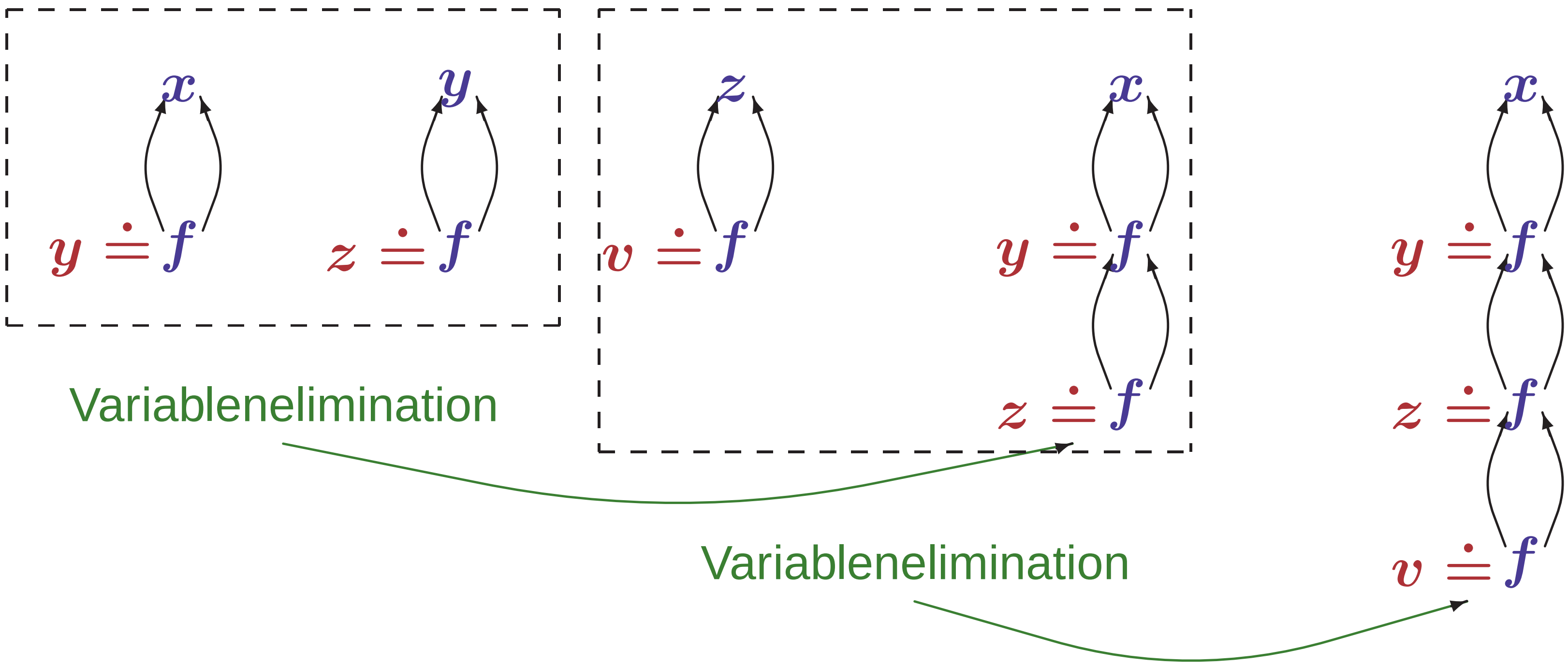
$P(x, fc)^T$ und $P(fd, x)^F$	
	$\{x \doteq fd,\ x \doteq fc\}$
Variablenelimination	$\{x \doteq fd,\ fd \doteq fc\}$
Termdekomposition	$\{x \doteq fd,\ d \doteq c\}$ Keine Regel anwendbar

$P(x)^T$ und $P(fx)^F$	
	$\{x \doteq fx\}$ Zielsituation nicht erreicht

Martelli-Montanari Unifikation am Beispiel

$P(y,z,v)^T$ und $P(fxx, fyy, fzz)^F$	
	$\{y\doteq fxx,\ z\doteq fyy,\ v\doteq fzz\}$
Variablenelimination	$\{y\doteq fxx,\ z\doteq f(fxx, fxx),\ v\doteq fzz\}$
Variablenelimination	$\{y\doteq fxx,\ z\doteq f(fxx, fxx),\ v\doteq f(f(fxx, fxx), f(fxx, fxx))\}$

Effizienz kommt aus Dag-Darstellung



Extensionsverfahren im Rückblick

- **Verdichtung des Tableauxverfahrens**
  - Kompaktheit: operiere ausschließlich auf atomaren Teilformeln
    keine Erzeugung überflüssiger Kopien
  - Konnektionenorientierung bei Beweissuche:
    gezielte Auswahl beweisrelevanter Teilformeln
  - Unifikation: gezielte Instantiierung von Quantoren

  Beweissuche kann erheblich effizienter implementiert werden

- **Es gibt viele Ähnlichkeiten**

Äste im Tableau	$\hat{=}$	**Pfade durch die Matrix**
α-Regel (Pfadverlängerung)	$\hat{=}$	Extensionschritt
β-Regel (Verzweigung)	$\hat{=}$	Markierung der noch offenen Literale
γ-Regel	$\hat{=}$	Instantiierung einer Variablen
δ-Regel	$\hat{=}$	Einführung einer neuen Konstanten
Abgeschlossener Ast	$\hat{=}$	Komplementäre Konnektion im Pfad

  Es ist möglich, Tableauxbeweise aus Matrixbeweisen zu rekonstruieren